SHOUT
SHARE
IT

Eng 29

ABHANDLUNGEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

1912

PHYSIKALISCH-MATHEMATISCHE CLASSE

ABHANDLUNGEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

JAHRGANG 1912

PHYSIKALISCH-MATHEMATISCHE CLASSE

MIT 8 TAFELN

BERLIN 1912

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER

Smithsonian Institution
23486
AUG 27 1912
Office Library

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

Inhalt.

Öffentliche Sitzungen . . . . S. VII–VIII.
Verzeichniſs der im Jahre 1912 gelesenen Abhandlungen . . . . . S. VIII–XIV.
Bericht über den Erfolg der Preisausschreibungen für 1912 und neue Preisausschreibungen . . . . S. XIV–XV.
Statut der Eduard Hitzig-Stiftung . . . . S. XVI–XVIII.
Verzeichniſs der im Jahre 1912 erfolgten besonderen Geldbewilligungen aus akademischen Mitteln zur Ausführung wissenschaftlicher Unternehmungen . . . . S. XIX–XXI.
Verzeichniſs der im Jahre 1912 erschienenen im Auftrage oder mit Unterstützung der Akademie bearbeiteten oder herausgegebenen Werke . . . . S. XXI–XXIII.
Veränderungen im Personalstande der Akademie im Laufe des Jahres 1912 . . . . S. XXIV–XXV.
Verzeichniſs der Mitglieder der Akademie am Schlusse des Jahres 1912 nebst den Verzeichnissen der Inhaber der Helmholtz- und der Leibniz-Medaille und der Beamten der Akademie . . . . . S. XXVI–XXXIV.

Abhandlungen.

Struve: Bahnen der Uranustrabanten. Abth. 1. Oberon und Titania Abh. I. S. 1–109.

Anhang.

Abhandlungen nicht zur Akademie gehöriger Gelehrter.

E. Kötter: Über den Grenzfall, in welchem ein ebenes Fachwerk von n Knotenpunkten und $2n-3$ Stäben oder ein räumliches Fachwerk von n Knotenpunkten und $3n-6$ Stäben nicht mehr statisch bestimmt ist. (Mit 1 Tafel) . . . . Abh. I. S. 1–97.
A. Johnsen: Die Gesteine der Inseln S. Pietro und S. Antioco (Sardinien). (Mit 3 Tafeln) . . . . Abh. II. S. 1–82.
H. Klaatsch: Morphologische Studien zur Rassendiagnostik der Turfanschädel. (Mit 4 Tafeln) . . . . Abh. III. S. 1–52.

JAHR 1912.

Öffentliche Sitzungen.

Sitzung am 24. Januar zur Feier des 200. Geburtstages König Friedrich's II. im Weiſsen Saale des Königlichen Schlosses.

Seine Majestät der Kaiser und König hatten für die diesjährige Friedrichssitzung der Akademie die Bestimmung getroffen, daſs diese Sitzung, anläſslich der 200. Wiederkehr des Geburtstages Friedrichs des Groſsen, am 24. Januar im Weiſsen Saale des Königlichen Schlosses stattfinden solle, und zwar in besonders festlicher Weise. Seine Majestät nahmen mit dem Königlichen Hause an der um 4 Uhr Nachmittags beginnenden Sitzung theil und hatten dazu die höchsten Würdenträger des Preuſsischen Staates in der Civil- und Armeeverwaltung geladen, während der Akademie die Einladung ihrer auswärtigen, Ehren- und correspondirenden Mitglieder, soweit sie Preuſsen angehörten, und ihrer wissenschaftlichen Mitarbeiter und Beamten überlassen war. Über zwanzig der auswärtigen, Ehren- und correspondirenden Mitglieder waren der Einladung gefolgt.

In der Mitte des Weiſsen Saales waren auf einer Tafel Erinnerungen an Friedrich den Groſsen, insbesondere solche, die an seine Beziehungen zur Wissenschaft und Kunst und zur Akademie anknüpften, aufgestellt. Hinter dieser Tafel, gegenüber dem Throne, befanden sich die Plätze für die Akademiker und die von der Akademie Geladenen, rechts vom Throne die für die Prinzen des Königlichen Hauses, links für den Reichskanzler und die Minister, während die übrigen Festtheilnehmer an den beiden Schmalseiten des Saales ihre Sitze hatten. Ihre Majestät die Kaiserin mit den Königlichen Prinzessinnen wohnte der festlichen Sitzung auf der Capellentribüne des Saales bei.

Seine Majestät nahmen unter Vorantritt des Groſsen Hauptquartiers auf dem Throne Platz, und die Feier begann mit einem Gesangvortrage des Königlichen Opernchors, worauf der für die Feier den Vorsitz führende beständige Secretar Hr. Waldeyer die Eröffnungsworte sprach. Nach denselben erhoben Sich Seine Majestät der Kaiser und König zu einer Ansprache. Alsdann hielt Hr. Koser die Festrede. Die Feier schloſs mit einem auf Seine Majestät ausgebrachten Hoch des vorsitzenden Secretars und mit dem vom Königlichen Opernchor ausgeführten »Salvum fac regem!«.

Sitzung am 4. Juli zur Feier des Leibnizischen Jahrestages.

Hr. Diels, als vorsitzender Secretar, eröffnete die Sitzung mit einer kurzen Ansprache.

Darauf hielten die seit dem letzten Leibniz-Tage (29. Juni 1911) neu eingetretenen Mitglieder ihre Antrittsreden, die von den beständigen Secretaren beantwortet wurden, nämlich die HH. Haberlandt — Erwiderung von Hrn. Waldeyer, Kuno Meyer — Erwiderung von Hrn. Roethe, Erdmann — Erwiderung von Hrn. Diels, Hellmann — Erwiderung von Hrn. Planck, Seckel — Erwiderung von Hrn. Diels und de Groot — Erwiderung von Hrn. Roethe. Es folgten Gedächtniſsreden auf Reinhard von Kekule von Hrn. Conze, auf Wilhelm Dilthey von Hrn. Erdmann und auf Johannes Vahlen von Hrn. von Wilamowitz-Moellendorff.

Sodann wurden Mittheilungen betreffend ein Preisausschreiben aus dem von Miloszewsky'schen Legat für 1915, den Preis der Diez-Stiftung und das Stipendium der Eduard Gerhard-Stiftung gemacht.

Schlieſslich wurde verkündigt, daſs die Akademie eine Anzahl von Leibniz-Medaillen verliehen habe, und zwar in Gold dem Fräulein Elise Koenigs in Berlin, in Silber dem Professor Dr. Robert Davidsohn in Florenz, dem Aegyptologen N. de Garis Davies in Kairo, dem Assistenten am Geologisch-Palaeontologischen Institut und Museum der Universität Berlin Dr. Edwin Hennig und dem Oberlehrer Prof. Dr. Hugo Rabe in Hannover.

Verzeichniſs der im Jahre 1912 gelesenen Abhandlungen.

Physik und Chemie.

Planck, über die Begründung des Gesetzes der schwarzen Strahlung. (Cl. 11. Jan.)

Nernst, Thermodynamik und specifische Wärme. (Cl. 1. Febr.; *S. B.*)

Eucken, Dr. A., die Molecularwärme des Wasserstoffs bei tiefen Temperaturen. Vorgelegt von Nernst. (Cl. 1. Febr.; *S. B.*)

Rubens und Dr. G. **Hertz**, über den Einfluſs der Temperatur auf die Absorption langwelliger Wärmestrahlen in einigen festen Isolatoren. (Cl. 29. Febr.; *S. B.* 14. März.)

Warburg, über den Energieumsatz bei photochemischen Vorgängen in Gasen. II. (Cl. 29. Febr.; *S. B.*)

Fischer und Dr. K. **Freudenberg**, über die Synthese von Gerbstoffen aus Zucker und Phenolcarbonsäuren. (Cl. 13. Juni.)

Planck, das Princip der kleinsten Wirkung. (Cl. 27. Juni.)

Warburg, über den Energieumsatz bei photochemischen Vorgängen in Gasen. III. (Cl. 18. Juli.)

Nernst und F. A. **Lindemann**, Untersuchungen über die specifische Wärme. VI. (Cl. 12. Dec.; *S. B.*)

Nernst, Untersuchungen über die specifische Wärme. VII. (Cl. 12. Dec.; *S. B.*)

Mineralogie und Geologie.

Liebisch, über die Fluorescenz der Sodalith- und Willemitgruppe im ultravioletten Licht. (G. S. 7. März; *S. B.*)

Erdmannsdörffer, Prof. O. H., über Mischgesteine von Granit und Sedimenten. Vorgelegt von Liebisch. (Cl. 2. Mai; *S. B.* 23. Mai.)

Johnsen, Prof. A., die Gesteine der Inseln S. Pietro und S. Antioco (Sardinien). Vorgelegt von Liebisch. (Cl. 27. Juni; *Abh.*)

Branca, müssen Intrusionen nothwendig mit Aufpressungen verbunden sein? (G. S. 25. Juli; *S. B.*)

Frech, Prof. F., über den Gebirgsbau des Tauros in seiner Bedeutung für die Beziehungen der europäischen und asiatischen Gebirge. Vorgelegt von Branca. (Cl. 28. Nov.; *S. B.* 12. Dec.)

Botanik und Zoologie.

Haberlandt, über das Sinnesorgan des Labellums der Pterostylis-Blüthe. (Cl. 14. März; *S. B.*)

Engler, über die Verbreitung der afrikanischen Burseraceen im Verhältniſs zu ihrer systematischen Gliederung und die Eintheilung der Gattung Commiphora. (Cl. 2. Mai.)

F. E. **Schulze**, die Erhebungen auf der Lippen- und Wangenschleimhaut der Säugethiere. I. Ruminantia. (G. S. 9. Mai; *S. B.* 6. Juni.)

Anatomie und Physiologie, Pathologie.

Rubner, über die Betheiligung endocellularer Fermente am Energieverbrauch der Zelle. (Cl. 1. Febr.; *S. B.*)

Orth, über Rinder- und Menschentuberkulose. (G. S. 8. Febr.; *S. B.*)

Waldeyer, über einen Fall von Mikrocephalie. (G. S. 11. April.)

O. **Hertwig**, Veränderung der idioplasmatischen Beschaffenheit der Samenfäden durch physikalische und durch chemische Eingriffe. Vierte Mittheilung. (G. S. 20. Juni; *S. B.*)

Poll, Prof. H., Mischlingsstudien. VII. Mischlinge von Phasianus und Gallus. Vorgelegt von O. Hertwig. (Cl. 18. Juli; *S. B.* 25. Juli.)

Anthropologie.

Klaatsch, Prof. H., morphologische Studien zur Rassen-Diagnostik der Turfan-Schädel. Vorgelegt von Waldeyer. (G. S. 25. Juli; *Abh.*)

Astronomie, Geographie und Geophysik.

Penck, über die Schliffkehle. (Cl. 15. Febr.)

Hellmann, über den Charakter der Sommerregen in Norddeutschland. (Cl. 28. März; *S. B.*)

Helmert, über die Bestimmung des Geoids im Harze. (Cl. 17. Oct.)

Struve, die Bahnen der Uranustrabanten Oberon und Titania. (Cl. 14. Nov.; *Abh.*)

Hellmann, über die Entstehung von Eisregen. (Cl. 14. Nov.; *S. B.*)

Samter, Prof. H., die Masse des Saturnstrabanten Titan. Vorgelegt von Struve. (Cl. 14. Nov.; *S. B.*)

Schwarzschild, über Spectrographenobjective. (Cl. 28. Nov.; *S. B.* 19. Dec.)

Mathematik.

Schur, Prof. I., über einen Satz von C. Carathéodory. Vorgelegt von Frobenius. (Cl. 11. Jan.; *S. B.*)

Frobenius, Ableitung eines Satzes von Carathéodory aus einer Formel von Kronecker. (Cl. 11. Jan.; *S. B.*)

Schwarz, über eine, wie es scheint, bisher nicht bemerkte Eigenschaft der reellen Configurationen (9_3, 9_3). (Cl. 18. April.)

Frobenius, über Matrizen aus nicht negativen Elementen. (Cl. 23. Mai; *S. B.*)

Frobenius, über den Stridsberg'schen Beweis des Waring'schen Satzes. (Cl. 18. Juli; *S. B.*)

Frobenius, über quadratische Formen, die viele Primzahlen darstellen. (Cl. 17. Oct.; *S. B.*)

Schottky und Dr. H. **Jung**, neue Sätze über Symmetralfunctionen und die Abel'schen Functionen der Riemann'schen Theorie. Dritte Mittheilung (Schluſs). (G. S. 7. Nov.; *S. B.*)

Mechanik und Technik.

Müller-Breslau, die Berechnung der Spannungen und Formänderungen der Führungsgerüste groſser Gasbehälter. (Cl. 31. Oct.)

Zimmermann, über den Einfluſs von Kreiselwirkungen der umlaufenden Massen auf Flugzeuge. (Cl. 28. Nov.)

Martens, über die Ergebnisse von Dauerbiegeversuchen. (G. S. 5. Dec.)

Philosophie.

Stumpf, über die Veränderlichkeit central bedingter Gefühlsempfindungen. (G. S. 22. Febr.)

Erdmann, Erkennen und Verstehen. (Cl. 28. Nov.; *S. B.* 19. Dec.)

Geschichte des Alterthums.

Hirschfeld, Beiträge zur römischen Geschichte. (G. S. 18. Jan.)

Dressel, über römische Medaillons aus der Sammlung des Königl. Münzcabinets. (G. S. 25. April.)

W. Schulze, der Tod des Kambyses. (Cl. 27. Juni; *S. B.* 18. Juli.)

E. Meyer, Untersuchungen über die älteste Geschichte Babyloniens und über Nebukadnezar's Befestigungsanlagen. (G. S. 21. Nov.; *S. B.*)

Mittlere und neuere Geschichte.

Zimmer †, auf welchem Wege kamen die Goidelen vom Continent nach Irland? (Cl. 1. Febr.; *Abh.*)

Lenz, über die Kämpfe des Ministers Eichhorn mit der Berliner Universität. (G. S. 21. März.)

Koser, Preufsen und Österreich im Jahre 1858. (Cl. 28. März.)

Schäfer, die deutsch-französische Sprachgrenze. (G. S. 6. Juni.)

Kirchengeschichte.

Sachau, die christliche Gesetzgebung für die Persis, vertreten durch die Erzbischöfe Jesubocht und Simeon. (Cl. 1. Febr.)

Harnack, Geschichte eines programmatischen Worts Jesu (Matth. 5, 17) in der ältesten Kirche. (Cl. 15. Febr.; *S. B.*)

Harnack, chronologische Berechnung des »Tags von Damaskus«. (Cl. 18. Juli; *S. B.*)

Brandl, über die ursprüngliche Diöceseneintheilung Englands. (G. S. 24. Oct.)

Maas, Dr. P., zu den Beziehungen zwischen Kirchenvätern und Sophisten. I. Vorgelegt von Norden. (Cl. 31. Oct.; *S. B.*)

Maas, Dr. P., zu den Beziehungen zwischen Kirchenvätern und Sophisten. II. Vorgelegt von Norden. (Cl. 28. Nov.; *S. B.*)

Rechtswissenschaft.

Seckel, die Summen der Glossatoren. (Cl. 12. Dec.)

Allgemeine, deutsche und andere neuere Philologie.

Schmidt, Beiträge zur Chronologie von Wilhelm Meisters theatralischer Sendung. (Cl. 29. Febr.)

Burdach, Faust und Moses. Erster Theil. (Cl. 2. Mai; *S. B.*)

K. Meyer, ein mittelirisches Gedicht auf Brendan den Meerfahrer. (G. S. 9. Mai; *S. B.*)

Roethe, über die Dessauer Handschrift cod. Georg. 4°, 1. (Cl. 23. Mai.)

K. Meyer, die älteste irische Dichtung und Verskunst. (Cl. 13. Juni.)

W. Schulze, zwei lautgeschichtliche Fragen. (Cl. 27. Juni.)

Heusler, über den syntaktischen Stil der altisländischen Prosa. (G. S. 11. Juli.)

Burdach, Faust und Moses. Zweiter Theil. (G. S. 11. Juli; *S. B.*)

Burdach, Faust und Moses. Dritter Theil. (G. S. 25. Juli; *S. B.*)

K. Meyer, zur keltischen Wortkunde. I. (G. S. 25. Juli; *S. B.*)

Morf, vom Ursprung der provenzalischen Schriftsprache. (Cl. 14. Nov.; *S. B.*)

K. Meyer, zur keltischen Wortkunde. II. (Cl. 12. Dec.; *S. B.*)

Classische Philologie.

Diels, über die handschriftliche Überlieferung des Galen'schen Commentars zum Prorrheticon des Hippokrates. (Cl. 11. Jan.; *Abh.*)

von Wilamowitz-Moellendorff, Mimnermos und Properz. (Cl. 1. Febr.; *S. B.*)

von Wilamowitz-Moellendorff, über das Symposion des Platon. (Cl. 18. April.)

Robert, zu den Epitrepontes des Menander. (Cl. 2. Mai; *S. B.*)

von Wilamowitz-Moellendorff, Neues von Kallimachos. (Cl. 23. Mai; *S. B.* 13. Juni.)

Bidez, Prof. J., la tradition manuscrite du Lexique de Suidas. Vorgelegt von Diels. (Cl. 18. Juli; *S. B.* 25. Juli.)

Mewaldt, Prof. J., die Editio princeps von Galenos In Hippocratis de natura hominis. Vorgelegt von Diels. (Cl. 17. Oct.; *S. B.*)

von Wilamowitz-Moellendorff und Dr. **G. Plaumann**, Iliaspapyrus P. Morgan. (G. S. 5. Dec.; *S. B.* 19. Dec.)

Orientalische Philologie.

Lidzbarski, Prof. M., phönicische und aramäische Krugaufschriften aus Elephantine. Vorgelegt von E. Meyer. (G. S. 18. Jan.; *Abh.*)

Bang, Prof. W., über die Räthsel des Codex Cumanicus. Vorgelegt von Müller. (Cl. 29. Febr.; *S. B.* 18. April.)

Frank, Dr. C., zur Entzifferung der altelamischen Inschriften. Vorgelegt von E. Meyer. (G. S. 7. März; *Abh.*)

Müller, ein Doppelblatt aus einem manichäischen Hymnenbuch (mahṛnâmag). (Cl. 14. März; *Abh.*)

Marquart, Prof. J., Ǧuwainī's Bericht über die Bekehrung der Uiguren. Vorgelegt von Müller. (Cl. 14. März; *S. B.* 23. Mai.)

Schulthefs, Prof. F., Zurufe an Thiere im Arabischen. Vorgelegt von Sachau. (G. S. 25. April; *Abh.*)

Erman, zur aegyptischen Wortforschung. II. (Cl. 27. Juni; *S. B.* 17. Oct.)

Erman, zur aegyptischen Wortforschung. III. (Cl. 18. Juli; *S. B.* 17. Oct.)

Lüders, epigraphische Beiträge. I. II. (Cl. 18. Juli; *S. B.* 25. Juli.)

Jacobi, über die Echtheit des Kauṭilīya. (Cl. 18. Juli; *S. B.* 25. Juli.)

Lüders, über den Udānavarga. (Cl. 31. Oct.)

Rahlfs, Prof. A., griechische Wörter im Koptischen. Vorgelegt von W. Schulze. (Cl. 31. Oct.; *S. B.* 14. Nov.)

Konow, Prof. St., zwei Handschriftenblätter in der alten arischen Literatursprache aus Chinesisch-Turkistan. Vorgelegt von Lüders. (Cl. 31. Oct.; *S. B.* 28. Nov.)

Lüders, die S'akas und die »nordarische« Sprache. (Cl. 28. Nov.)

de Groot, über sinologische Seminare und Bibliotheken. (G. S. 19. Dec.)

Amerikanistik.

Seler, die Parallelen in den Maya-Handschriften. (G. S. 24. Oct.)

Bericht über den Erfolg der Preisausschreibungen für 1912 und neue Preisausschreibungen.

Preis aus der Diez-Stiftung.

Der Vorstand der Diez-Stiftung hat beschlossen, den aus der Stiftung im laufenden Jahre zu vergebenden Preis im Betrage von 1800 Mark Hrn. Kr. Nyrop, Professor an der Universität Kopenhagen, für seine »Grammaire historique de la langue française« zuzuerkennen.

Preisaufgabe aus dem von Miloszewsky'schen Legat.

Die Akademie stellt die folgende Preisaufgabe aus dem von Hrn. von Miloszewsky gestifteten Legat für philosophische Preisfragen:

»Es wird eine Geschichte des theoretischen Causalproblems seit Hobbes und Descartes gewünscht. Die Untersuchung soll durchweg um die metaphysisch-erkenntnifstheoretischen, psychologischen und logischen Causalprobleme (Gesetz der Causalität, des zureichenden Grundes, Induction und Analogie) concentrirt sein, die ethischen und religiösen Causalprobleme also nur so weit heranziehen, als das historische Verständnifs der Entwicklungsbedingungen der theoretischen Probleme dies fordert.

Die Untersuchung kann mit den Lehrmeinungen John Stuart Mill's abgeschlossen werden. Wünschenswerth ist jedoch eine quellenmäfsige Schlufsübersicht, die bis zu den Deutungen von Lotze, Fechner, Sigwart, Helmholtz, Kirchhoff geführt ist.

Eine Darstellung der Causaltheorien gegenwärtig lebender Forscher ist ausgeschlossen.«

Der ausgesetzte Preis beträgt Viertausend Mark.

Die Bewerbungsschriften können in deutscher, lateinischer, französischer, englischer oder italienischer Sprache abgefafst sein. Schriften, die in störender Weise unleserlich geschrieben sind, können durch Beschlufs der zuständigen Classe von der Bewerbung ausgeschlossen werden.

Jede Bewerbungsschrift ist mit einem Spruchwort zu bezeichnen, und dieses auf einem beizufügenden versiegelten, innerlich den Namen und die Adresse des Verfassers angebenden Zettel äufserlich zu wiederholen. Schriften, welche den Namen des Verfassers nennen oder deutlich ergeben, werden von der Bewerbung ausgeschlossen. Zurückziehung einer eingelieferten Preisschrift ist nicht gestattet.

Die Bewerbungsschriften sind bis zum 31. December 1914 im Bureau der Akademie, Berlin W 35, Potsdamer Strafse 120, einzuliefern. Die Verkündigung des Urtheils erfolgt in der Leibniz-Sitzung des Jahres 1915.

Sämmtliche bei der Akademie zum Behuf der Preisbewerbung eingegangene Arbeiten nebst den dazu gehörigen Zetteln werden ein Jahr lang von dem Tage der Urtheilsverkündigung ab von der Akademie für die Verfasser aufbewahrt. Nach Ablauf der bezeichneten Frist steht es der Akademie frei, die nicht abgeforderten Schriften und Zettel zu vernichten.

Statut der Eduard Hitzig-Stiftung.

Vom 24. Januar 1912.

I. Stiftungsact, Zweck und Name der Stiftung.

Die Witwe des weiland Professors der Psychiatrie an der Universität Halle a. S., Geheimen Medicinalraths Dr. Eduard Hitzig, hat der Königlich Preuſsischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin im Sinne ihres verstorbenen Mannes die Summe von Fünfundachtzigtausend Mark zur Begründung einer Stiftung übergeben.

Die Stiftung hat den Zweck, zur Erinnerung an die Arbeiten des Geheimen Medicinalraths Professors Dr. Eduard Hitzig zu Halle a. S. wissenschaftliche Arbeiten auf dem Gebiete der Functionslehre des Gehirns zu belohnen und zu solchen anzuregen. Sie führt den Namen »Eduard Hitzig-Stiftung«.

II. Wirksamkeit der Stiftung.

1. Zur Erreichung des Zwecks der Stiftung soll ein alljährlich am 6. Februar — dem Geburtstage Eduard Hitzig's — zu vertheilender Preis von 3000 Mark, in Worten: Dreitausend Mark, ausgesetzt werden.

2. Der Preis kann verliehen werden für solche wissenschaftliche, in den letzt voraufgegangenen fünf Jahren veröffentlichte Arbeiten, welche die Kenntniſs von den Verrichtungen des Gehirns nach Ansicht der physikalisch-mathematischen Classe der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin wesentlich zu fördern geeignet sind.

3. Als solche Arbeiten sollen angesehen werden physiologische und pathologische Untersuchungen, unter diesen auch experimentell-pathologische Untersuchungen; anatomische Untersuchungen dagegen in der Regel nicht, und jedenfalls nur dann, wenn sie unmittelbar die Kenntniſs der Verrichtungen des Gehirns erweitern. Speculative (psychologische und sonstige philosophische) Untersuchungen sind ausgeschlossen.

4. Auch soll es der physikalisch-mathematischen Classe der Akademie freistehen, Aufgaben in dem in § 3 umschriebenen Gebiete, anatomische jedoch ausgeschlossen, zu stellen und die beste der daraufhin eingehenden

Bearbeitungen mit dem Preise zu krönen. Insofern dies geschieht, würden die verschiedenen Fragen, welche sich aus der örtlichen Beziehung der Motilität zur Sensibilität innerhalb des Gehirns ergeben, der Absicht der Stiftung vorerst am meisten entsprechen.

Der Verfasser der gekrönten Arbeit soll verpflichtet sein, diese drucken zu lassen und sie als gekrönte Preisschrift, sowie auch die Herkunft des Preises aus der Eduard Hitzig-Stiftung nach einer von der physikalisch-mathematischen Classe der Akademie ein für allemal festzusetzenden Formel kenntlich zu machen.

5. Die Hergabe von Geldmitteln aus den Zinsen der Stiftung zur Fortführung angefangener Arbeiten soll nur dann gestattet sein, wenn

a) solche Arbeiten, welche nach 2, 3 und 4 zu krönen wären, nicht vorliegen oder wenn die etwa aufserdem verfügbaren Mittel der Stiftung dazu ausreichen;

b) die Akademie sich gleichzeitig aus früher bereits veröffentlichten Arbeiten des Bewerbers, sowie aus den von ihm zu gebenden Darlegungen über den Stand einer unternommenen Arbeit die Überzeugung verschaffen kann, dafs die zu gewährende Unterstützung thatsächlich zur Herstellung einer den Zwecken der Stiftung entsprechenden Arbeit führen wird;

c) die herzugebenden Geldmittel direct für die Zwecke der Arbeit (Beschaffung von kostbaren Versuchsthieren oder von Instrumenten, Ausstattung der Publication usw.) verwendet werden sollen und von dem Verfasser aus eigenen Mitteln nicht oder nur schwer bestritten werden können.

6. Die Verleihung des Preises darf von Nationalität, Stand, Religion, Geschlecht oder Bedürftigkeit nicht abhängig gemacht werden. Dagegen mufs die zu krönende Arbeit selbständig angefertigt sein, und darf sie, falls es sich um Aufgaben handelt, die die physikalisch-mathematische Classe selbst gestellt hat, von einem ordentlichen Mitgliede der Akademie selbst weder direct noch indirect herrühren, also weder von einem solchen privatim inspirirt noch unter seiner Leitung experimentell oder litterarisch bearbeitet sein. Bei Arbeiten, welche die Akademie nicht selbst angeregt hat, ist dagegen im Allgemeinen eine litterarische oder durch Rath ertheilte Beihülfe eines Akademikers zulässig. Der Preis soll bis zum Jahre 1915 an solche Personen, welche das sechzigste Lebensjahr überschritten haben, nicht verliehen werden.

III. Mittel der Stiftung.

1. Die Stiftungssumme beträgt 85000 Mark — in Worten: Fünfundachtzigtausend Mark — in baar. Diese Summe ist abzüglich der Schenkungssteuer von der Königlich Preufsischen Akademie der Wissenschaften den geltenden allgemeinen Bestimmungen entsprechend anzulegen.

Die Zinsen sind nach Inkrafttreten der Stiftung so lange zu capitalisiren, bis das Gesammtcapital eine solche Höhe erreicht hat, dafs die Zinsen, nach Abzug der Verwaltungskosten, zur jährlichen Verleihung von 3000 Mark an den Verfasser der preisgekrönten Arbeit ausreichen.

Sollten die Zinsen nach Inkrafttreten der Stiftung aus irgend welchen Gründen unter den Jahresbetrag von 3000 Mark, zuzüglich der Verwaltungskosten, heruntergehen, so ist wiederum das Zinsaufkommen so lange dem Capital zuzuschlagen, bis dasselbe wieder 3000 Mark Jahreszinsen und die Verwaltungskosten abwirft. Bis zu ihrem Ableben behält sich die Stifterin den Genufs der Zinsen abzüglich der jährlichen Verwaltungskosten vor.

2. Sofern die Akademie in einem Jahre keine Arbeit als würdig für die Krönung mit dem Preise erachtet, soll sie befugt sein, nach ihrer Wahl entweder den Preis für das nächste Jahr zu verdoppeln, oder in diesem nächsten Jahre zwei Preise auszusetzen, oder die ersparten Zinsen zum Capital zu schlagen.

3. Wenn die Akademie zwei Jahre hinter einander keine Arbeit als würdig für die Krönung erachtet hat und das Gleiche auch in dem darauf folgenden dritten Jahre zutrifft, soll sie befugt sein, in diesem dritten Jahre unter den vorstehend näher bezeichneten Bedingungen und Voraussetzungen eine physiologische oder pathologische Arbeit, welche andere Gebiete des Nervensystems als das Gehirn betrifft, indessen nur mit dem einfachen Preise, zu krönen.

IV. Schlufsbestimmungen.

Es bleibt der Akademie überlassen, in welchen Zwischenräumen und Formen sie zur Bewerbung um den Preis auffordern will.

Dagegen soll sie an die zur Bewerbung eingereichten Arbeiten mit ihrer Entscheidung keineswegs gebunden sein, vielmehr soll es ihr freistehen, auch solche Arbeiten, deren Verfasser sich nicht um den Preis beworben haben, zu krönen.

Verzeichniſs der im Jahre 1912 erfolgten besonderen Geldbewilligungen aus akademischen Mitteln zur Ausführung wissenschaftlicher Unternehmungen.

Es wurden im Laufe des Jahres 1912 bewilligt:

2300	Mark	dem Mitglied der Akademie Hrn. Engler zur Fortführung der Herausgabe des »Pflanzenreich«.
4000	»	dem Mitglied der Akademie Hrn. F. E. Schulze zur Fortführung des Unternehmens »Das Tierreich«.
12000	»	Demselben zur Fortführung der Arbeiten für den Nomenclator animalium generum et subgenerum.
6000	»	dem Mitglied der Akademie Hrn. Koser zur Fortführung der Herausgabe der Politischen Correspondenz Friedrich's des Groſsen.
5000	»	dem Mitglied der Akademie Hrn. von Wilamowitz-Moellendorff zur Fortführung der Sammlung der griechischen Inschriften.
8000	»	der Deutschen Commission der Akademie zur Fortführung ihrer Unternehmungen.
800	»	für eine im Verein mit anderen deutschen Akademien geplante Fortsetzung des Poggendorff'schen biographisch-literarischen Lexikons.
1000	»	zur Förderung des Unternehmens des Thesaurus linguae Latinae über den etatsmäſsigen Beitrag von 5000 Mark hinaus.
1500	»	zur Bearbeitung der hieroglyphischen Inschriften der griechisch-römischen Epoche für das Wörterbuch der aegyptischen Sprache.
500	»	zu der von den cartellirten deutschen Akademien unternommenen Herausgabe der mittelalterlichen Bibliothekskataloge.
10000	»	dem Mitglied der Akademie Hrn. Schäfer zur Fortführung der Veröffentlichung der Sundzolllisten.
2500	»	dem Mitglied der Akademie Hrn. Stumpf zur Weiterführung des von ihm begründeten Phonogramm-Archivs.
300	»	zur Veröffentlichung des Briefwechsels zwischen Bessel und Steinheil.

2000	Mark	Hrn. Privatdocenten Dr. Arnold Eucken in Berlin zur Ausführung einer Experimental-Untersuchung über die specifische Wärme von Gasen.
1200	»	Hrn. Prof. Dr. Gustav Fritsch in Berlin zur Herausgabe eines Werkes über das Haupthaar und seine Bildungsstätte bei den verschiedenen Rassen des Menschen.
800	»	Hrn. Prof. Dr. Martin Heidenhain in Tübingen zur Fortsetzung seiner Untersuchungen zur allgemeinen Anatomie, insbesondere über die Theilkörpertheorie.
1500	»	Hrn. Prof. Dr. Ejnar Hertzsprung in Potsdam zu einer Reise nach Nordamerika behuſs Arbeiten auf dem Solar Observatory der Carnegie Institution.
800	»	Frau Dr. Fanny Hoppe-Moser in Berlin zur Fortführung ihrer Studien über Siphonophoren.
600	»	Hrn. Dr. Otto Kalischer in Berlin zur Fortsetzung seiner Versuche betreffend die Hirnfunction.
90	»	Hrn. Hauptmann W. Kranz in Swinemünde zur Drucklegung einer Karte des Tertiärs im Vicentin.
400	»	Hrn. Prof. Dr. Richard Lepsius in Darmstadt zur Abteufung eines Schachtes durch die Höttinger Breccie zwecks Feststellungen über die Eiszeit der Alpen.
800	»	Hrn. Prof. Dr. Willy Marckwald in Berlin zu Untersuchungen über das Verhältniſs von Radium zu Uran.
300	»	Hrn. Dr. Paul Viktor Neugebauer in Berlin zur Fortführung seiner Hülfstafeln zur astronomischen Chronologie.
800	»	Hrn. Privatdocenten Dr. Robert Pohl in Berlin zur Fortsetzung seiner lichtelektrischen Versuche.
1000	»	Hrn. Dr. Paul Röthig in Berlin zur Fortsetzung seiner Untersuchungen über die vergleichende mikroskopische Anatomie des Centralnervensystems der Wirbelthiere.
1600	»	Hrn. Privatdocenten Dr. Alfred Wegener in Marburg als Zuschuſs zu den Kosten einer Expedition nach Grönland.
1000	»	Hrn. Dr. Hugo Weigold auf Helgoland zur Ausführung einer ornithologischen Untersuchungsreise nach Portugal und Spanien.
725	»	für Vol. II, sectio 2, fasc. 1 des Corpus inscriptionum Etruscarum.

1000 Mark	dem Museum für Völkerkunde in Lübeck zur Veröffentlichung eines Werkes über die Pangwe-Neger.
1000 »	Hrn. Prof. Dr. Otto Hötzsch in Posen zu Reisen im Interesse der von ihm geplanten Herausgabe der Correspondenz des Botschafters Baron Peter Meyendorff.
600 »	Hrn. Prof. Dr. Arnold Oskar Meyer in Rostock zu einer Reise nach England behufs Studien für die Fortsetzung seines Werkes »England und die katholische Kirche unter Elisabeth und den Stuarts«.
400 »	Hrn. Prof. Dr. Arthur Ungnad in Jena zur Collationirung der im Britischen Museum aufbewahrten altbabylonischen Briefliteratur.

Verzeichniſs der im Jahre 1912 erschienenen im Auftrage oder mit Unterstützung der Akademie bearbeiteten oder herausgegebenen Werke.

Das Pflanzenreich. Regni vegetabilis conspectus. Im Auftrage der Königl. preuſs. Akademie der Wissenschaften hrsg. von A. Engler. Heft 52—57. Leipzig 1912.

Das Tierreich. Eine Zusammenstellung und Kennzeichnung der rezenten Tierformen. Begründet von der Deutschen Zoologischen Gesellschaft. Im Auftrage der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften zu Berlin hrsg. von Franz Eilhard Schulze. Lief. 30—34. Berlin 1912.

Acta Borussica. Denkmäler der Preußischen Staatsverwaltung im 18. Jahrhundert. Hrsg. von der Königlichen Akademie der Wissenschaften. Behördenorganisation und allgemeine Staatsverwaltung. Bd. 5, Hälfte 2. Berlin 1912.

Politische Correspondenz Friedrich's des Groſsen. Bd. 35. Weimar 1912.

Wilhelm von Humboldts Gesammelte Schriften. Hrsg. von der Königlich Preuſsischen Akademie der Wissenschaften. Bd. 9. Berlin 1912.

Ibn Saad. Biographien Muhammeds, seiner Gefährten und der späteren Träger des Islams bis zum Jahre 230 der Flucht. Im Auftrage der Königlich Preuſsischen Akademie der Wissenschaften hrsg. von Eduard Sachau. Bd. 2, Th. 2. Leiden 1912.

Inscriptiones Graecae consilio et auctoritate Academiae Litterarum Regiae Borussicae editae. Vol. 11, Fasc. 2. Inscriptiones Deli consilio et auctoritate Academiae Inscriptionum et humaniorum Litterarum Francogallicae editae. Fasc. 2. Ed. Felix Dürrbach. Berolini 1912.

Kant's gesammelte Schriften. Hrsg. von der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften. Bd. 2 (Neudruck). Bd. 8. Berlin 1912.

Die antiken Münzen Nord-Griechenlands, unter Leitung von F. Imhoof-Blumer hrsg. von der Kgl. Akademie der Wissenschaften. Bd. 2. Thrakien, bearb. von Friedrich Münzer und Max L. Strack. Tl. 1, Heft 1. Berlin 1912.

Deutsche Texte des Mittelalters hrsg. von der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften. Bd. 23. Konrads von Megenberg Deutsche Sphaera. Berlin 1912.

Burdach, Konrad. Vom Mittelalter zur Reformation. Forschungen zur Geschichte der deutschen Bildung. Bd. 2, Tl. 3. 4. Berlin 1912.

Thesaurus linguae Latinae editus auctoritate et consilio Academiarum quinque Germanicarum Berolinensis Gottingensis Lipsiensis Monacensis Vindobonensis. Vol. 3, Fasc. 9. Vol. 5, Fasc. 4. Supplementum: Nomina propria Latina. Fasc. 3. Lipsiae 1912.

Ergebnisse der Plankton-Expedition der Humboldt-Stiftung. Bd. 2. Fa: Pfeffer, Georg. Die Cephalopoden. Nebst Atlas. Gf: Die Copepoden. 1. Dahl, Maria. Die Corycaeinen. Kiel und Leipzig 1912.

Schultze, Leonhard. Zoologische und anthropologische Ergebnisse einer Forschungsreise im westlichen und zentralen Südafrika ausgeführt in den Jahren 1903—1905. Bd. 5, Lief. 1. Jena 1912. (Denkschriften der Medicinisch-Naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Jena. Bd. 17.)

Volz, Wilhelm. Nord-Sumatra. Bericht über eine im Auftrage der Humboldt-Stiftung der Königlich Preufsischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin in den Jahren 1904—1906 ausgeführte Forschungsreise. Bd. 2. Berlin 1912.

Delbrück, Richard. Hellenistische Bauten in Latium. Hrsg. mit Beihilfe des Eduard Gerhardstipendiums der Königlich Preufsischen Akademie der Wissenschaften. II. Strafsburg 1912.

Lauterbach, C. Beiträge zur Flora von Papuasien. Botanische Ergebnisse der mit Hilfe der Hermann und Elise geb. Heckmann Wentzel-Stiftung ausgeführten Forschungen in Papuasien. Serie I. Leipzig 1912.

Philippson, Alfred. Topographische Karte des westlichen Kleinasien. Lief. 2. Gotha 1912.

Ascherson, Paul, und Graebner, Paul. Synopsis der mitteleuropäischen Flora. Lief. 75. 76. 2. Aufl. Lief. 1. 2. Leipzig 1912.

Berlet, Otto. Karten: Die Pergamenische Landschaft und Pergamon und Umgebung in: Altertümer von Pergamon. Bd. 1, Hälfte 1. Berlin 1912.

Corpus inscriptionum Etruscarum ed. Carolus Pauli. Vol. 2. Ed. Olavus Augustus Danielsson et Gustavus Herbig. Sectio 2, Fasc. 1. Lipsiae 1912.

Leonhardi Euleri opera omnia. Sub auspiciis Societatis Scientiarum naturalium Helveticae edenda cur. Ferdinand Rudio, Adolf Krazer, Paul Stäckel. Ser. I: Vol. 20. Ser. II: Vol. 1. 2. Ser. III: Vol. 4. Lipsiae et Berolini 1912.

Fritsch, Gustav. Das Haupthaar und seine Bildungsstätte bei den Rassen des Menschen. Berlin 1912.

Hoffmann, M. K. Lexikon der anorganischen Verbindungen. Bd. 2, Lief. 1. 2. Leipzig 1912.

Kranz, W. Karte des Tertiärs im Vicentin. 1912.

Landolt-Börnstein, Physikalisch-chemische Tabellen. 4. Aufl. . . . hrsg. von Richard Börnstein und Walther A. Roth. Berlin 1912.

Neugebauer, Paul V. Sterntafeln von 4000 vor Chr. bis zur Gegenwart. Leipzig 1912. (Tafeln zur astronomischen Chronologie. I.)

Pomtow, H. Delphica III. Bericht über die Ergebnisse einer dritten Reise nach Delphi. Tl. 1—3. Leipzig 1912. Sep.-Abdr.

Freiherr v. Richthofen, Ferdinand. China. Ergebnisse eigener Reisen und darauf gegründeter Studien. Bd. 3. Hrsg. von Ernst Tiefsen. Nebst: Atlas von China. Abth. 2. Bearb. von M. Groll. Berlin 1912.

Schrammen, A. Die Kieselspongien der oberen Kreide von Nordwestdeutschland. Stuttgart 1910—12.

Tables annuelles de constantes et données numériques de chimie, de physique et de technologie. Vol. 1. 1910. Paris 1912.

Walther, Johannes. Das Gesetz der Wüstenbildung in Gegenwart und Vorzeit. 2. Aufl. Leipzig 1912.

Veränderungen im Personalstande der Akademie im Laufe des Jahres 1912.

Es wurden gewählt:

zu ordentlichen Mitgliedern der physikalisch-mathematischen Classe:

Hr. Karl Schwarzschild, bestätigt durch K. Cabinetsordre vom 14. Juni 1912,
» Ernst Beckmann, bestätigt durch K. Cabinetsordre vom 11. December 1912;

zu ordentlichen Mitgliedern der philosophisch-historischen Classe:

Hr. Emil Seckel
» Johann Jakob Maria de Groot } bestätigt durch K. Cabinetsordre vom 4. Januar 1912,
» Eduard Norden, bestätigt durch K. Cabinetsordre vom 14. Juni 1912,
» Karl Schuchhardt, bestätigt durch K. Cabinetsordre vom 9. Juli 1912;

zum auswärtigen Mitglied der philosophisch-historischen Classe:

Hr. Hugo Schuchardt in Graz, bestätigt durch K. Cabinetsordre vom 15. September 1912;

zum correspondirenden Mitglied der physikalisch-mathematischen Classe:

Hr. Emil Wiechert in Göttingen am 8. Februar 1912;

zu correspondirenden Mitgliedern der philosophisch-historischen Classe:

Hr. Harry Bresslau in Strafsburg am 9. Mai 1912,
» Edward Schröder in Göttingen am 11. Juli 1912,
» Ernst Troeltsch in Heidelberg am 21. November 1912.

Der beständige Secretar Hr. von Auwers legte dieses Amt mit dem 30. Juni 1912 nieder; zu seinem Nachfolger wählte die physikalisch-mathematische Classe Hrn. Planck, dessen Wahl durch K. Cabinetsordre vom 19. Juni 1912 bestätigt wurde.

Das ordentliche Mitglied der philosophisch-historischen Classe Hr. **Heinrich Wölfflin** verlegte am 1. April 1912 seinen Wohnsitz nach München und trat damit gemäſs § 6 der Statuten der Akademie in die Reihe der Ehrenmitglieder über.

Gestorben sind:

das ordentliche Mitglied der physikalisch-mathematischen Classe:
Hr. **Hermann Munk** am 1. October 1912;

das Ehrenmitglied:

Rochus Frhr. von Liliencron in Coblenz am 5. März 1912;

die correspondirenden Mitglieder der physikalisch-mathematischen Classe:

Hr. **August Toepler** in Dresden am 6. März 1912,
» **Eduard Strasburger** in Bonn am 18./19. Mai 1912,
» **Ferdinand Zirkel** in Bonn am 11. Juni 1912,
» **Henri Poincaré** in Paris am 17. Juli 1912,
» **Lewis Boss** in Albany, N. Y. am 5. October 1912,
Sir **George Howard Darwin** in Cambridge am 7. December 1912,
Hr. **Paul Gordan** in Erlangen am 21. December 1912;

die correspondirenden Mitglieder der philosophisch-historischen Classe:

Hr. **Heinrich Nissen** in Bonn am 29. Februar 1912,
» **Gabriel Monod** in Versailles am 10. April 1912,
» **Henry Sweet** in Oxford am 30. April 1912,
» **Theodor Gomperz** in Wien am 29. August 1912,
» **Karl Justi** in Bonn am 9. December 1912.

Verzeichniſs der Mitglieder der Akademie am Schlusse des Jahres 1912

nebst den Verzeichnissen der Inhaber der Helmholtz- und der Leibniz-Medaille und der Beamten der Akademie.

I. Beständige Secretare.

	Gewählt von der	Datum der Königlichen Bestätigung
Hr. *Diels*	phil.-hist. Classe	1895 Nov. 27.
- *Waldeyer*	phys.-math. -	1896 Jan. 20.
- *Roethe*	phil.-hist. -	1911 Aug. 29.
- *Planck*	phys.-math. -	1912 Juni 19.

II. Ordentliche Mitglieder.

Physikalisch-mathematische Classe	Philosophisch-historische Classe	Datum der Königlichen Bestätigung
Hr. *Arthur von Auwers*		1866 Aug. 18.
	Hr. *Alexander Conze*	1877 April 23.
- *Simon Schwendener*		1879 Juli 13.
	- *Hermann Diels*	1881 Aug. 15.
- *Wilhelm Waldeyer*		1884 Febr. 18.
	- *Heinrich Brunner*	1884 April 9.
- *Franz Eilhard Schulze*		1884 Juni 21.
	- *Otto Hirschfeld*	1885 März 9.
	- *Eduard Sachau*	1887 Jan. 24.
	- *Gustav von Schmoller*	1887 Jan. 24.
- *Adolf Engler*		1890 Jan. 29.
	- *Adolf Harnack*	1890 Febr. 10.
- *Hermann Amandus Schwarz*		1892 Dec. 19.
- *Georg Frobenius*		1893 Jan. 14.
- *Emil Fischer*		1893 Febr. 6.
- *Oskar Hertwig*		1893 April 17.
- *Max Planck*		1894 Juni 11.
	- *Karl Stumpf*	1895 Febr. 18.
	- *Erich Schmidt*	1895 Febr. 18.
	- *Adolf Erman*	1895 Febr. 18.
- *Emil Warburg*		1895 Aug. 13.
	- *Reinhold Koser*	1896 Juli 12.
	- *Max Lenz*	1896 Dec. 14.

Physikalisch-mathematische Classe	Philosophisch-historische Classe	Datum der Königlichen Bestätigung
	Hr. *Ulrich von Wilamowitz-Moellendorff*	1899 Aug. 2.
Hr. *Wilhelm Branca*		1899 Dec. 18.
- *Robert Helmert*		1900 Jan. 31.
- *Heinrich Müller-Breslau*		1901 Jan. 14.
	- *Heinrich Dressel*	1902 Mai 9.
	- *Konrad Burdach*	1902 Mai 9.
- *Friedrich Schottky*		1903 Jan. 5.
	- *Gustav Roethe*	1903 Jan. 5.
	- *Dietrich Schäfer*	1903 Aug. 4.
	- *Eduard Meyer*	1903 Aug. 4.
	- *Wilhelm Schulze*	1903 Nov. 16.
	- *Alois Brandl*	1904 April 3.
- *Hermann Struve*		1904 Aug. 29.
- *Hermann Zimmermann*		1904 Aug. 29.
- *Adolf Martens*		1904 Aug. 29.
- *Walther Nernst*		1905 Nov. 24.
- *Max Rubner*		1906 Dec. 2.
- *Johannes Orth*		1906 Dec. 2.
- *Albrecht Penck*		1906 Dec. 2.
	- *Friedrich Müller*	1906 Dec. 24.
	- *Andreas Heusler*	1907 Aug. 8.
- *Heinrich Rubens*		1907 Aug. 8.
- *Theodor Liebisch*		1908 Aug. 3.
	- *Eduard Seler*	1908 Aug. 24.
	- *Heinrich Lüders*	1909 Aug. 5.
	- *Heinrich Morf*	1910 Dec. 14.
- *Gottlieb Haberlandt*		1911 Juli 3.
	- *Kuno Meyer*	1911 Juli 3.
	- *Benno Erdmann*	1911 Juli 25.
- *Gustav Hellmann*		1911 Dec. 2.
	- *Emil Seckel*	1912 Jan. 4.
	- *Johann Jakob Maria de Groot*	1912 Jan. 4.
	- *Eduard Norden*	1912 Juni 14.
- *Karl Schwarzschild*		1912 Juni 14.
	- *Karl Schuchhardt*	1912 Juli 9.
- *Ernst Beckmann*		1912 Dec. 11.

III. Auswärtige Mitglieder.

Physikalisch-mathematische Classe	Philosophisch-historische Classe	Datum der Königlichen Bestätigung
	Hr. *Theodor Nöldeke* in Straſsburg	1900 März 5.
	- *Friedrich Imhoof-Blumer* in Winterthur	1900 März 5.
	- *Pasquale Villari* in Florenz	1900 März 5.
Hr. *Wilhelm Hittorf* in Münster i. W.		1900 März 5.
- *Eduard Suess* in Wien		1900 März 5.
- *Adolf von Baeyer* in München		1905 Aug. 12.
	- *Vatroslav von Jagić* in Wien	1908 Sept. 25.
	- *Panagiotis Kabbadias* in Athen	1908 Sept. 25.
Lord *Rayleigh* in Witham, Essex		1910 April 6.
	- *Hugo Schuchardt* in Graz	1912 Sept. 15.

IV. Ehrenmitglieder.

	Datum der Königlichen Bestätigung
Earl *of Crawford and Balcarres* in Haigh Hall, Wigan	1883 Juli 30.
Hr. *Max Lehmann* in Göttingen	1887 Jan. 24.
Hugo Graf *von und zu Lerchenfeld* in Berlin	1900 März 5.
Hr. *Richard Schöne* in Berlin-Grunewald	1900 März 5.
Frau *Elise Wentzel* geb. *Heckmann* in Berlin	1900 März 5.
Hr. *Konrad von Studt* in Hannover	1900 März 17.
- *Andrew Dickson White* in Ithaca, N. Y.	1900 Dec. 12.
Bernhard Fürst *von Bülow* in Rom	1910 Jan. 31.
Hr. *Heinrich Wölfflin* in München	1910 Dec. 14.

V. Correspondirende Mitglieder.

Physikalisch-mathematische Classe.

	Datum der Wahl
Hr. *Ernst Wilhelm Benecke* in Strafsburg	1900 Febr. 8.
- *Oskar Brefeld* in Berlin-Lichterfelde	1899 Jan. 19.
- *Heinrich Bruns* in Leipzig	1906 Jan. 11.
- *Otto Bütschli* in Heidelberg	1897 März 11.
- *Karl Chun* in Leipzig	1900 Jan. 18.
- *Giacomo Ciamician* in Bologna	1909 Oct. 28.
- *Gaston Darboux* in Paris	1897 Febr. 11.
- *William Morris Davis* in Cambridge, Mass.	1910 Juli 28.
- *Richard Dedekind* in Braunschweig	1880 März 11.
- *Nils Christofer Dunér* in Uppsala	1900 Febr. 22.
- *Ernst Ehlers* in Göttingen	1897 Jan. 21.
Roland Baron *Eötvös* in Budapest	1910 Jan. 6.
Hr. *Max Fürbringer* in Heidelberg	1900 Febr. 22.
Sir *Archibald Geikie* in Haslemere, Surrey	1889 Febr. 21.
- *David Gill* in London	1890 Juni 5.
Hr. *Camillo Golgi* in Pavia	1911 Dec. 21.
- *Karl Graebe* in Frankfurt a. M.	1907 Juni 13.
- *Ludwig von Graff* in Graz	1900 Febr. 8.
- *Julius von Hann* in Wien	1889 Febr. 21.
- *Viktor Hensen* in Kiel	1898 Febr. 24.
- *Richard von Hertwig* in München	1898 April 28.
Sir *Victor Horsley* in London	1910 Juli 28.
Hr. *Adolf von Koenen* in Göttingen	1904 Mai 5.
- *Leo Koenigsberger* in Heidelberg	1893 Mai 4.
- *Wilhelm Körner* in Mailand	1909 Jan. 7.
- *Friedrich Küstner* in Bonn	1910 Oct. 27.
- *Henry Le Chatelier* in Paris	1905 Dec. 14.
- *Philipp Lenard* in Heidelberg	1909 Jan. 21.
- *Gabriel Lippmann* in Paris	1900 Febr. 22.
- *Hendrik Antoon Lorentz* in Haarlem	1905 Mai 4.
- *Hubert Ludwig* in Bonn	1898 Juli 14.
- *Felix Marchand* in Leipzig	1910 Juli 28.
- *Friedrich Merkel* in Göttingen	1910 Juli 28.

	Datum der Wahl
Hr. *Franz Mertens* in Wien	1900 Febr. 22.
- *Henrik Mohn* in Christiania	1900 Febr. 22.
- *Alfred Gabriel Nathorst* in Stockholm	1900 Febr. 8.
- *Karl Neumann* in Leipzig	1893 Mai 4.
- *Max Noether* in Erlangen	1896 Jan. 30.
- *Wilhelm Ostwald* in Groſs-Bothen, Kgr. Sachsen	1905 Jan. 12.
- *Wilhelm Pfeffer* in Leipzig	1889 Dec. 19.
- *Émile Picard* in Paris	1898 Febr. 24.
- *Edward Charles Pickering* in Cambridge, Mass.	1906 Jan. 11.
- *Georg Quincke* in Heidelberg	1879 März 13.
- *Ludwig Radlkofer* in München	1900 Febr. 8.
Sir *William Ramsay* in London	1896 Oct. 29.
Hr. *Gustaf Retzius* in Stockholm	1893 Juni 1.
- *Theodore William Richards* in Cambridge, Mass.	1909 Oct. 28.
- *Wilhelm Konrad Röntgen* in München	1896 März 12.
- *Heinrich Rosenbusch* in Heidelberg	1887 Oct. 20.
- *Georg Ossian Sars* in Christiania	1898 Febr. 24.
- *Oswald Schmiedeberg* in Straſsburg	1910 Juli 28.
- *Gustav Schwalbe* in Straſsburg	1910 Juli 28.
- *Hugo von Seeliger* in München	1906 Jan. 11.
Hermann Graf *zu Solms-Laubach* in Straſsburg	1899 Juni 8.
Hr. *Johann Wilhelm Spengel* in Gieſsen	1900 Jan. 18.
- *Johannes Strüver* in Rom	1900 Febr. 8.
Sir *Joseph John Thomson* in Cambridge	1910 Juli 28.
Hr. *Gustav von Tschermak* in Wien	1881 März 3.
Sir *William Turner* in Edinburg	1898 März 10.
Hr. *Woldemar Voigt* in Göttingen	1900 März 8.
- *Johannes Diderik van der Waals* in Amsterdam	1900 Febr. 22.
- *Otto Wallach* in Göttingen	1907 Juni 13.
- *Eugenius Warming* in Kopenhagen	1899 Jan. 19.
- *Heinrich Weber* in Straſsburg	1896 Jan. 30.
- *August Weismann* in Freiburg i. Br.	1897 März 11.
- *Emil Wiechert* in Göttingen	1912 Febr. 8.
- *Wilhelm Wien* in Würzburg	1910 Juli 14.
- *Julius von Wiesner* in Wien	1899 Juni 8.

Philosophisch-historische Classe.

	Datum der Wahl
Hr. *Karl von Amira* in München	1900 Jan. 18.
- *Ernst Immanuel Bekker* in Heidelberg	1897 Juli 29.
- *Friedrich von Bezold* in Bonn	1907 Febr. 14.
- *Eugen Bormann* in Wien	1902 Juli 24.
- *Émile Boutroux* in Paris	1908 Febr. 27.
- *James Henry Breasted* in Chicago	1907 Juni 13.
- *Harry Bresslau* in Straſsburg	1912 Mai 9.
- *Ingram Bywater* in London	1887 Nov. 17.
- *René Cagnat* in Paris	1904 Nov. 3.
- *Arthur Chuquet* in Villemomble (Seine)	1907 Febr. 14.
- *Franz Cumont* in Brüssel	1911 April 27.
- *Samuel Rolles Driver* in Oxford	1910 Dec. 8.
- *Louis Duchesne* in Rom	1893 Juli 20.
- *Julius Euting* in Straſsburg	1907 Juni 13.
- *Paul Foucart* in Paris	1884 Juli 17.
- *James George Frazer* in Cambridge	1911 April 27.
- *Wilhelm Fröhner* in Paris	1910 Juni 23.
- *Percy Gardner* in Oxford	1908 Oct. 29.
- *Ignaz Goldziher* in Budapest	1910 Dec. 8.
- *Francis Llewellyn Griffith* in Oxford	1900 Jan. 18.
- *Ignazio Guidi* in Rom	1904 Dec. 15.
- *Georgios N. Hatzidakis* in Athen	1900 Jan. 18.
- *Albert Hauck* in Leipzig	1900 Jan. 18.
- *Bernard Haussoullier* in Paris	1907 Mai 2.
- *Barclay Vincent Head* in London	1908 Oct. 29.
- *Johan Ludvig Heiberg* in Kopenhagen	1896 März 12.
- *Karl Theodor von Heigel* in München	1904 Nov. 3.
- *Antoine Héron de Villefosse* in Paris	1893 Febr. 2.
- *Léon Heuzey* in Paris	1900 Jan. 18.
- *Harald Hjärne* in Uppsala	1909 Febr. 25.
- *Maurice Holleaux* in Paris	1909 Febr. 25.
- *Edvard Holm* in Kopenhagen	1904 Nov. 3.
- *Théophile Homolle* in Athen	1887 Nov. 17.
- *Christian Hülsen* in Florenz	1907 Mai 2.
- *Hermann Jacobi* in Bonn	1911 Febr. 9.
- *Adolf Jülicher* in Marburg	1906 Nov. 1.
- *Frederic George Kenyon* in London	1900 Jan. 18.
- *Georg Friedrich Knapp* in Straſsburg	1893 Dec. 14.
- *Basil Latyschew* in St. Petersburg	1891 Juni 4.

		Datum der Wahl
Hr.	*Friedrich Leo* in Göttingen	1906 Nov. 1.
-	*August Leskien* in Leipzig	1900 Jan. 18.
-	*Friedrich Loofs* in Halle a. S.	1904 Nov. 3.
-	*Giacomo Lumbroso* in Rom	1874 Nov. 12.
-	*Arnold Luschin von Ebengreuth* in Graz	1904 Juli 21.
-	*John Pentland Mahaffy* in Dublin	1900 Jan. 18.
-	*Gaston Maspero* in Paris	1897 Juli 15.
-	*Wilhelm Meyer-Lübke* in Wien	1905 Juli 6.
-	*Ludwig Mitteis* in Leipzig	1905 Febr. 16.
-	*Axel Olrik* in Kopenhagen	1911 April 27.
-	*Georges Perrot* in Paris	1884 Juli 17.
-	*Edmond Pottier* in Paris	1908 Oct. 29.
-	*Franz Praetorius* in Breslau	1910 Dec. 8.
-	*Wilhelm Radloff* in St. Petersburg	1895 Jan. 10.
-	*Pio Rajna* in Florenz	1909 März 11.
-	*Moriz Ritter* in Bonn	1907 Febr. 14.
-	*Karl Robert* in Halle a. S.	1907 Mai 2.
-	*Edward Schröder* in Göttingen	1912 Juli 11.
-	*Richard Schroeder* in Heidelberg	1900 Jan. 18.
-	*Eduard Schwartz* in Freiburg i. Br.	1907 Mai 2.
-	*Émile Senart* in Paris	1900 Jan. 18.
-	*Eduard Sievers* in Leipzig	1900 Jan. 18.
Sir	*Edward Maunde Thompson* in London	1895 Mai 2.
Hr.	*Vilhelm Thomsen* in Kopenhagen	1900 Jan. 18.
-	*Ernst Troeltsch* in Heidelberg	1912 Nov. 21.
-	*Paul Vinogradoff* in Oxford	1911 Juni 22.
-	*Girolamo Vitelli* in Florenz	1897 Juli 15.
-	*Jakob Wackernagel* in Göttingen	1911 Jan. 19.
-	*Julius Wellhausen* in Göttingen	1900 Jan. 18.
-	*Adolf Wilhelm* in Wien	1911 April 27.
-	*Ludvig Wimmer* in Kopenhagen	1891 Juni 4.
-	*Wilhelm Windelband* in Heidelberg	1903 Febr. 5.
-	*Wilhelm Wundt* in Leipzig	1900 Jan. 18.

Inhaber der Helmholtz-Medaille.

Hr. *Santiago Ramón y Cajal* in Madrid (1904).
- *Emil Fischer* in Berlin (1908).

Verstorbene Inhaber:

Emil du Bois-Reymond (Berlin, 1892, † 1896).
Karl Weierstraſs (Berlin, 1892, † 1897).
Robert Bunsen (Heidelberg, 1892, † 1899).
Lord *Kelvin* (Netherhall, Largs, 1892, † 1907).
Rudolf Virchow (Berlin, 1898, † 1902).
Sir *George Gabriel Stokes* (Cambridge, 1900, † 1903).
Henri Becquerel (Paris, 1906, † 1908).
Jakob Heinrich van't Hoff (Berlin, 1910, † 1911).

Inhaber der Leibniz-Medaille.

a. Der Medaille in Gold.

Hr. *James Simon* in Berlin (1907).
- *Ernest Solvay* in Brüssel (1909).
- *Henry T. von Böttinger* in Elberfeld (1909).
Joseph Florimond Duc *de Loubat* in Paris (1910).
Hr. *Hans Meyer* in Leipzig (1911).
Frl. *Elise Koenigs* in Berlin (1912).

b. Der Medaille in Silber.

Hr. *Karl Alexander von Martius* in Berlin (1907).
- *A. F. Lindemann* in Sidmouth, England (1907).
- *Johannes Bolte* in Berlin (1910).
- *Karl Zeumer* in Berlin (1910).
- *Albert von Le Coq* in Berlin (1910).
- *Johannes Ilberg* in Wurzen (1910).
- *Max Wellmann* in Potsdam (1910).
- *Robert Koldewey* in Babylon (1910).
- *Gerhard Hessenberg* in Breslau (1910).
- *Werner Janensch* in Berlin (1911).
- *Hans Osten* in Leipzig (1911).
- *Robert Davidsohn* in Florenz (1912).
- *N. de Garis Davies* in Kairo (1912).
- *Edwin Hennig* in Berlin (1912).
- *Hugo Rabe* in Hannover (1912).

Verstorbener Inhaber der Medaille in Silber:

Georg Wenker (Marburg, 1911, † 1911).

Beamte der Akademie.

Bibliothekar und Archivar der Akademie: Dr. *Köhnke*, Prof.

Archivar und Bibliothekar der Deutschen Commission: Dr. *Behrend*.

Wissenschaftliche Beamte: Dr. *Dessau*, Prof. — Dr. *Harms*, Prof. — Dr. *von Fritze*. — Dr. *Karl Schmidt*, Prof. — Dr. Frhr. *Hiller von Gaertringen*, Prof. — Dr. *Ritter*. — Dr. *Apstein*, Prof. — Dr. *Paetsch*.

Bahnen der Uranustrabanten

Erste Abteilung

Oberon und Titania.

Unter Mitwirkung
von
Dr. W. HASSENSTEIN, Dr. P. V. NEUGEBAUER, Dr. G. STRUVE
abgeleitet von
H$^{\text{rn.}}$ H. STRUVE.

Gelesen in der Sitzung der phys.-math. Klasse am 14. November 1912.
Zum Druck eingereicht am gleichen Tage, ausgegeben am 5. April 1913.

Die Bearbeitung der zahlreichen neueren Beobachtungen der Uranustrabanten, die während der letzten Dezennien an den großen Refraktoren in Amerika angestellt worden sind, war bereits vor längerer Zeit von mir in Angriff genommen worden, zunächst nur mit der Absicht, die Bahnelemente der inneren Trabanten Ariel und Umbriel, welche die früheren Washingtoner Beobachtungen von Newcomb und Hall wegen der großen Lichtschwäche dieser Trabanten mit geringer Sicherheit ergeben hatten, genauer zu ermitteln und u. a. zur Ableitung der Säkularbewegungen ihrer Apsidenlinien zu benutzen. Das Ergebnis dieser vorläufigen 10 Jahre zurückliegenden Rechnungen ließ indessen erkennen, daß auch die Bahnen dieser Trabanten, ebenso wie diejenigen von Oberon und Titania, sehr wenig von der Kreisbahn abweichen und die Bestimmung der Exzentrizitäten und Apsidenbewegungen daher nur mit Hilfe eines größeren und sehr viel genaueren Beobachtungsmaterials erlangt werden könne. Es wurde daher damals[1] von mir in Anregung gebracht, neben den gewöhnlichen Messungen, die bis dahin nur in Anschlüssen der Trabanten an die Planetenscheibe bestanden hatten, die Trabanten auch untereinander zu verbinden und insbesondere die beiden schwächeren Trabanten an Titania und Oberon anzuschließen, ein Verfahren, welches geringeren Bedenken hinsichtlich der systematischen Fehler ausgesetzt ist und jedenfalls mit Erfolg bei den Messungen im Saturnsystem angewandt worden war. Nach diesem Plane wurde seit 1903 ein Teil der Messungen der Uranustrabanten am Lickrefraktor und am Washingtoner Refraktor ausgeführt.

Es hatte sich ferner bei den vorläufigen Rechnungen die Notwendigkeit herausgestellt, auch die Bahnen der beiden entfernteren Trabanten Oberon und Titania von neuem zu bestimmen, da die älteren von Newcomb und A. Hall abgeleiteten Bahnelemente die neueren Beobachtungen nicht mehr mit ausreichender Genauigkeit darstellten.

---

[1] Publications of the Astr. Soc. of the Pacific, Vol. XV.

Als daher einige Jahre später ein reichhaltigeres Beobachtungsmaterial, zum Teil nach dem neuen Programm angestellt, zur Verfügung stand, für dessen Bearbeitung die Königliche Akademie der Wissenschaften einen Beitrag gewährte, wurde die Untersuchung der Bahnen unter Mitwirkung mehrerer jüngerer Kollegen von neuem aufgenommen und sowohl auf alle vier Trabanten wie auch auf sämtliche neueren, bisher noch nicht reduzierten Messungsreihen an den großen Refraktoren der Lick-, Yerkes- und Washingtoner Sternwarte ausgedehnt.

Die vorliegende Abhandlung bildet den ersten Abschnitt dieser Untersuchungen und enthält die Ableitung der Bahnen der äußeren Monde Oberon und Titania, welche den Bahnbestimmungen der inneren Monde aus dem obenbezeichneten Grunde vorausgehen mußte. Außer den neueren Beobachtungen sind hier auch die wichtigsten älteren Reihen zur Vergleichung herangezogen und, wo es nötig war, von neuem bearbeitet worden. Die Endresultate für die Bahnen von Oberon und Titania beruhen demnach auf dem umfangreichen bis auf W. Herschel zurückreichenden Beobachtungsmateriale und werden eine sichere Grundlage für den weiteren Ausbau der Theorie durch Anschlußbeobachtungen abgeben.

Gestützt auf die hier erlangten Resultate sind auch die neueren vorzugsweise am Lickrefraktor ausgeführten Verbindungen von Ariel und Umbriel mit Titania und Oberon bearbeitet und mit den aus direkten Verbindungen der inneren Trabanten mit dem Planeten folgenden Bahnen verglichen worden. Von einer Veröffentlichung dieser Ergebnisse haben wir jedoch vorläufig abgesehen. Einesteils sind noch zu wenig Anschlußbeobachtungen vorhanden, um sichere Schlußfolgerungen über Änderungen der Bahnelemente daraus zu ziehen, andernteils sind die Ergebnisse der bis 1901 reichenden Beobachtungsreihen von Ariel und Umbriel, die auf direkten Verbindungen mit Uranus beruhen, schon durch die Untersuchungen von Prof. Ö. Bergstrand[1] vor kurzem bekannt geworden. Es ist außerdem Aussicht vorhanden, in den nächsten Jahren, wo die Öffnungen der Bahnellipsen abzunehmen beginnen, auch die Lage der Bahnebenen der inneren Trabanten durch Anschlußbeobachtungen an Titania und Oberon genauer zu bestimmen und damit neue unabhängige Daten für die Ableitung der Säkularbewegungen zu gewinnen. Gerade in dieser Beziehung sind die Verbindungen der Satelliten untereinander denjenigen mit dem Planeten erheblich überlegen. Aus diesen Gründen haben wir uns darauf beschränkt, hier nur die Resultate für die Halbachsen von Ariel und Umbriel mitzuteilen, um sie mit den entsprechenden Werten für Titania und Oberon zur Ableitung der Planetenmasse zu benutzen.

---

[1] Bergstrand, Über die Bahn des ersten Uranussatelliten, Ariel. 1904. — Bergstrand, Sur le mouvement du deuxième Satellite d'Uranus, Umbriel. 1909.

An den Rechnungen haben folgende Herren mitgewirkt. Von Dr. W. Hassenstein, der mir in der ersten Zeit zur Seite stand, wurden die Örter von Oberon und Titania für den Zeitraum 1894—1906 berechnet, mit den Beobachtungen verglichen und die Bedingungsgleichungen zur Verbesserung der Elemente aufgestellt. Als Dr. Hassenstein wegen anderer Berufspflichten die Beteiligung an der Arbeit aufgeben mußte, trat an seine Stelle Dr. P. V. Neugebauer, der insbesondere die umfangreichen Rechnungen für die Verbindungen der Satelliten untereinander übernahm und auch den größeren Teil der Reduktionen für die Trabanten Ariel und Umbriel durchführte. Neben diesen beiden Herren, welchen der Hauptanteil an den Rechnungen zukommt, unterstützte mich in der letzten Zeit mein Sohn Dr. G. Struve, welcher die Beobachtungen von 1910 und 1911 bearbeitete. Bei der Aufstellung der Normalgleichungen und anderen mechanischen Rechnungen war außerdem Hr. A. Martens behilflich. Einen besonderen Dank schulden wir den HH. Aitken, Barnard, Eichelberger, Hammond, welche uns wiederholt Auskünfte über die Messungen erteilten und einen großen Teil der neueren Messungen vor der Drucklegung im Manuskript zugänglich machten.

1. Übersicht über die neueren Beobachtungen von Oberon und Titania 1894—1911.

Unter den neueren Beobachtungen stehen die am Lickrefraktor angestellten an Zahl und Ausdehnung an erster Stelle. Sie wurden 1894—1895 von Barnard und Schaeberle begonnen, in den folgenden Jahren von Schaeberle und Hussey und von 1898 an von Aitken fortgeführt. Am Washingtoner Refraktor, an welchem bereits während der Jahre 1874 bis 1884 die Beobachtungsreihen von Newcomb und Asaph Hall, welche den jetzigen Tafeln und Ephemeriden der Trabanten zugrunde liegen, ausgeführt worden waren, wurden nach einer längeren Pause die Beobachtungen in den Jahren 1900—1902 von See wieder aufgenommen und in den folgenden Jahren 1904—1907 von Dinwiddie, Frederick, Hammond und Frederickson fortgesetzt. Die späteren Messungen am Washingtoner Refraktor, von 1908 an, waren uns während der Bearbeitung nicht zugänglich. Sie sind kürzlich im Astronomical Journal Nr. 627 von Prof. A. Hall jr. veröffentlicht worden, konnten jedoch in die Endresultate nicht mehr einbezogen werden.

Eine dritte Gruppe von Messungen hat Barnard seit 1907 am großen Yerkesrefraktor ausgeführt.

Außer den direkten Anschlüssen der Trabanten an den Planeten, welche die überwiegende Mehrzahl der Messungen bilden, sind in den Jahren 1901 bis 1907 auch zahlreiche Verbindungen der Satelliten untereinander hauptsächlich an den Refraktoren der Washingtoner und Lick-Sternwarte erhalten worden.

Die folgende Zusammenstellung gewährt eine Übersicht über die zur Ableitung der Elemente benutzten Reihen, nebst Angabe der mittleren Epoche, der Beobachter, der Zahl der Messungen und der Quellen, denen sie entnommen sind.

Titania — Uranus.

Opposition	Mittlere Epoche	Instrument	Beobachter	Zahl der Messungen in p	Zahl der Messungen in s	Autorität
1894, 1895	1895.0	Lickrefr. 36 Z.	Barnard	47	47	Astr. Journ. Bd. 16 Nr. 370
			Schaeberle	10	10	Astr. Journ. Bd. 15 Nr. 340 Astr. Journ. Bd. 18 Nr. 409
1897, 1898	1897.7	Lickrefr. 36 Z.	Hussey	7	7	Lick Bull. Nr. 17
			Schaeberle	14	13	Astr. Journ. Bd. 18 Nr. 409
			Aitken	9	8	Astr. Journ. Bd. 19 Nr. 442
1899, 1900, 1901	1900.4	Lickrefr. 36 Z.	Aitken	33	33	Astr. Nachr. Bd. 151 Nr. 3607 Lick Bull. Nr. 7
1900	1900.5	Wash. Refr. 26 Z.	See	34	34	Astr. Nachr. Bd. 154 Nr. 3676 (auch Publ. Nav. Obs. Bd. VI)
1901	1901.5	Wash. Refr. 26 Z.	See	40	40	Astr. Nachr. Bd. 159 Nr. 3806 (auch Publ. Nav. Obs. Bd. VI)
1902	1902.5	Wash. Refr. 26 Z.	See	45	44	Astr. Nachr. Bd. 176 Nr. 4218 (auch Publ. Nav. Obs. Bd. VI)
1903, 1904, 1905	1904.2	Lickrefr. 36 Z.	Aitken	32	32	Lick Bull. Nr. 51 u. 94

Opposition	Mittlere Epoche	Instrument	Beobachter	Zahl der Messungen		Autorität
				in *p*	in *s*	
1903, 1904, 1905	1904.5	Wash. Refr. 26 Z.	Dinwiddie	10	10	Astr. Journ. Bd. 24 Nr. 555
			Frederick	13	13	Astr. Nachr. Bd. 168 Nr. 4026
			Hammond	7	7	Astr. Nachr. Bd. 168 Nr. 4026 (auch Publ. Nav. Obs. Bd. VI)
1906, 1907	1907.0	Lickrefr. 36 Z.	Aitken	11	11	Lick Bull. Nr. 172
1907	1907.5	Wash. Refr. 26 Z.	Frederickson	22	22	Astr. Journ. Bd. 26 Nr. 602 (auch Publ. Nav. Obs. Bd. VI)
1907, 1908, 1909	1908.5	Yerkesrefr. 40 Z.	Barnard	27	27	Astr. Journ. Bd. 26 Nr. 606
1910, 1911	1911.0	Yerkesrefr. 40 Z.	Barnard	22	22	Im Manuskript eingesandt.
		Lickrefr. 36 Z.	Aitken	10	10	Im Manuskript eingesandt.

Oberon — Uranus.

Opposition	Mittlere Epoche	Instrument	Beobachter	Zahl der Messungen		Autorität
				in *p*	in *s*	
1894, 1895	1895.0	Lickrefr. 36 Z.	Barnard	41	40	Astr. Journ. Bd. 16 Nr. 370
			Schaeberle	10	10	Astr. Journ. Bd. 15 Nr. 340 Astr. Journ. Bd. 18 Nr. 409
1896, 1897, 1898	1897.7	Lickrefr. 36 Z.	Hussey	9	9	Lick Bull. Nr. 17
			Schaeberle	13	13	Astr. Journ. Bd. 18 Nr. 409
			Aitken	9	8	Astr. Journ. Bd. 19 Nr. 442
1899, 1900, 1901	1900.3	Lickrefr. 36 Z.	Aitken	30	30	Astr. Nachr. Bd. 151 Nr. 3607 Lick Bull. Nr. 7
1900	1900.5	Wash. Refr. 26 Z.	See	34	34	Astr. Nachr. Bd. 154 Nr. 3676 (auch Publ. Nav. Obs. Bd. VI)
1901	1901.5	Wash. Refr. 26 Z.	See	39	39	Astr. Nachr. Bd. 159 Nr. 3806 (auch Publ. Nav. Obs. Bd. VI)
1902	1902.5	Wash. Refr. 26 Z.	See	41	41	Astr. Nachr. Bd. 176 Nr. 4218 (auch Publ. Nav. Obs. Bd. VI)
1903	1903.4	Lickrefr. 36 Z.	Aitken	9	9	Lick Bull. Nr. 51
		Wash. Refr. 26 Z.	Dinwiddie	6	6	Astr. Journ. Bd. 24 Nr. 555 (auch Publ. Nav. Obs. Bd. VI)
1907, 1908, 1909	1908.6	Yerkesrefr. 40 Z.	Barnard	22	22	Astr. Journ. Bd. 26 Nr. 606
1910, 1911	1911.0	Yerkesrefr. 40 Z.	Barnard	21	21	Im Manuskript eingesandt.
		Lickrefr. 36 Z.	Aitken	7	7	Im Manuskript eingesandt.

Oberon — Titania.

Opposition	Mittlere Epoche	Instrument	Beobachter	Zahl der Messungen in p	Zahl der Messungen in s	Autorität
1901	1901.5	Wash. Refr. 26 Z.	See	39	39	Astr. Nachr. Bd. 159 Nr. 3806 (auch Publ. Nav. Obs. Bd. VI)
1902	1902.5	Wash. Refr. 26 Z.	See	41	41	Astr. Nachr. Bd. 176 Nr. 4218 (auch Publ. Nav. Obs. Bd. VI)
1903, 1904, 1905	1904.5	Lickrefr. 36 Z.	Aitken	23	23	Lick Bull. Nr. 51 u. 94
1904	1904.5	Wash. Refr. 26 Z.	Frederick	9	9	Astr. Nachr. Bd. 168 Nr. 4026
			Hammond	6	6	Astr. Nachr. Bd. 168 Nr. 4026 (auch Publ. Nav. Obs. Bd. VI)
1906, 1907	1907.3	Lickrefr. 36 Z.	Aitken	8	8	Lick Bull. Nr. 172
		Yerkesrefr. 40 Z.	Barnard	6	6	Astr. Journ. Bd. 26 Nr. 606
1907	1907.5	Wash. Refr. 26 Z.	Frederickson	23	23	Astr. Journ. Bd. 26 Nr. 602 (auch Publ. Nav. Obs. Bd. VI)

2. Vergleichung der Beobachtungen mit den Tafeln.

Ableitung der Korrektionen der Elemente.

Alle Beobachtungen der Uranustrabanten sind an Fadenmikrometern erhalten, mit welchen in der üblichen Weise Distanzen und Positionswinkel gemessen worden sind. Es kamen hierbei ausschließlich helle Fäden in Anwendung. Bei den direkten Verbindungen mit dem Planeten wurde stets die Planetenscheibe mit dem Faden biseciert. In der Regel besteht eine vollständige Messung — wenigstens bei den neueren Beobachtungen — aus zwei Gruppen von Einstellungen, welche die Messungen der Distanzen einschließen, so daß im Mittel die Zeiten für s und p nahe gleich sind. Die Korrektion wegen Refraktion ist in den veröffentlichten Messungen in der Regel berücksichtigt; wo das nicht geschehen war, ist sie nachträglich hinzugefügt worden. Die Messungen am Lickrefraktor sind durchgehends mit ein und demselben Mikrometer gemacht worden. Den Schraubenwert desselben hatte Burnham[1] im Jahre 1889 aus Deklinationsdifferenzen verschiedener Sternpaare ermittelt. Aus 17 Messungen ergaben sich Werte, die zwischen $9''.890$ und $9''.924$ schwanken. Im Mittel ergab sich 1 Rev. $= 9''.907$.

---

[1] Publications of the Astr. Society of the Pacific, Vol. II, S. 196.

Zur Kontrolle dieses Wertes machte Hussey[1] in den neunziger Jahren eine Neubestimmung aus Durchgängen von Polsternen und erhielt aus

λ Urs. min.	1 Rev. = 9''918	w. F.	±0''0006
51 Ceph. Hev.	= 9.907		±0.0021

Die Übereinstimmung des zweiten Wertes mit dem Burnhamschen veranlaßte Hussey bei letzterem stehen zu bleiben, der dann auch in der Folge bei der Reduktion sämtlicher Messungen beibehalten worden ist. Ein Einfluß der Temperatur auf den Schraubenwert scheint nicht nachgewiesen worden zu sein. Die Gleichförmigkeit der Schraube wird von Hussey a. a. O. bemerkt.

Der Schraubenwert des Mikrometers am Yerkesrefraktor ist von Barnard[2] aus zahlreichen Messungen von Deklinationsdifferenzen von Plejadensternen zu 1 Rev. = 9''665 für 50° F. ermittelt und dieser Wert bei der Reduktion aller Messungen angenommen worden. Nach den von Barnard a. a. O. gemachten Angaben kann der unbedeutende Temperaturkoeffizient außer acht bleiben.

Am Washingtoner 26zölligen Refraktor war vor 1900 ein Clark-Mikrometer I in Gebrauch, mit dem alle früheren Beobachtungen von Newcomb, Hall u. a. angestellt worden sind. Von 1900 an wurde ein anderes, welches als Clark-Mikrometer II bezeichnet ist, benutzt. Der Schraubenwert des ersteren war von Holden[3] zu 1 Rev. = 9''948 bestimmt worden, welcher Wert von A. Hall[4] und teilweise auch von Newcomb[5] bei der Reduktion ihrer Messungen der Uranustrabanten benutzt worden ist. Spätere Bestimmungen zeigten, daß der von Holden abgeleitete Wert merklich zu groß ist und ergaben 1 Rev. = 9''936, wonach auch die von A. Hall und Newcomb abgeleitete Uranusmasse einer Verbesserung bedarf. Über das seit 1900 in Anwendung gekommene Clark-Mikrometer II sind von See in A. N. 3654 und 3806 ausführliche Angaben gemacht worden, denen zufolge im Mittel aus einer größeren Zahl von Bestimmungen 1 Rev. = $9''9316 - 0.000055\,(t - 50°)$, für t Grad Fahrenheit, definitiv angenommen und bei allen späteren Messungen benutzt worden ist. Eine weitere Bestimmung des Schraubenwerts von Mikrometer II wurde 1906 von Hammond an Plejadensternen ausgeführt, welche die frühere von See bestätigte[1]. Für das Verhältnis der Schraubenwerte beider Mikrometer hatte früher Holden durch direkte Vergleichung $\frac{\text{Clark-Mikr. I}}{\text{Clark-Mikr. II}} = \frac{9.948}{9.939}$ gefunden. Bei beiden Mikrometern waren die Schrauben sorgfältig untersucht worden. Die Schraubenfehler hatten sich als belanglos ergeben.

---

[1] Publications of the Lick Observatory, Vol. V, S. 11.

[2] Publications of the Yerkes Observatory, Vol. II, S. 80.

[3] Holden, Washington Observations 1877, App. I.

[4] A. Hall, Washington Observations 1881, App. I.

[5] Newcomb, Washington Observations 1873, App. I.

Behufs Vergleichung mit den Beobachtungen wurden für die Längen, mittleren Bewegungen und Halbachsen der Trabanten die Werte von Newcomb[2], auf denen seine Tafeln fußen, für die Koordinaten der Bahnebene die unter besonders günstigen Bedingungen zu der Zeit sehr geringer Bahnöffnung erlangte Bestimmung von A. Hall[3] zum Ausgangspunkt genommen. Bei beiden Trabanten wurden Kreisbahnen vorausgesetzt.

Die der Rechnung zugrunde gelegten Kreisbahnelemente sind hiernach: Längen in der Bahn, gezählt vom aufsteigenden Knoten im Äquator:

Epoche 1900 Jan. 0.0 Red. M. Z. Greenwich

$$\text{Titania}\quad u = 79^{\circ}\!.12 + 41^{\circ}\!.35$$
$$\text{Oberon}\quad u = 346.33 + 26.74$$

Mittlere Bewegungen in vier julianischen Jahren oder 1461 Tagen:

$$\text{Titania}\quad 167\ \text{Rev.} + 294^{\circ}\!.20$$
$$\text{Oberon}\quad 108 \qquad + 186.27$$

Halbachsen in der mittleren Entfernung $\lg \rho_0 = 1.28310$

$$\text{Titania}\quad \Delta = 31''\!.485 \qquad \lg \Delta \cdot \rho_0 = 2.78120$$
$$\text{Oberon}\quad \Delta = 42.102 \qquad \lg \Delta \cdot \rho_0 = 2.90740$$

entsprechend der Uranusmasse $\frac{1}{22600}$

Knoten und Neigung der Bahnebene, für beide Trabanten gleich angenommen:

$$N = 166^{\circ}\!.053 + 0^{\circ}\!.01422\,(T - 1900.0)$$
$$J = 75.276 - 0.00134\,(T - 1900.0)$$

In den Jahren 1894—1895 war für die Neigung etwas abweichend ein um 0°.024 größerer Wert vorausgesetzt.

---

[1] Publications Naval Observatory, Vol. VI.

[2] Washington Observations 1873, App. I.

[3] Washington Observations 1881, App. I.

Bei einigen der in den letzten Jahren ausgeführten Beobachtungsreihen Titania—Uranus und Oberon—Uranus (1902, 1906—1911) sind ferner an die den Newcombschen Tafeln entnommenen Werte von u vorläufige Verbesserungen δu angebracht, die sich aus der Bearbeitung der früheren Reihen ergeben hatten, nämlich:

$$\text{Titania}\quad \delta u = +1^{\circ}\!.30 + 0^{\circ}\!.05\,(T - 1900.0)$$
$$\text{Oberon}\quad \delta u = +0.55 + 0.02\,(T - 1900.0)$$

Diese Verbesserungen sind auch durchgehends bei der Bearbeitung der Verbindungen von Oberon mit Titania den Tafelwerten von u hinzugefügt worden.

Zur Berechnung der Trabantenörter und Koeffizienten der Bedingungsgleichungen in s, p sind die bekannten Formeln von Marth benutzt.

Koordinaten:

$$x = s\sin(p - P) = r\sin(u - U)$$
$$y = s\cos(p - P) = r\sin B\cos(u - U)$$

$$r = \frac{\rho_0 \cdot \Delta}{\rho}$$

Bedingungsgleichungen.

O — C.

$$\begin{aligned} s\,dp = {} & r\sin\tau\cdot du \\ & - r\sin\tau\cos u\cdot 2e\sin w \\ & + r\sin\tau\sin u\cdot 2e\cos w \\ & + r(\sin\tau\cos J + \cos\tau\sin J\cos u)\cdot dN \\ & - r\cos\tau\sin u\cdot dJ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ds = {} & r\cos\sigma\cos\tau\cdot du \\ & - \left(r\cos\sigma\cos\tau\cos u + \frac{s}{2}\sin u\right)\cdot 2e\sin w \\ & + \left(r\cos\sigma\cos\tau\sin u - \frac{s}{2}\cos u\right)\cdot 2e\cos w \\ & + s\cdot\frac{d\Delta}{\Delta} \\ & + r\cos\sigma\sin p\cos\delta\cdot dN \\ & + r\cos\sigma\sin\tau\sin u\cdot dJ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos B\sin U &= \sin\delta\sin J - \cos\delta\cos J\sin(N - \alpha) \\ \cos B\cos U &= \cos\delta\cdot\cos(N - \alpha) \\ \sin B &= -\sin\delta\cos J - \cos\delta\sin J\sin(N - \alpha) \\ \cos B\sin P &= -\sin J\cos(N - \alpha) \\ \cos B\cos P &= \cos\delta\cos J - \sin\delta\sin J\sin(N - \alpha) \end{aligned}$$

$$\sin\tau = \frac{r}{s}\sin B$$

$$\cos\tau = \frac{r}{s}\cos B\sin(u - U)$$

$$\cos\sigma = \cos B\cos(u - U)$$

In diesen Formeln bedeuten $180^{\circ} + U$, B Länge und Breite der Erde bezüglich der Trabantenbahn, P den Positionswinkel der kleinen Achse der

Projektionsellipse, e, w Exzentrizität und Länge der Apsidenlinie der Trabantenbahn gezählt von N aus; du, $2e\sin w$, $2e\cos w$, $\frac{d\Delta}{\Delta}$, dN, dJ die aus der Vergleichung mit den Beobachtungen folgenden Verbesserungen der Bahnelemente. Die Hilfswinkel U, B, P brauchten nur für die Beobachtungsreihen vor 1900 nach obigen Formeln gerechnet zu werden. Von 1900 an konnten sie der Connaissance des Temps, wo sie unter Zugrundelegung der Bahnebene nach Halls Bestimmung berechnet sind, entnommen werden.

Da die Messungen größtenteils bei großer Bahnöffnung angestellt, daher die Korrektionen dN, dJ für die Lage der Bahnebene nur mit geringem Gewicht zu bestimmen waren, so sind bei der Auflösung der Normalgleichungen die wahrscheinlichsten Werte für die Korrektionen der andern Elemente in der Form: Korr. $= a + b.dN + c.dJ$ abgeleitet worden. Damit hat man die Möglichkeit, falls es sich später als notwendig erweisen sollte, die erlangten Elemente wegen etwaiger Fehler in der vorausgesetzten Bahnebene zu verbessern. Eine Neubestimmung von dN, dJ ließen nur die bei etwas geringerer Bahnöffnung gemachten Beobachtungsreihen der Jahre 1894—1895 und 1907—1911 zu. Für diese Jahre ist auch die vollständige Auflösung mit 6 Unbekannten gegeben.

Bei den gegenseitigen Verbindungen von Oberon mit Titania wurden die gemessenen s, p in Differenzen rechtwinkliger Koordinaten verwandelt, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &= s\sin(p-P) \\ y_1 - y_2 &= s\cos(p-P) \end{aligned}\right\} \quad \text{(im Sinne Oberon—Titania)}$$

und diese mit den nach den Formeln

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \sin(u_1 - U) & \qquad x_2 &= r_2 \sin(u_2 - U) \\ y_1 &= r_1 \sin B \cos(u_1 - U) & \qquad y_2 &= r_2 \sin B \cos(u_2 - U) \end{aligned}$$

berechneten Unterschieden der rechtwinkligen Koordinaten verglichen. Die Bedingungsgleichungen ergaben sich dann unter Fortlassung der Korrektionen für die Lage der Bahnebene in der Form:

$$\begin{aligned} d(x_1 - x_2) = {} & r_1 \cos(u_1 - U) \cdot du_1 \\ & - r_1 \left(\cos(u_1 - U)\cos u_1 + \cos U\right) \cdot e_1 \sin w_1 \\ & + r_1 \left(\cos(u_1 - U)\sin u_1 + \sin U\right) \cdot e_1 \cos w_1 \\ & + (x_1 - x_2) \cdot \frac{d\Delta}{\Delta} \\ & - r_2 \cos(u_2 - U) \cdot du_2 \\ & + r_2 \left(\cos(u_2 - U)\cos u_2 + \cos U\right) \cdot e_2 \sin w_2 \\ & - r_2 \left(\cos(u_2 - U)\sin u_2 + \sin U\right) \cdot e_2 \cos w_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(y_1 - y_2) = & -r_1 \sin B \sin(u_1 - U) \cdot du_1 \\ & + r_1 \sin B \big(\sin(u_1 - U) \cos u_1 - \sin U\big) \cdot e_1 \sin w_1 \\ & - r_1 \sin B \big(\sin(u_1 - U) \sin u_1 + \cos U\big) \cdot e_1 \cos w_1 \\ & + (y_1 - y_2) \cdot \frac{d\Delta}{\Delta} \\ & + r_2 \sin B \sin(u_2 - U) \cdot du_2 \\ & - r_2 \sin B \big(\sin(u_2 - U) \cos u_2 - \sin U\big) \cdot e_2 \sin w_2 \\ & + r_2 \sin B \big(\sin(u_2 - U) \sin u_2 + \cos U\big) \cdot e_2 \cos w_2, \end{aligned}$$

wo $\frac{d\Delta}{\Delta}$ für $\frac{d\Delta_1}{\Delta_1} = \frac{d\Delta_2}{\Delta_2}$ gesetzt ist.

Die Form der Bedingungsgleichungen läßt sogleich erkennen, daß die elliptischen Elemente $e_1\, w_1$, $e_2\, w_2$ nicht gleichzeitig für beide Trabanten sicher bestimmt werden können. Die Auflösung der Normalgleichungen geschah daher in der Weise, daß die elliptischen Elemente von Titania $e_2 \sin w_2$, $e_2 \cos w_2$ unbestimmt gelassen und die anderen Elemente durch diese in der Form:

$$\text{Korr.} = a + b \cdot e_2 \sin w_2 + c \cdot e_2 \cos w_2$$

dargestellt wurden. Bei der Beobachtungsreihe von See Oberon—Titania, Washington 1902, sind die Bedingungsgleichungen unmittelbar für *sdp* und *ds* aufgestellt, mit Vernachlässigung der elliptischen Elemente.

In den folgenden Tabellen ist für jede einzelne Beobachtungsreihe zunächst die Vergleichung »Beobachtung — Rechnung« zusammengestellt. Die Beobachtungszeiten sind sowohl in der von den Beobachtern angegebenen Zeit (Ortszeit oder Standardzeit) sowie auch in reduzierter mittlerer Zeit Greenwich, wobei die Aberrationszeit $= 8^{\mathrm{m}}.302 \cdot \rho$ angenommen ist, gegeben. Sie gelten für die Messungen des Positionswinkels. Die beobachteten Distanzen wurden mit $\frac{ds}{dt}$ und dem bekannten Zeitintervall — welches hier nicht angegeben ist —, auf die Beobachtungszeiten von p reduziert. Wegen der großen Öffnung der Bahnen war diese Korrektion bei den Verbindungen mit dem Planeten immer sehr klein. Bei den Verbindungen der Satelliten untereinander waren andererseits die Messungen stets so angeordnet, daß das Zeitintervall zwischen den Mitteln für s und p gering blieb. Neben den Vergleichungen O—C ist die Zahl der Einstellungen, auf welchen die Messungen von p und s beruhen, angeführt. Die Angaben über die Güte der Bilder, welche keinen sicheren Maßstab für die Bewertung der Messungen abgeben, bei vielen Reihen auch ganz fehlen, sind fortgelassen. Wo aus den Bemerkungen des Beobachters geschlossen werden konnte, daß eine Messung weniger sicher war, ist derselben das Zeichen : beigefügt.

Auf die Vergleichung »Beobachtung — Rechnung« folgen die Bedingungsgleichungen und Normalgleichungen. Die Koeffizienten der Bedingungsgleichungen sind in Sekunden ausgedrückt, die Korrektionen *du*, *dN*, *dJ* in Teilen des Radius. Bei der Auflösung ist im allgemeinen den Gleichungen in *sdp* und *ds* gleiches Gewicht erteilt, auch dort, wo die Zahl der Einstellungen in *p* und *s* verschieden war. Durchschnittlich erweisen sich die Gleichungen in *ds*, wie die Summen der Fehlerquadrate erkennen lassen, etwas genauer als diejenigen in *sdp*. Gleichwohl kann das Resultat der Auflösung, wenn man den Gleichungen in *sdp* und *ds* verschiedene Gewichte erteilen wollte, nicht wesentlich abgeändert werden. Es würden sich dadurch nur die w. F. der Korrektionen etwas ändern. Geringeres Gewicht ist nur ausnahmsweise solchen Messungen beigelegt, die entweder unvollständig sind oder als sehr unsicher bezeichnet waren und ungewöhnlich große Abweichungen aufweisen. In diesen Fällen ist das Gewicht angegeben und den Gleichungen in der Kolumne für *v* beigefügt. Bei ausgeschlossenen Messungen sind die Abweichungen eingeklammert. In der gleichen Weise ist hinsichtlich der Gewichtserteilung auch bei den gegenseitigen Verbindungen Oberon—Titania verfahren, d. h. es ist in der Regel den Gleichungen in $d(x_1 - x_2)$ dasselbe Gewicht wie den Gleichungen in $d(y_1 - y_2)$ beigelegt. Im übrigen geschah die Auflösung in der oben angegebenen Weise. Die nach der Auflösung übrigbleibenden Abweichungen *v*, im Sinne O—C, sind neben den Koeffizienten der Bedingungsgleichungen aufgeführt.

Titania—Uranus.

Lickrefraktor 36 Z. 1894, 1895. Beob.: Barnard, Schaeberle.

Beobachtung — Rechnung.

	Standard Pacific Time	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O *p*	C *p*	$\frac{O-C}{n}$ *sdp*	O *s*	C *s*	$\frac{O-C}{n}$ *ds*	Beob.	Zahl der Einst. *p*	*s*
1894 April 30	$12^h 13^m 0^s$	$17^h 46^m\!.7$	$116^\circ\!.5$	$115^\circ\!.39$	$+0''\!.565$	$29''\!.07$	$29''\!.19$	$-0''\!.12$	B.	4	6
Mai 7	12 33 13	18 6.9	38.9	37.00	+1.065	31.82	32.14	−0.32		4	6
21	9 55 0	15 28.3	255.4	253.13	+1.139	28.52	28.76	−0.24		4	6
28	9 24 18	14 57.3	186.2	184.97	+0.732	34.36	34.10	+0.26		4	6

			Standard Pacific Time	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O	C	O − C n	O	C	O − C n	Beob.	Zahl der Einst.	
					p	*p*	*sdp*	*s*	*s*	*ds*		*p*	*s*
1894	Juni	11	$10^h 15^m 30^s$	$15^h 47^m.4$	41°8	39°98	+0″995	31″08	31″32	−0″24	B.	4	6
		18	10 23 11	15 54.4	341.4	−20.01	+0.796	32.22	32.34	−0.12		4	6
		18	10 56 18	16 27.5	342.1	−19.16	+0.713	32.23	32.43	−0.20		4	6
		24	10 44 52	16 15.5	218.5	218.39	+0.060	30.95	31.19	−0.24		4	6
		25	9 57 12	15 27.7	262.7	261.68	+0.490	27.25	27.53	−0.28		4	6
	Juli	1	9 53 31	15 23.3	157.2	157.14	+0.033	32.07	31.70	+0.37		4	7
		8	9 41 35	15 10.5	79.6	78.14	+0.696	27.61	27.33	+0.28		4	6
		9	9 26 19	14 55.0	127.7	127.18	+0.257	28.49	28.36	+0.13		4	6
		15	8 55 19	14 23.3	10.3	8.38	+1.104	32.62	32.96	−0.34		4	6
		16	8 55 3	14 22.9	47.3	44.62	+1.400	29.85	29.92	−0.07		4	6
		22	8 24 3	13 51.1	303.4	302.40	+0.483	27.40	27.66	−0.26		4	6
		23	9 11 23	14 38.3	345.8	344.64	+0.644	31.83	31.81	+0.02		4	6
		29	8 38 42	14 4.7	221.8	221.75	+0.026	29.69	29.89	−0.20		4	6
		30	8 19 27	13 45.3	267.8	267.00	+0.370	26.37	26.50	−0.13		4	6
1895	April	1	13 43 35	19 15.2	332.2	330.44	+1.006	32.74	32.75	−0.01		4	6
		14	14 38 49	20 11.4	150.8	149.88	+0.528	32.90	32.88	+0.02		4	6
		21	12 20 12	17 53.1	70.7	69.91	+0.418	—	30.30	—		4	—
		21	13 29 57	19 2.8	—	72.14	—	30.04	30.23	−0.19		—	6
		22	13 40 49	19 13.7	119.7	118.94	+0.408	30.90	30.77	+0.13		4	6
		28	14 41 48	20 14.9	6.9	5.03	+1.113	33.80	34.10	−0.30		4	6
		29	12 20 21	17 53.5	41.3	39.26	+1.147	31.59	32.22	−0.63		4	6
	Mai	5	13 11 42	18 44.9	296.0	295.61	+0.208	30.45	30.49	−0.04		4	6
		6	11 50 0	17 23.2	335.9	334.87	+0.597	32.98	33.24	−0.26		4	6
		13	10 21 49	15 55.0	258.4	257.04	+0.710	29.85	29.92	−0.07		4	6
		19	10 32 18	16 5.4	151.8	150.77	+0.591	32.65	32.85	−0.20		4	6
		20	9 48 18	15 21.3	186.8	186.37	+0.256	34.12	34.07	+0.05		4	6
	Juni	2	9 19 5	14 51.6	5.1	3.65	+0.860	33.75	33.98	−0.23		4	6
		3	11 13 55	16 46.3	45.8	44.52	+0.704	31.22	31.51	−0.29		4	6
		9	9 7 25	14 39.4	297.2	296.38	+0.428	29.64	29.89	−0.25		4	6
		10	9 45 24	15 17.3	340.5	338.85	+0.951	32.97	33.05	−0.08		4	6
		16	8 53 27	14 24.9	219.4	218.09	+0.726	31.18	31.78	−0.60		4	6
		17	10 14 52	15 46.2	267.4	265.19	+1.119	28.58	29.03	−0.45		4	6
		24	10 25 35	15 56.3	194.2	193.82	+0.221	33.41	33.30	+0.11		4	6
		30	8 53 51	14 23.8	80.3	79.63	+0.337	28.92	28.79	+0.13		4	6
	Juli	7	10 4 36	15 33.7	13.0	11.20	+1.039	32.86	33.08	−0.22		4	6
		8	9 47 54	15 16.9	50.8	49.25	+0.820	29.89	30.32	−0.43		4	6
		14	9 25 6	14 53.4	305.8	305.11	+0.355	29.10	29.48	−0.38		4	6
		15	9 56 43	15 24.9	347.0	345.87	+0.643	32.42	32.60	−0.18		4	6
		21	8 47 48	14 15.2	225.4	224.97	+0.228	30.03	30 32	−0.29		4	6
		22	9 0 12	14 27.4	271.1	271.10	0.000	27.89	28.05	−0.16		4	6
	Aug.	5	8 21 21	13 46.6	133.6	133.33	+0.139	29.29	29.54	−0.25		4	6
		11	8 8 45	13 33.2	15.9	14.51	+0.775	31.75	31.95	−0.20		4	6
		12	8 18 26	13 42.7	54.9	54.04	+0.436	28.93	29.04	−0.11		4	6
		18	7 58 21	13 21.8	310.9	309.95	+0.481	28.62	28.99	−0.37		4	6

			Standard Pacific Time	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O p	C p	O − C n sdp	O s	C s	O − C n ds	Beob.	Zahl der Einst. p	Zahl der Einst. s
1894	April	4	$12^h48^m54^s$	$18^h21^m.6$	123.°38	121.°62	+0.″912	29.″39	29.″70	−0.″31	S.	8	8:
		7	14 10 36	19 43.5	240.68	239.71	+0.508	29.63	30.01	−0.38		8	8
		28	12 59 0	18 32.7	27.87	26.57	+0.752	32.72	33.16	−0.44		9	10
	Juni	19	9 46 12	15 17.3	14.42	13.57	+0.497	33.01	33.47	−0.46		8	10
		20	10 4 34	15 35.6	52.88	51.71	+0.609	29.83	29.84	−0.01		8	10
		26	9 15 30	14 45.9	309.78	309.51	+0.136	28.78	28.93	−0.15		8	12:
	Juli	4	9 46 20	15 15.7	277.24	276.15	+0.515	26.78	27.06	−0.28		6	6
		6	9 1 0	14 30.1	359.85	358.62	+0.712	33.18	33.16	+0.02		6	6
1895	Juni	13	9 54 38	15 26.3	102.08	101.43	+0.331	29.39	29.19	+0.20		10	10
		23	9 33 15	15 4.0	156.86	156.46	+0.227	32.39	32.58	−0.19		10	10

Bedingungsgleichungen.

			Koeffizienten sdp					Übrigbl. Fehler r	Koeffizienten ds						Übrigbl. Fehler r
			du	$e \sin w$	$e \cos w$	dN	dJ		du	$e \sin w$	$e \cos w$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	dN	dJ	
1894	April	30	+33.″5	+32.″7	− 7.″3	+15.″2	− 1.″6	−0.″016	+3.″7	+ 6.″8	+13.″4	+29.″2	−15.″5	+3.″8	−0.″173
	Mai	7	+30.3	+16.4	+25.5	− 0.6	−13.4	+0.268	−5.5	−16.5	+ 4.0	+32.1	− 7.2	−8.9	−0.075
		21	+33.5	−30.8	−13.1	+ 2.4	− 2.7	+0.698	−3.7	+ 9.0	−11.8	+28.8	−17.3	−7.1	+0.063
		28	+28.0	+ 2.1	−27.9	+ 8.5	−19.4	+0.479	−0.2	+17.0	+ 1.5	+34.1	− 0.1	−0.3	+0.395
	Juni	11	+29.9	+17.5	+24.2	− 1.4	−12.8	+0.215	−6.0	−16.2	+ 4.3	+31.3	− 8.3	−9.2	+0.005
		18	+28.6	−16.2	+23.6	+17.0	−14.7	+0.090	+5.0	−16.2	− 5.0	+32.3	− 2.9	+6.8	+0.017
		18	+28.6	−15.7	+23.8	+16.8	−14.9	+0.007	+4.9	−16.2	− 4.9	+32.4	− 2.7	+6.5	−0.062
		24	+29.4	−16.6	−24.3	− 1.4	−13.4	−0.225	−6.0	+16.3	− 3.8	+31.2	− 7.5	−9.0	+0.034
		25	+33.3	−32.0	− 9.0	+ 4.4	− 1.2	+0.018	−2.5	+ 6.1	−12.6	+27.5	−18.4	−5.1	+0.006
	Juli	1	+28.6	+17.5	−22.6	+17.5	−13.7	−0.300	+5.4	+15.8	+ 5.4	+31.7	− 3.9	+7.1	+0.358
		8	+32.7	+31.0	+10.5	+ 3.3	− 1.8	−0.028	−3.1	− 7.3	+12.0	+27.3	−17.9	−5.9	+0.373
		9	+31.5	+29.1	−11.9	+17.3	− 4.0	−0.240	+5.4	+10.4	+11.1	+28.4	−13.1	+6.2	+0.059
		15	+26.8	− 0.2	+26.8	+ 7.0	−19.2	+0.381	−0.9	−16.5	− 1.1	+33.0	− 0.3	−1.3	−0.128
		16	+29.5	+19.3	+22.3	− 1.9	−11.2	+0.644	−6.2	−15.4	+ 5.1	+29.9	− 9.8	−9.4	+0.164
		22	+31.6	−30.0	+ 9.8	+16.2	− 2.8	−0.130	+4.8	− 8.8	−11.7	+27.6	−14.2	+5.2	−0.093
		23	+27.4	−13.4	+23.9	+15.5	−15.7	−0.045	+4.3	−16.0	− 4.0	+31.8	− 1.9	+5.7	+0.158
		29	+28.8	−17.7	−22.8	− 1.7	−12.0	−0.262	−6.0	+15.5	− 4.4	+29.9	− 8.3	−9.1	+0.075
		30	+32.4	−31.8	− 6.4	+ 5.8	− 0.5	−0.110	−1.4	+ 4.0	−12.7	+26.5	−18.2	−3.7	+0.136
1895	April	1	+30.8	−20.1	+23.3	+16.6	−10.5	+0.272	+3.4	−14.6	− 8.1	+32.7	− 3.7	+5.7	+0.182
		14	+30.9	+20.6	−23.1	+16.9	−10.5	+0.153	+3.6	+14.7	+ 8.2	+32.9	− 4.1	+5.9	+0.023
		21	+33.6	+30.2	+14.8	+ 3.7	− 2.4	−0.362	−2.3	− 8.2	+12.9	+30.2	−14.5	−6.4	−0.105
		22	+33.1	+31.6	−10.0	+15.8	− 2.4	−0.140	+3.5	+ 7.9	+13.6	+30.8	−12.2	+4.3	+0.086
		28	+29.9	− 1.4	+29.9	+ 8.3	−16.4	+0.308	−0.8	−17.0	− 1.6	+34.1	− 0.2	−1.5	−0.080
		29	+31.6	+18.0	+26.0	+ 1.0	−10.5	+0.097	−4.2	−15.7	+ 5.7	+32.2	− 7.2	−8.6	−0.424
	Mai	5	+33.4	−32.4	+ 8.2	+15.2	− 1.8	−0.422	+3.2	− 6.9	−14.0	+30.5	−13.2	+3.7	+0.187
		6	+30.6	−18.3	+24.6	+16.5	−12.1	−0.150	+3.5	−15.4	− 7.1	+33.2	− 3.1	+5.7	−0.074

			Koeffizienten *sdp*					Übrigbl. Fehler	Koeffizienten *ds*						Übrigbl. Fehler
			du	*e* sin *w*	*e* cos *w*	*dN*	*dJ*	*v*	*du*	*e* sin *w*	*e* cos *w*	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	*dN*	*dJ*	*v*
1895	Mai	13	+33″.9	−31″.9	−11″.5	+ 5″.1	− 1″.3	+0″.249	−1″.9	+ 6″.8	−13″.4	+29″.9	−15″.5	−5″.6	+0″.224
		19	+30.8	+20.3	−23.1	+17.2	−11.0	+0.219	+4.0	+15.0	+ 7.8	+32.8	− 4.2	+6.3	−0.202
		20	+29.7	+ 0.7	−29.6	+ 7.9	−16.9	−0.009	−1.0	+17.0	+ 1.4	+34.0	− 0.2	−1.7	+0.201
	Juni	2	+29.3	− 2.3	+29.2	+ 8.8	−17.1	+0.072	−0.5	−16.9	− 1.8	+34.0	− 0.1	−0.8	−0.014
		3	+31.6	+20.3	+24.2	+ 0.3	− 9.5	−0.110	−4.7	−15.0	+ 6.6	+31.5	− 8.7	−9.1	−0.089
		9	+33.0	−32.0	+ 8.3	+15.3	− 1.8	−0.197	+3.5	− 7.1	−13.6	+29.9	−13.6	+3.9	−0.031
		10	+29.9	−16.3	+25.0	+16.0	−13.4	+0.211	+3.5	−15.8	− 6.1	+33.0	− 2.4	+5.5	+0.097
		16	+30.8	−17.0	−25.6	+ 0.4	−11.5	+0.429	−4.6	+15.8	− 4.9	+31.8	− 6.9	−8.6	−0.338
		17	+33.7	−32.8	− 7.4	+ 6.8	− 0.4	+0.627	−0.9	+ 4.1	−13.9	+29.0	−16.4	−3.8	−0.170
		24	+29.0	− 3.5	−28.8	+ 5.4	−16.7	−0.034	−2.2	+16.8	+ 0.1	+33.3	− 1.0	−3.7	+0.289
		30	+33.2	+31.7	+10.0	+ 5.2	− 1.1	−0.395	−1.8	− 6.0	+13.2	+28.8	−16.0	−5 1	+0.193
	Juli	7	+28.6	+ 1.9	+28.5	+ 6.1	−16.9	+0.265	−1.7	−16.6	− 0.6	+33.1	− 0.7	−2.9	+0.002
		8	+31.1	+21.9	+22.1	− 0.1	− 8.2	+0.032	−4.7	−14.1	+ 7.3	+30.3	−10.1	−9.0	−0.242
		14	+31 6	−29.3	+12.0	+16.5	− 3.6	−0.282	+4.3	− 9.5	−12.0	+29.5	−11.6	+5.4	−0.189
		15	+28.6	−12.3	+25.8	+14.1	−14.9	−0.086	+2.7	−15.9	− 4.6	+32.6	− 1.2	+4.2	−0.003
		21	+30.4	−19.8	−23.1	− 0.1	− 9.4	−0.083	−4.8	+14.6	− 6.2	+30.3	− 8.6	−8.9	−0.018
		22	+32.8	−32.5	− 4.4	+ 8.2	− 0.1	−0.504	−0.1	+ 2.0	−13.9	+28.0	−16.3	−2.3	+0.101
	Aug.	5	+30.4	+26.3	−15.2	+17.1	− 5.6	−0.306	+4.6	+11.4	+10.5	+29.5	− 9.3	+6.3	−0.298
		11	+27.8	+ 3.8	+27.6	+ 4.9	−16.1	+0.021	−2.2	−16.1	− 0.1	+31.9	− 1.1	−3.7	+0.019
		12	+30.6	+23.2	+19.9	+ 0.3	− 6.6	−0.324	−4.4	−12.8	+ 8.2	+29.0	−10.9	−8.6	+0.056
		18	+30.3	−27.1	+13.7	+16.6	− 4.7	−0.151	+4.4	−10.5	−10.9	+29.0	− 9.9	+5.8	−0.193
1894	April	4	+32.9	+31.2	−10.4	+16.5	− 2.8	+0.373	+4.3	+ 8.8	+12.7	+29.7	−13.4	+5.1	−0.368
		7	+32.6	−26.7	−18.7	+ 0.3	− 5.8	+0.129	−4.8	+12.5	− 9.5	+30.0	−13.6	−8.9	−0.077
		28	+29.5	+10.7	+27.5	+ 1.4	−16.2	−0.041	−4.4	−17.1	+ 1.9	+33.2	− 3.9	−7.0	−0.191
	Juni	19	+27.7	+ 2.8	+27.5	+ 5.1	−19.1	−0.252	−2.2	−16.9	− 0.4	+33.5	− 0.9	−3.1	−0.229
		20	+31.0	+22.9	+20.8	− 1.6	− 8.9	−0.166	−6.1	−14.5	+ 6.9	+29.8	−12.0	−9.6	+0.204
		26	+31.6	−28.8	+13.1	+17.9	− 4.6	−0.509	+5.6	−11.1	−10.8	+28.9	−12.6	+6.6	+0.005
	Juli	4	+33.3	−33.2	− 2.3	+ 9.0	+ 0.1	−0.016	+0.3	+ 0.6	−13.5	+27.0	−18.6	−1.3	−0.032
		6	+27.1	− 5.9	+26.4	+10.9	−18.8	−0.005	+1.4	−16.5	− 2.2	+33.2	0.0	+2.0	+0.201
1895	Juni	13	+33.6	+33.6	− 0.7	+11.5	− 0.1	−0.312	+1.5	+ 1.9	+14.5	+29.2	−16.0	+0.4	+0.182
		23	+29.7	+17.4	−24.1	+16.4	−12.7	−0.112	+3.8	+15.4	+ 6.4	+32.6	− 3.1	+5.9	−0.177

Allen Messungen in *sdp* und *ds* ist gleiches Gewicht erteilt.

Normalgleichungen.

	du	2*e* sin *w*	2*e* cos *w*	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	*dN*	*dJ*	*n*
du	55104	−2846	+7758	− 208	+15378	−13987	+1056.26
2*e* sin *w*		39933	+1483	−5622	− 1185	+ 284	+ 44.89
2*e* cos *w*			28830	−1285	+ 2664	− 4466	+ 408.06
$\frac{d\Delta}{\Delta}$				54606	−14324	− 1922	− 292.49
dN					13146	− 3249	+ 344.95
dJ						9006	− 310.09

Auflösung Titania—Uranus 1894, 1895.

Lickrefraktor. Barnard, Schaeberle.
Mittlere Epoche 1894.98.

	lg *a*	lg *b*	lg *c*			*a*	w. F.		
sin *du*	8.2540	9.4385_n	9.3835	Korr. Newcomb	*du*	+1°028	± 0°040	(*nn*)	30.58
2*e* sin *w*	7.1377	8.6804	8.0914		*e* sin *w*	+0.00069	± 0.00041		
2*e* cos *w*	7.9558	7.9648_n	8.9588		*e* cos *w*	+0.00452	± 0.00049	$(vv)_{sdp}$	4.46
$\frac{d\Delta}{\Delta}$	7.6931_n	9.4248	8.5970		Δ	31″330	± 0″022	$(vr)_{ds}$	1.88
								(*vv*)	6.34

Korr. $= a + b \sin dN + c \sin dJ$

Zahl der Mess. 57 *p*, 57 *s*
Summe der Gew. 57 *sdp*, 57 *ds*
w. F. einer Gl. ± 0″162

Die vollständige Auflösung mit 6 Unbekannten ergibt:

	lg						
sin *du*	8.2530	Korr. Newcomb	*du*	+1°026			
2*e* sin *w*	7.0350		*e* sin *w*	+0.00054			
2*e* cos *w*	7.9335		*e* cos *w*	+0.00429			
$\frac{d\Delta}{\Delta}$	7.8050_n		Δ	31″284			(*vv*) 6.15
sin *dN*	7.6667_n		*N*	165°787	± 0°130	Aeq.	
sin *dJ*	7.7352_n		*J*	74.989	± 0.129	1900.0	

Titania—Uranus.

Lickrefraktor 36 Z. 1897, 1898. Beob.: Hussey, Schaeberle, Aitken.

Beobachtung — Rechnung.

	Mt. Ham. M. T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O *p*	C *p*	O — C *n sdp*	O *s*	C *s*	O — C *n ds*	Beob.	Zahl der Einst. *p* *s*
1897 Mai 2	12ʰ 11ᵐ 22ˢ	17ʰ 49ᵐ8	154°9	153°54	+0″829	33″90	33″69	+0″21	H.	4—6
9	12 2 41	17 41.4	83.5	81.93	+0.870	31.70	31.77	−0.07		4—6
Juni 6	10 45 49	16 24.1	160.4	158.69	+1.005	33.87	33.68	+0.19		4—6
27	9 57 3	15 33.8	308.2	307.06	+0.639	32.07	32.14	−0.07		4—6
Juli 4	10 42 43	16 18.7	235.7	233.81	+1.034	31.30	31.35	−0.05		4—6
1898 Juni 9	10 58 57	16 36.7	255.0	254.09	+0.511	32.23	32.17	+0.06		4—6
Juli 7	9 4 3	14 39.7	329.8	329.67	+0.075	33.03	33.10	−0.07		4—6
	Std. Pac. T.									
1897 April 10	15 41 42	21 12.3	329.53	329.45	+0.047	33.19	33.36	−0.17	S.	6 6
12	13 29 2	18 59.8	47.25	45.77	+0.832	31.96	32.20	−0.24		6 6
23	12 24 36	17 56.1	143.64	141.91	+1.006	32.83	33.32	−0.49		6 6
Mai 3	11 43 32	17 15.5	192.88	191.61	+0.744	33.48	33.57	−0.09		6 6
17	11 3 56	16 36.1	50.76	49.16	+0.901	32.44	32.28	+0.16		6 6

	Mt. Ham. M. T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O *p*	C *p*	O − C *n* *sdp*	O *s*	C *s*	O − C *n* *ds*	Beob	Zahl der Einst. *p*	*s*
	Std. Pac. T.										
1897 Mai 20	$10^h 38^m 22^s$	$16^h 10^m.6$	174°58	174°01	+0″337	33″93	33″92	+0″01	S.	6	6
21	10 57 57	16 30.2	214.97	214.18	+0.452	32.95	32.80	+0.15		6	6
28	10 8 54	15 40.9	146.90	145.85	+0.613	33.55	33.44	+0.11		6	6
29	11 49 0	17 21.0	188.18	187.37	+0.476	33.42	33.69	−0.27		6	6
31	10 51 48	16 23.8	271.27	270.16	+0.612	31.34	31.60	−0.26		6	6
Juni 4	11 17 36	16 49.4	77.15	75.33	+1.001	31.43	31.51	−0.08		6	6
7	10 44 23	16 16.0	198.02	197.22	+0.465	33.17	33.32	−0.15		6	6
11	9 46 55	15 18.3	3.75	1.90	+1.086	—	—	—		3	—
16	9 37 12	15 8.3	208.28	207.13	+0.659	32.56	32.82	−0.26		6	6
	Std. Pac. T.										
1898 März 27	16 49 20	22 17.4	85.7	83.61	+1.165	31.84	31.94	−0.10	A.	6	4
April 8	15 43 33	21 13.0	218.2	216.63	+0.890	—	—	—		5	5
22	14 26 14	19 56.8	76.7	74.57	+1.201	31.98	32.31	−0.33		5	5
24	14 41 0	20 11.8	158.1	157.72	+0.223	33.62	33.60	+0.02		5	5
Mai 29	11 35 48	17 7.4	162.1	160.17	+1.138	33.60	33.78	−0.18		5	5
Juni 4	11 15 18	16 46.7	48.0	46.52	+0.840	32.29	32.54	−0.25		5	5
5	11 29 28	17 0.9	91.0	90.04	+0.541	32.70	32.32	+0.38		5	5
17	11 20 41	16 51.5	225.7	224.23	+0.832	32.59	32.42	+0.17		5	5
Juli 3	10 57 16	16 26.8	167.8	166.46	+0.779	33.35	33.33	+0.02		5	5

Bedingungsgleichungen.

	Koeffizienten *sdp*					Übrigbl. Fehler *v*	Koeffizienten *ds*						Übrigbl. Fehler *v*
	du	*e* sin *w*	*e* cos *w*	*dN*	*dJ*		*du*	*e* sin *w*	*e* cos *w*	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	*dN*	*dJ*	
1897 Mai 2	+31″9	+17″7	−26″6	+14″1	− 9″4	+0″036	+1″2	+14″7	+ 8″4	+33″7	− 1″4	+2″7	+0″193
9	+33.9	+32.9	+ 8.4	+ 8.9	+ 0.1	−0.025	+0.1	− 3.8	+15.4	+31.8	−11.1	−2.9	+0.036
Juni 6	+31.6	+15.2	−27.7	+13.7	−10.6	+0.233	+1.1	+15.3	+ 7.2	+33.7	− 0.9	+2.5	+0.171
27	+32.3	−28.5	+15.2	+15.8	− 4.2	+0.112	+2.5	− 9.8	−13.0	+32.1	− 6.9	+4.3	+0.001
Juli 4	+32.7	−24.7	−21.5	+ 3.8	− 4.0	+0.456	−2.1	+11.9	−10.5	+31.3	− 8.8	−7.3	+0.001
1898 Juni 9	+33.7	−31.4	−12.2	+ 8.5	− 0.0	−0.047	−0.0	+ 5.8	−15.0	+32.2	− 9.1	−3.6	+0.100
Juli 7	+31.7	−18.9	+25.4	+13.8	− 8.0	−0.483	+0.9	−13.8	− 9.1	+33.1	− 1.5	+2.4	+0.059
1897 April 10	+31.9	−19.4	+25.3	+14.3	− 8.4	−0.512	+1.2	−14.0	− 9.2	+33.4	− 1.9	+2.9	−0.045
12	+33.0	+21.8	+24.8	+ 4.5	− 4.6	+0.025	−1.8	−13.2	+ 9.3	+32.2	− 6.7	−7.1	−0.047
23	+32.2	+23.0	−22.5	+15.2	− 7.1	+0.182	+1.7	+12.9	+10.7	+33.3	− 3.1	+3.7	−0.506
Mai 3	+32.1	− 3.8	−31.9	+ 6.9	−10.8	+0.060	−1.5	+16.8	− 0.5	+33.6	− 1.0	−4.3	−0.067
17	+33.3	+23.4	+23.8	+ 4.2	− 4.5	+0.079	−1.9	−12.9	+ 9.9	+32.3	− 7.6	−7.3	+0.355
20	+31.7	+ 6.6	−31.0	+10.5	−11.8	−0.394	−0.3	+16.5	+ 3.8	+33.9	+ 0.1	−0.7	+0.013
21	+32.8	−16.3	−28.4	+ 4.1	− 7.7	−0.177	−2.2	+15.3	− 6.2	+32.8	− 4.7	−7.2	+0.191
28	+32.0	+21.5	−23.7	+15.3	− 8.2	−0.201	+1.8	+13.6	+ 9.9	+33.4	− 2.9	+3.9	+0.086

			Koeffizienten *sdp*					Übrigbl. Fehler	Koeffizienten *ds*						Übrigbl. Fehler
			du	*e* sin *w*	*e* cos *w*	*dN*	*dJ*	*v*	*du*	*e* sin *w*	*e* cos *w*	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	*dN*	*dJ*	*r*
1897	Mai	29	+31″.8	− 1″.1	−31″.7	+ 7″.7	−11″.8	−0″.216	−1″.3	+16″.9	+ 0″.7	+33″.7	− 0″.5	−3″.4	−0″.252
		31	+33.8	−33.6	− 4.0	+10.4	+ 0.2	+0.069	+0.7	+ 1.2	−15.8	+31.6	−11.5	−1.5	−0.216
	Juni	4	+33.8	+31.6	+12.0	+ 7.4	− 0.5	+0.117	−0.5	− 6.0	+14.6	+31.5	−11.3	−4.4	+0.049
		7	+31.9	− 6.8	−31.1	+ 5.8	−11.0	−0.197	−1.9	+16.7	− 1.7	+33.3	− 1.7	−5.2	−0.119
		11	+31.4	− 2.1	+31.4	+ 8.8	−12.4	+0.446(½)	—	—	—	—	—	—	
		16	+32.1	−12.3	−29.6	+ 4.3	− 9.5	+0.023	−2.3	+16.0	− 4.2	+32.8	− 3.4	−6.6	−0.220
1898	März	27	+33.0	+32.3	+ 6.5	+10.4	+ 0.4	+0.292	+0.5	− 2.6	+15.8	+31.9	− 7.8	−1.6	−0.010
	April	8	+33.0	−18.0	−27.6	+ 5.8	− 4.1	+0.267	—	—	—	—	—	—	—
		22	+33.6	+31.5	+11.6	+ 9.1	+ 0.2	+0.323	+0.2	− 5.4	+15.2	+32.3	− 8.3	−3.1	−0.216
		24	+32.3	+14.7	−28.8	+12.2	− 8.1	−0.564	+0.1	+15.0	+ 7.5	+33.6	− 0.2	+0.5	+0.023
	Mai	29	+32.3	+13.7	−29.3	+12.3	− 8.9	+0.357	+0.2	+15.4	+ 7.0	+33.8	− 0.2	+0.6	−0.180
	Juni	4	+33.4	+22.5	+24.7	+ 5.5	− 3.4	+0.021	−1.2	−12.8	+10.1	+32.5	− 6.2	−6.5	−0.069
		5	+33.6	+33.5	+ 3.4	+11.2	+ 0.3	−0.355	+0.8	− 0.9	+16.2	+32.3	− 9.1	−1.0	+0.457
		17	+33.2	−21.4	−25.4	+ 5.2	− 4.0	+0.223	−1.4	+13.3	− 9.4	+32.4	− 6.0	−6.7	+0.201
	Juli	3	+31.7	+10.3	−29.9	+11.3	− 9.8	+0.030	−0.0	+15.7	+ 5.5	+33.3	+ 0.0	−0.1	+0.021

Normalgleichungen.

	du	2*e* sin *w*	2*e* cos *w*	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	*dN*	*dJ*	*n*
du	31443	+3736	−8460	− 175	+9023	−5492	+696.29
2*e* sin *w*		18937	+1633	+4656	+1417	− 522	+169.06
2*e* cos *w*			20028	+2394	−2817	+2854	−189.97
$\frac{d\Delta}{\Delta}$				30111	−4302	−1843	− 53.92
dN					4071	−1289	+200.33
dJ						2086	−110.10

Auflösung Titania—Uranus 1897, 1898.

Lickrefraktor. Hussey, Schaeberle, Aitken.

Mittlere Epoche 1897.75.

	lg *a*	lg *b*	lg *c*			*a*	w. F.	(*nn*)	19.16
sin *du*	8.3289	9.4415$_n$	9.1867	Korr. Newcomb	*du*	+1°.222	± 0°.057		
2*e* sin *w*	7.7306	8.7628$_n$	8.1096$_n$		*e* sin *w*	+0.00269	± 0.00062	$(vv)_{sdp}$	2.13
2*e* cos *w*	6.7927$_n$	8.0296	8.9292$_n$		*e* cos *w*	−0.00031	± 0.00062	$(vv)_{ds}$	1.02
$\frac{d\Delta}{\Delta}$	7.3889$_n$	9.1743	8.8503		Δ	31″.408	± 0″.030	(vv)	3.15

Korr. $= a + b \sin dN + c \sin dJ$

Zahl der Mess. 30 *p*, 28 *s*
Summe der Gew. 29½ *sdp*, 28 *ds*
w. F. einer Gl. ± 0″.163

Titania—Uranus.

Lickrefraktor 36 Z. 1899, 1900, 1901. Beob.: Aitken.

Beobachtung — Rechnung.

		Standard Pacific Time	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O	C	O − C n	O	C	O − C n	Zahl der Einst.	
				p	*p*	*sdp*	*s*	*s*	*ds*	*p*	*s*
1899 Mai	11	$12^h 57^m 18^s$	$18^h 28^m.1$	112°3	110°25	+1″190	33″06	33″28	−0″22	10	10
	14	12 27 6	17 58.0	233.5	232.63	+0.499	32.59	32.84	−0.25	10	10
	26	11 41 15	17 12.3	9.1	7.16	+1.130	33.10	33.39	−0.29	10	10
	27	11 53 20	17 24.4	51.4	49.25	+1.232	33.04	32.85	+0.19	10	10
Juni	2	12 24 44	17 55.7	300.3	299.37	+0.542	33.39	33.38	+0.01	10	10
	3	11 49 9	17 20.2	340.2	338.84	+0.799	33.50	33.66	−0.16	10	10
	15	12 15 26	17 46.0	118.0	116.91	+0.632	33.40	33.21	+0.19	10	10
	16	12 17 14	17 47.8	158.6	157.44	+0.680	33.46	33.57	−0.11	10	10
	21	10 56 14	16 26.5	2.2	1.33	+0.506	32.92	33.30	−0.38	10	10
	28	11 24 1	16 53.8	294.2	293.19	+0.581	33.11	32.93	+0.18	10	10
	29	9 20 22	14 50.1	331.8	330.30	+0.874	33.01	33.37	−0.36	10	10
Juli	7	10 30 30	15 59.5	304.5	303.82	+0.391	32.83	32.92	−0.09	10	10
	9	10 27 3	15 55.8	26.0	24.71	+0.734	32.41	32.60	−0.19	10	10
1900 April	27	13 54 24	19 23.5	225.5	223.89	+0.922	32.80	32 82	−0.02	8	8:
Mai	18	12 36 41	18 7.0	11.5	9.87	+0.943	32.40	33.17	−0.77	8	8
	19	12 42 36	18 13.0	54.6	51.91	+1.551	32.69	33.06	−0.37	8	8
	25	12 18 14	17 48.7	299.6	299.46	+0.082	33.65	33.53	+0.12	8	8
	27	11 56 8	17 26.6	22.2	21.08	+0.648	32.82	33.13	−0.31	8	8
Juni	15	10 50 14	16 20.5	87.6	85.86	+1.007	33.30	33.16	+0.14	8	8
Juli	22	9 47 48	15 15.2	174.2	173.43	+0.440	32.62	32.71	−0.09	8	8
1901 März	28	15 42 8	21 6.9	40.7	38.00	+1.514	32.53	32.12	+0.41	8	8:
April	11	15 20 41	20 47.3	256.8	256.30	+0.285	32.42	32.66	−0.24	8	8
	12	14 43 54	20 10.6	296.4	296.25	+0.086	32.38	32.66	−0.28	8	8:
	13	14 49 21	20 16.2	339.9	337.74	+1.224	32.12	32.48	−0.36	8	8:
	18	15 30 48	20 58.1	187.1	185.97	+0.641	32.62	32.52	+0.10	8	8
	19	15 57 14	21 24.6	230.5	228.37	+1.215	33.02	32.70	+0.32	8	8
Mai	10	15 21 9	20 50.4	17.6	15.76	+1.057	32.61	32.92	−0.31	8	8
Juni	6	12 7 23	17 37.4	49.2	47.26	+1.123	33.30	33.17	+0.13	8	8
	8	11 24 42	16 54.6	129.1	128.31	+0.460	33.39	33.38	+0.01	8	8:
	22	10 48 29	16 18.1	348.1	346.29	+1.046	33.12	33.11	+0.01	8	8:
Juli	5	11 15 7	16 43.9	165.6	164.72	+0.506	32.67	32.98	−0.31	8	8
	6	10 37 3	16 5.8	207.2	205.30	+1.088	32.55	32.81	−0.26	8	8:
	14	10 10 43	15 38.9	176.2	175.13	+0.612	32.80	32.77	+0.03	8	8

Bedingungsgleichungen.

			Koeffizienten sdp					Übrigbl. Fehler	Koeffizienten ds						Übrigbl. Fehler
			du	$e \sin w$	$e \cos w$	dN	dJ	r	du	$e \sin w$	$e \cos w$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	dN	dJ	r
1899	Mai	11	+33.″1	+31.″8	− 9.″2	+13.″6	−1.″6	+0.″207	+0.″8	+ 5.″4	+15.″8	+33.″3	−4.″1	+1.″3	−0.″246
		14	+33.6	−25.5	−21.9	+ 7.8	−0.7	−0.024	−0.2	+10.9	−12.3	+32.8	−5.5	−4.7	−0.192
		26	+33.1	+ 2.4	+33.0	+ 8.0	−6.2	+0.205	−0.8	−16.7	+ 0.4	+33.4	−0.7	−4.4	−0.065
		27	+33.6	+24.1	+23.4	+ 7.4	−1.2	+0.175	−0.4	−11.7	+11.5	+32.8	−5.4	−5.2	+0.327
	Juni	2	+33.0	−30.0	+13.9	+14.0	−2.7	−0.084	+0.8	− 7.8	−14.8	+33.3	−3.5	+1.8	+0.186
		3	+32.7	−13.7	+29.8	+11.5	−7.0	+0.008	−0.2	−15.2	− 7.2	+33.6	+0.3	−0.7	+0.066
		15	+33.0	+30.5	−12.4	+14.0	−2.4	−0.326	+0.9	+ 7.1	+15.0	+33.2	−4.0	+1.8	+0.151
		16	+32.6	+14.5	−29.2	+11.7	−7.1	−0.097	−0.1	+15.0	+ 7.6	+33.6	+0.1	−0.4	−0.153
		21	+32.7	− 1.1	+32.7	+ 8.6	−7.2	−0.312	−0.8	−16.6	− 1.4	+33.3	−0.1	−3.6	−0.151
		28	+32.9	−31.2	+10.3	+13.8	−1.9	−0.018	+1.0	− 6.1	−15.3	+33.0	−4.7	+1.7	+0.340
		29	+32.4	−18.1	+26.8	+12.6	−6.7	+0.133	+0.2	−13.9	− 9.2	+33.3	−0.3	+0.6	−0.145
	Juli	7	+32.5	−28.4	+15.7	+14.1	−3.3	−0.239	+0.9	− 8.8	−14.0	+32.9	−3.5	+2.1	+0.086
		9	+32.7	+12.0	+30.5	+ 6.4	−5.1	−0.241	−1.0	−15.6	+ 5.0	+32.6	−2.5	−5.7	+0.012
1900	April	27	+33.3	−22.2	−24.7	+ 8.8	+0.4	+0.374	+0.1	+12.1	−11.0	+32.8	−3.5	−3.9	+0.017
	Mai	18	+33.3	+ 4.7	+33.0	+ 8.1	−2.9	−0.004	−0.4	−16.5	+ 1.9	+33.2	−0.9	−4.7	−0.553
		19	+33.5	+25.5	+21.7	+ 9.2	+0.6	+0.494	+0.2	−10.6	+12.7	+33.0	−4.2	−3.6	−0.255
		25	+33.1	−29.4	+15.1	+13.2	−2.5	−0.553	+0.2	− 7.8	14.8	+33.5	−1.1	+0.6	+0.311
		27	+33.5	+11.0	+31.6	+ 7.8	−2.1	−0.341	−0.3	−15.7	+ 5.1	+33.1	−1.9	−5.0	−0.122
	Juni	15	+33.3	+33.0	+ 4.1	+12.0	+0.5	−0.036	+0.5	− 1.5	+16.5	+33.2	−4.4	−0.6	+0.166
	Juli	22	+32.4	+ 5.0	−32.1	+ 9.1	−5.3	−0.254	−0.5	+16.1	+ 3.1	+32.7	+0.3	−3.2	−0.116
1901	März	28	+32.2	+19.7	+25.5	+ 9.7	+2.1	+0.516	+0.3	−12.5	+10.0	+32.1	−2.2	−2.9	+0.540
	April	11	+32.4	−31.4	− 7.8	+12.4	+1.1	−0.238	+0.2	+ 3.8	−15.9	+32.7	−1.2	−0.3	−0.128
		12	+32.4	−29.0	+14.3	+11.9	1.9	−0.532	−0.2	− 7.0	−14.8	+32.7	+1.5	−0.8	−0.085
		13	+32.7	−12.3	+30.3	+ 9.0	−1.9	+0.424	−0.3	−14.9	6.4	+32.5	+1.3	−3.8	−0.140
		18	+32.9	− 3.3	−32.7	+ 8.4	+0.1	−0.002	0.0	+16.2	− 1.6	+32.5	−0.5	−4.6	+0.076
		19	+32.7	−24.3	−21.9	+10.6	+2.1	+0.685	+0.3	+10.7	−12.3	+32.7	−2.4	−2.2	+0.366
	Mai	10	+33.3	+ 8.8	+32.1	+ 8.6	+0.5	+0.087	+0.1	−15.8	+ 4.4	+32.9	−1.3	−4.5	−0.130
	Juni	6	+33.3	+24.0	+23.1	+10.1	+1.7	+0.076	+0.3	−11.3	+12.2	+33.2	−2.9	−2.9	+0.246
		8	+33.1	+26.2	−20.2	+11.9	−2.7	−0.443	−0.2	+10.0	+13.3	+33.3	+1.2	−1.0	−0.016
		22	+33.2	− 8.3	+32.1	+ 9.1	−2.7	+0.198	−0.3	−16.0	− 4.5	+33.1	+0.8	−3.8	+0.234
	Juli	5	+33.0	+ 9.2	−31.7	+ 9.2	−3.0	−0.234	−0.4	+15.7	+ 4.9	+33.0	+0.9	−3.6	−0.343
		6	+33.2	−13.5	−30.3	+ 8.4	0.0	+0.501	0.0	+15.0	− 6.7	+32.8	−2.1	−4.5	−0.256
		14	+33.0	+ 3.4	−32.7	+ 8.6	−2.6	+0.080	−0.3	+16.3	+ 2.0	+32.7	+0.3	−4.2	+0.002

Normalgleichungen.

	du	$2e \sin w$	$2e \cos w$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	dN	dJ	n
du	35879	−1075	+5670	+ 13	+11174	−2318	+868.09
$2e \sin w$		20016	+ 302	−2923	− 551	+ 425	+124.74
$2e \cos w$			24840	− 667	+ 1562	− 893	+227.86
$\frac{d\Delta}{\Delta}$				35953	− 1858	−2460	−117.03
dN					3895	− 637	+261.70
dJ						750	− 32.18

Auflösung Titania—Uranus 1899, 1900, 1901.

Lickrefraktor. Aitken.

Mittlere Epoche 1900.41.

	lg a	lg b	lg c			a	w. F.	(nn)	27.77
sin du	8.3774	9.4948$_n$	8.7821	Korr. Newcomb	du	+1°366	± 0°058		
$2e$ sin w	7.8497	8.2640	7.9246$_n$		e sin w	+0.00354	± 0.00067	$(vv)_{sdp}$	3.16
$2e$ cos w	7.5531	7.9846	8.3814		e cos w	+0.00179	± 0.00061	$(vv)_{ds}$	1.77
$\frac{d\Delta}{\Delta}$	7.4187$_n$	8.7283	8.8335		Δ	31"402	± 0"032	(vv)	4.93

Korr. $= a + b \sin dN + c \sin dJ$

Zahl der Mess. 33 p, 33 s
Summe der Gew. 33 sdp, 33 ds
w. F. einer Gl. ± 0"190

Titania—Uranus.

Washington-Refraktor 26 Z. 1900. Beob.: See.

Beobachtung — Rechnung.

	Wash. M. T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O p	C p	O − C n sdp	O s	C s	O − C n ds	Zahl der Einst. p	Zahl der Einst. s	
1900 April 25	$14^h 41^m.5$	$17^h 18^m.6$	138°29	137°39	+0"521	32"77	33"20	−0"43	10	10	
26	14 8.6	16 45.8	178.46	177.56	+0.518	32.56	32.98	−0.42	10	10	
Mai 5	15 36.6	18 14.5	193.62	192.43	+0.686	32.92	33.01	−0.09	10	10	
9	15 7.2	17 45.3	359.01	356.96	+1.187	33.49	33.18	+0.31	10	10	
17	13 47.4	16 25.9	326.86	325.78	+0.631	33.24	33.48	−0.24	10	10	
20	12 17.0	14 55.6	88.11	87.90	+0.122	33.61	33.28	+0.33	10	10	p +10° korr.
21	13 14.7	15 53.3	131.58	130.52	+0.620	33.28	33.53	−0.25	10	10	p −80° korr.
30	11 8.3	13 47.1	140.61	139.08	+0.896	33.27	33.56	−0.29	10	10	
Juni 1	10 27.5	13 6.3	221.86	220.66	+0.692	33.21	33.06	+0.15	10	10	
4	11 14.3	13 53.0	347.10	345.77	+0.776	33.62	33.42	+0.20	10	10	
5	11 36.1	14 14.8	28.83	27.89	+0.543	34.03	33.09	+0.94	10	10	
6	11 54.5	14 33.2	71.20	70.39	+0.468	33.12	33.12	0.00	10	10	
7	11 57.4	14 36.1	113.72	111.81	+1.115	33.58	33.46	+0.12	10	10	
8	11 43.9	14 22.6	153.67	152.22	+0.848	33.02	33.50	−0.48	10	10	
19	9 12.9	11 51.2	244.51	243.36	+0.661	32.74	32.94	−0.20	10	10	
20	10 25.8	13 4.1	288.01	286.99	+0.593	32.79	33.30	−0.51	10	10	
23	11 7.3	13 45.4	54.62	51.91	+1.554	33.06	32.86	+0.20	10	8	
24	10 35.3	13 13.3	94.77	92.79	+1.144	33.24	33.11	+0.13	10	10	
30	9 33.0	12 10.6	339.87	338.37	+0.871	33.12	33.26	−0.14	10	10:	Gew. ½
Juli 1	9 39.5	12 17.1	21.53	19.77	+1.009	32.83	32.86	−0.03	10	10	
2	9 19.8	11 57.3	62.59	61.20	+0.794	32.88	32.73	+0.15	10	10	
15	9 10.7	11 47.1	240.02	238.53	+0.844	31.90	32.45	−0.55	10	10	
16	9 12.6	11 48.9	281.03	280.36	+0.383	32.60	32.76	−0.16	10	10	
17	9 19.3	11 55.5	322.00	321.39	+0.351	33.13	33.00	+0.13	10	10	
27	8 34.1	11 9.2	15.07	13.09	+1.119	32.06	32.39	−0.33	10	10	
28	8 30.1	11 5.1	56.62	54.90	+0.964	32.62	32.11	+0.51	10	10	
30	8 20.7	10 55.5	137.81	137.42	+0.222	32.93	32.68	+0.25	10	10:	

		Wash. M. T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O p	C p	O − C n sdp	O s	C s	O − C n ds	Zahl der Einst. p	s	
1900 Juli	31	$8^h 19^m.7$	$10^h 54^m.3$	179°.85	178°.10	+0″.991	33″.03	32″.45	+0″.58	10	10	
Aug.	1	8 24.0	10 58.5	224.88	219.86	—	32.62	32.04	(+0.58)	4	3	ausgeschl.
	15	7 54.5	10 27.2	80.26	78.59	+0.925	32.43	31.74	+0.69	10	10:	
	18	7 56.2	10 28.4	202.91	201.74	+0.648	32.00	31.72	+0.28	10	10	
	19	7 49.6	10 21.7	246.18	243.58	+1.430	31.44	31.54	−0.10	10	10	Gew. ½
	25	7 40.3	10 11.6	132.32	131.43	+0.496	32.23	31.94	+0.29	10	10:	
	30	7 40.7	10 11.3	340.04	337.68	+1.309	32.18	31.79	+0.39	10	10	
	31	7 39.1	10 9.5	20.15	18.73	+0.778	32.27	31.38	+0.89	7	10	Gew. ½

Anmerkung. Die obigen Messungen sind dem Artikel von See in den Astron. Nachr. Bd. 154 S. 87 entnommen. Eine nachträgliche Neureduktion dieser Messungen hat kleine Verbesserungen für dieselben ergeben, wie aus den kürzlich erschienenen Publications of the Naval Observatory, Second Series Vol. VI, zu ersehen ist. Bei Berücksichtigung dieser kleinen Verbesserungen wären die Distanzen und damit Δ im Mittel um 0″.01 zu vergrößern, während die übrigen Resultate keine merklichen Änderungen erfahren.

Bedingungsgleichungen.

		Koeffizienten sdp					Übrigbl. Fehler v	Koeffizienten ds						Übrigbl. Fehler v
		du	$e \sin w$	$e \cos w$	dN	dJ		du	$e \sin w$	$e \cos w$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	dN	dJ	
1900 April	25	+32″.8	+22″.9	−23″.5	+11″.9	−3″.7	−0″.113	−0″.2	+11″.8	+11″.7	+33″.2	+0″.6	−0″.7	−0″.510
	26	+33.0	+ 2.2	−33.0	+ 8.6	−3.4	−0.108	−0.4	+16.4	+ 1.5	+33.0	+0.1	−4.1	−0.438
Mai	5	+33.3	− 6.2	−32.7	+ 8.0	−2.4	+0.040	−0.4	+16.3	− 2.7	+33.0	−1.1	−4.8	−0.090
	9	+33.2	− 2.7	+33.1	+ 8.7	−3.7	+0.239	−0.5	−16.5	− 1.8	+33.2	+0.1	−4.0	+0.257
	17	+33.0	−19.4	+26.7	+11.5	−4.4	−0.310	−0.2	−13.4	−10.0	+33.5	+0.7	−1.1	−0.256
	20	+33.3	+33.2	+ 2.7	+12.4	+0.3	−0.630	+0.5	− 0.9	+16.6	+33.3	−3.7	−0.3	+0.263
	21	+33.0	+25.9	−20.5	+12.7	−3.5	−0.027	0.0	+10.4	+13.1	+33.5	−0.1	+0.1	−0.344
	30	+33.0	+22.6	−24.1	+12.2	−4.2	+0.260	−0.1	+12.2	+11.5	+33.6	+0.3	−0.4	−0.370
Juni	1	+33.6	−20.8	−26.3	+ 8.3	−0.3	+0.012	−0.1	+13.0	−10.2	+33.0	−3.6	−4.5	+0.174
	4	+33.2	− 9.2	+31.8	+ 9.8	−4.8	−0.175	−0.5	−15.9	− 5.1	+33.4	+0.6	−2.9	+0.163
	5	+33.5	+14.6	+30.1	+ 7.8	−1.6	−0.169	−0.3	−15.0	+ 6.9	+33.1	−2.5	−5.0	+0.845
	6	+33.4	+31.0	+12.7	+10.7	+0.9	−0.338	+0.4	− 5.9	+15.4	+33.1	−4.7	−2.0	−0.137
	7	+33.1	+31.3	−10.8	+13.3	−1.8	+0.428	+0.4	+ 5.8	+15.7	+33.4	−2.1	+0.8	−0.001
	8	+33.0	+16.5	−28.6	+11.1	−4.9	+0.223	−0.3	+14.4	+ 8.6	+33.5	+0.7	−1.4	−0.538
	19	+33.4	−29.1	−16.4	+ 9.8	+0.8	−0.100	+0.3	+ 7.8	−14.5	+33.0	−4.9	−2.9	−0.173
	20	+33.0	−32.1	+ 8.0	+13.3	−1.3	−0.278	+0.5	− 4.5	−16.0	+33.3	−2.8	+0.7	−0.500
	23	+33.4	+25.3	+21.8	+ 8.7	+0.2	+0.697	+0.1	−10.7	+12.5	+32.9	−4.6	−4.0	+0.077
	24	+33.1	+33.1	+ 0.2	+12.5	0.0	+0.407	+0.6	+ 0.5	+16.6	+33.1	−4.1	0.0	−0.006
	30	+32.8	−13.3	+30.0	+10.6	−5.3	−0.070	−0.4	−15.1	− 7.1	+33.3	+0.6	−1.8	−0.169
Juli	1	+33.2	+10.0	+31.6	+ 7.5	−3.0	+0.089 (½)	−0.5	−15.8	+ 4.5	+32.9	−1.8	−5.1	−0.109 (½)
	2	+33.3	+28.3	+17.5	+ 9.4	+0.6	−0.034	+0.2	− 8.4	+14.1	+32.7	−5.0	−3.2	+0.020
	15	+33.0	−27.2	−18.7	+ 9.0	+0.4	+0.106	+0.1	+ 9.0	−13.5	+32.4	−5.0	−3.5	−0.522
	16	+32.7	−32.4	+ 4.0	+12.8	−0.6	−0.461	+0.6	− 2.6	−16.2	+32.7	−3.8	+0.5	−0.148

	Koeffizienten *sdp*					Übrigbl. Fehler v	Koeffizienten *ds*						Übrigbl. Fehler v
	du	$e \sin w$	$e \cos w$	dN	dJ		du	$e \sin w$	$e \cos w$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	dN	dJ	
17	+32.4	−21.4	+24.3	+12.3	−4.7	−0.565	0.0	−12.4	−10.9	+33.0	0.0	0.0	+0.116
27	+32.5	+ 6.1	+31.9	+ 7.5	−4.0	+0.206	−0.6	−16.0	+ 2.4	+32.4	−1.2	−4.8	−0.397
28	+32.7	+25.8	+20.1	+ 8.5	+0.1	+0.132	0.0	− 9.9	+12.7	+32.1	−4.9	−3.9	+0.388
30	+32.1	+22.9	−22.4	+12.5	−4.4	−0.398	+0.1	+11.5	+11.6	+32.7	−0.4	+0.4	+0.161
31	+32.2	+ 2.4	−32.1	+ 8.6	−5.2	+0.380	−0.6	+16.1	+ 1.8	+32.4	0.0	−3.6	+0.537
Aug. 15	+32.1	+31.0	+ 8.2	+10.7	+0.7	+0.171	+0.5	− 3.6	+15.4	+31.8	−5.2	−1.5	+0.556
18	+32.0	−10.6	−30.2	+ 7.1	−3.1	+0.015	−0.6	+15.1	− 4.7	+31.7	−1.9	−5.1	+0.294
19	+32.1	−27.9	−15.8	+ 9.1	+0.5	+0.699½	+0.2	+ 7.6	−13.8	+31.5	−5.3	−3.0	−0.072½
25	+31.4	+24.6	−19.4	+12.6	−3.8	−0.119	+0.2	+10.1	+12.4	+31.9	−0.9	+0.8	+0.197
30	+31.3	−13.2	+28.3	+10.4	−5.4	+0.414	−0.3	−14.3	− 7.0	+31.8	+0.5	−1.4	+0.363
31	+31.6	+ 8.9	+30.3	+ 7.1	−3.3	−0.101	−0.6	−15.2	+ 3.9	+31.4	−1.6	−4.9	+0.818½

Normalgleichungen.

	du	$2e \sin w$	$2e \cos w$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	dN	dJ	n
du	35027	+5581	+587	− 40	+10935	−2399	+825.48
$2e \sin w$		21179	+ 3	− 205	+ 2044	− 73	+ 99.49
$2e \cos w$			22609	+2770	− 276	− 67	+124.25
$\frac{d\Delta}{\Delta}$				35028	− 2088	−2342	+ 62.36
dN					3822	− 604	+242.96
dJ						611	− 66.72

Auflösung Titania—Uranus 1900.

Washington-Refraktor. See.
Mittlere Epoche 1900.50.

	lg a	lg b	lg c
$\sin du$	8.3754	9.4915$_n$	8.8515
$2e \sin w$	7.1882$_n$	8.1536$_n$	8.1655$_n$
$2e \cos w$	7.6728	8.1172	7.8527$_n$
$\frac{d\Delta}{\Delta}$	7.1468	8.7670	8.8284

Korr. $= a + b \sin dN + c \sin dJ$

Korr. Newcomb	a	w. F.
du	+1°360	± 0°070
$e \sin w$	−0.00077	± 0.00080
$e \cos w$	+0.00235	± 0.00076
Δ	31"529	± 0"039

(nn)	27.64
$(vv)_{sdp}$	3.17
$(vv)_{ds}$	4.17
(vv)	7.34

Zahl der Mess. 34 p, 34 s
Summe der Gew. 32½ sdp, 32½ ds
w. F. einer Gl. ± 0"228

Titania—Uranus.

Washington-Refraktor 26 Z. 1901. Beob.: See.

Beobachtung — Rechnung.

	Wash. M. T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O p	C p	O − C n sdp	O s	C s	O − C n ds	Zahl der Einst. p	Zahl der Einst. s
1901 April 11	$15^h 14^m.4$	$17^h 49^m.2$	251°96	251°24	+0"410	33"10	32"64	+0"46	10	10
16	15 18.3	17 53.6	100.15	97.90	+1.288	32.88	32.81	+0.07	10	10
17	14 23.6	16 59.0	138.48	137.45	+0.588	32.87	32.68	+0.19	10	10:

		Wash. M. T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O *p*	C *p*	O − C ″ *s dp*	O *s*	C *s*	O − C ″ *ds*	Zahl der Einst. *p*	 *s*
1901 April	26	14ʰ 9ᵐ.8	16ʰ 46ᵐ.1	150°.04	149°.32	+0″.412	33″.11	32″.81	+0″.30	10	10 :
	27	14 9.2	16 45.6	192.16	191.00	+0.662	32.66	32.71	−0.05	10	10
	28	14 13.2	16 49.7	233.96	232.73	+0.706	32.54	32.90	−0.36	10	10
	29	13 41.5	16 18.0	273.78	272.93	+0.491	32.92	33.08	−0.16	10	10
Mai	13	12 38.0	15 15.5	131.47	129.91	+0.904	33.30	33.21	+0.09	10	10
	14	12 37.8	15 15.4	173.32	171.35	+1.135	33.39	33.01	+0.38	10	10
	15	12 10.6	14 48.2	214.73	212.32	+1.388	32.67	33.02	−0.35	10	10
	16	12 18.4	14 56.1	254.90	253.94	+0.557	32.94	33.25	−0.31	10	10 :
	17	12 11.5	14 49.2	297.04	294.74	+1.338	33.07	33.32	−0.25	10	10 :
	22	12 20.8	14 58.7	143.08	141.67	+0.818	33.36	33.25	+0.11	10	10 :
	23	12 9.8	14 47.8	184.59	182.92	+0.904	33.21	33.06	+0.15	10	10
	28	11 29.8	14 7.9	30.33	28.85	+0.854	33.35	33.08	+0.27	10	10
Juni	3	10 41.6	13 19.8	276.10	275.62	+0.280	33.02	33.43	−0.41	10	10
	4	11 15.0	13 53.2	318.95	317.57	+0.803	33.30	33.35	−0.05	10	10
	9	10 9.4	12 47.5	162.58	162.48	+0.058	33.41	33.19	+0.22	10	10
	10	11 12.5	13 50.6	208.02	206.02	+1.154	33.32	33.08	+0.24	10	10
	18	11 7.5	13 45.5	178.34	176.50	+1.063	32.80	33.10	−0.30	10	10
	19	11 4.5	13 42.4	219.57	218.17	+0.808	33.16	33.06	+0.10	10	10
	23	10 52.8	13 30.5	24.97	23.14	+1.053	33.34	32.98	+0.36	10	10
	24	10 45.0	13 22.7	65.61	64.57	+0.602	33.41	33.15	+0.26	10	10
Juli	5	9 54.1	12 31.2	158.21	157.46	+0.432	32.62	33.03	−0.41	10	10
	9	9 12.7	11 49.5	323.04	321.77	+0.733	33.24	33.06	+0.18	10	10 :
	10	8 57.9	11 34.6	4.87	2.72	+1.230	32.80	32.79	+0.01	10	10 :
	15	8 22.2	10 58.5	210.25	208.74	+0.860	32.57	32.65	−0.08	10	10
	20	9 11.1	11 46.9	58.47	57.21	+0.717	32.55	32.63	−0.08	10	10 :
	21	8 21.5	10 57.2	99.20	97.08	+1.215	33.00	32.85	+0.15	10	10
	23	8 27.8	11 3.3	181.23	179.47	+1.000	32.81	32.57	+0.24	10	10 :
Aug.	2	8 13.6	10 48.0	234.05	233.14	+0.513	32.28	32.29	−0.01	10	10 :
	7	8 16.9	10 50.7	80.43	80.07	+0.203	32.78	32.32	+0.46	10	10
	8	8 2.1	10 35.8	123.06	120.66	+1.359	32.61	32.46	+0.15	10	10
	9	7 59.8	10 33.3	162.56	161.63	+0.524	32.46	32.27	+0.19	10	10
	17	7 56.2	10 28.7	132.55	132.52	+0.017	31.94	32.19	−0.25	10	10
	18	8 36.2	11 8.5	175.54	174.81	+0.407	31.93	31.94	−0.01	10	10
	19	7 42.0	10 14.2	215.23	214.98	+0.139	32.20	31.78	+0.42	10	10
	20	7 40.9	10 13.0	257.60	256.60	+0.558	31.84	31.95	−0.11	10	10
Sept.	4	7 18.8	9 48.8	157.58	155.49	+1.152	31.12	31.58	−0.46	10	10
	6	7 20.3	9 50.0	239.83	238.82	+0.553	31.40	31.38	+0.02	10	10

Anmerkung. Die gemessenen *p*, *s* nach See, Astr. Nachr. Bd. 159, S. 213. Nach der neuen Reduktion der Messungen, Publ. Naval Observatory, Second Series Vol. VI, vgl. S. 24, ist für die erste Hälfte April 11—Juni 4 die konstante Korrektion *dp* = −0°.10 anzubringen, während die Korrektion für die zweite Hälfte verschwindend ist. Im Mittel wäre danach *dp* = −0°.05.

Bedingungsgleichungen.

		Koeffizienten *sdp*					Übrigbl. Fehler v	Koeffizienten *ds*						Übrigbl. Fehler v
		du	$e \sin w$	$e \cos w$	dN	dJ		du	$e \sin w$	$e \cos w$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	dN	dJ	
1901 April	11	+32″4	−30″6	−10″6	+12″1	+1″4	−0″301	+0″2	+ 5″1	−15″5	+32″7	−1″5	−0″6	+0″471
	16	+32.5	+32.2	− 4.4	+12.7	−0.6	+0.481	0.0	+ 2.2	+16.3	+32.8	+0.3	0.0	−0.014
	17	+32.7	+22.0	−24.1	+10.5	−2.5	−0.147	−0.3	+11.8	+11.3	+32.7	+1.9	−2.3	+0.119
	26	+32.9	+16.8	−28.3	+ 9.7	−2.4	−0.310	−0.3	+14.0	+ 8.6	+32.8	+1.7	−3.2	+0.235
	27	+33.0	− 6.1	−32.4	+ 8.5	+0.4	−0.021	+0.1	+16.1	− 3.1	+32.7	−0.9	−4.5	−0.088
	28	+32.9	−25.9	−20.2	+10.9	+2.1	+0.018	+0.3	+ 9.8	−13.2	+32.9	−2.4	−2.0	−0.366
	29	+32.7	−32.7	+ 1.5	+12.8	−0.2	−0.265	0.0	− 0.8	−16.5	+33.0	−0.3	0.0	−0.135
Mai	13	+33.0	+25.4	−21.1	+11.4	−2.6	+0.147	−0.3	+10.4	+13.0	+33.2	+1.6	−1.5	+0.014
	14	+33.3	+ 5.2	−32.9	+ 8.7	−1.5	+0.434	−0.2	+16.3	+ 2.8	+33.0	+0.5	−4.4	+0.328
	15	+33.3	−17.5	−28.3	+ 9.3	+1.5	+0.698	+0.2	+13.9	− 8.6	+33.0	−2.3	−3.7	−0.371
	16	+33.0	−31.6	− 9.6	+12.3	+1.2	−0.172	+0.3	+ 4.5	−16.0	+33.3	−1.9	−0.6	−0.300
	17	+33.0	−30.1	+13.6	+12.4	−1.9	+0.533	−0.2	− 6.7	−15.2	+33.3	+0.9	−0.5	−0.217
	22	+33.2	+20.7	−25.9	+10.6	−2.9	+0.078	−0.3	+12.8	+10.6	+33.3	+1.7	−2.3	+0.039
	23	+33.3	− 1.4	−33.3	+ 8.5	−0.8	+0.270	−0.1	+16.5	− 0.6	+33.0	−0.3	−4.6	+0.107
	28	+33.4	+15.7	+29.4	+ 9.0	+1.0	−0.065	+0.2	−14.5	+ 7.9	+33.1	−2.1	−4.1	+0.228
Juni	3	+33.1	−33.0	+ 2.7	+12.9	−0.4	−0.488	+0.1	− 1.5	−16.6	+33.4	−0.8	+0.1	−0.386
	4	+33.2	−22.6	+24.3	+11.1	−3.0	−0.050	−0.3	−12.0	−16.6	+33.3	+1.5	−1.8	−0.020
	9	+33.3	+10.3	−31.7	+ 9.3	−2.6	−0.654	−0.3	+15.7	+ 5.5	+33.2	+1.1	−3.7	+0.163
	10	+33.4	−14.1	−30.3	+ 8.8	+0.6	+0.464	+0.1	+14.9	− 7.1	+33.1	−2.1	−4.3	+0.214
	18	+33.3	+ 2.5	−33.2	+ 8.6	−2.0	+0.365	−0.3	+16.5	+ 1.5	+33.1	+0.1	−4.4	−0.347
	19	+33.3	−20.1	−26.6	+ 9.3	+1.2	+0.115	+0.2	+13.1	−10.1	+33.0	−2.7	−3.7	+0.084
	23	+33.3	+12.5	+30.9	+ 8.5	+0.1	+0.134	0.0	−15.3	+ 6.2	+33.0	−1.9	−4.5	+0.329
	24	+33.2	+29.6	+15.0	+11.3	+1.5	−0.282	+0.4	− 7.2	+15.0	+33.1	−3.0	−1.6	+0.181
Juli	5	+33.0	+13.1	−30.3	+ 9.8	−3.3	−0.280	−0.4	+15.0	+ 6.9	+33.0	+1.1	−3.0	−0.470
	9	+32.8	−20.7	+25.4	+11.1	−3.4	−0.099	−0.3	−12.6	+10.7	+33.0	+1.2	−1.7	+0.208
	10	+33.0	+ 1.0	+33.0	+ 8.4	−1.9	+0.325	−0.3	−16.4	+ 0.2	+32.8	−0.4	−4.5	+0.005
	15	+33.0	−15.2	−29.3	+ 1.5	+0.1	+0.177	0.0	−14.5	− 7.5	+32.7	−2.3	−4.4	−0.101
	20	+32.8	+27.1	+18.5	+10.3	+1.4	−0.166	+0.3	− 9.0	+13.6	+32.7	−3.4	−2.4	−0.149
	21	+32.6	+32.4	− 3.1	+17.7	−0.4	+0.402	+0.3	+ 1.8	+16.3	+32.8	−1.6	+0.2	+0.060
	23	+32.7	+ 0.9	−32.7	+ 8.4	−2.4	+0.315	−0.3	+16.3	+ 0.8	+32.6	−0.1	−4.3	+0.198
Aug.	2	+32.6	−25.5	−20.3	+ 9.8	+1.2	−0.176	+0.3	+ 9.8	−12.8	+32.3	−3.4	−2.8	−0.015
	7	+32.3	+31.6	+ 6.5	+11.8	+0.8	−0.633	+0.4	− 2.9	+15.9	+32.3	−2.9	−0.6	+0.374
	8	+32.1	+28.0	−15.7	+12.4	−2.4	+0.604	0.0	+ 7.9	+14.2	+32.4	0.0	0.0	+0.067
	9	+32.2	+10.8	−30.3	+ 9.4	−3.5	−0.167	−0.4	+15.1	+ 5.7	+32.3	+0.9	−3.1	+0.134
	17	+31.8	+24.0	−21.0	+11.6	−3.2	−0.711	−0.2	+10.5	+12.2	+32.2	+0.7	−0.7	−0.326
	18	+32.1	+ 3.5	−31.8	+ 8.5	−2.9	−0.267	−0.4	+15.8	+ 2.1	+31.9	+0.3	−4.0	−0.055
	19	+32.1	−17.7	−26.8	+ 8.4	+0.3	−0.528	+0.1	+13.2	− 8.8	+31.8	−2.6	−4.1	+0.405
	20	+31.9	−30.8	− 8.4	+11.4	+0.9	−0.149	+0.4	+ 3.8	−15.5	+31.9	−3.1	−0.9	−0.101
Sept.	4	+31.5	+13.6	−28.4	+ 9.7	−3.6	+0.469	−0.4	+14.1	+ 7.1	+31.5	+1.0	−2.5	+0.517
	6	+31.5	−26.5	−17.1	+ 9.9	+1.3	−0.121	+0.3	+ 8.3	−13.3	+31.4	−3.4	−2.3	+0.018

Normalgleichungen.

	du	$2e \sin w$	$2e \cos w$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	dN	dJ	n
du	42988	− 833	−15944	− 37	+13451	−1090	+983.71
$2e \sin w$		+25104	+ 344	+ 7833	− 319	−1351	+ 17.26
$2e \cos w$			+28608	− 316	− 4341	+ 685	−291.33
$\frac{d\Delta}{\Delta}$				+42903	− 942	−3266	+ 44.56
dN					+ 4457	− 259	+303.70
dJ						506	− 32.54

Auflösung Titania—Uranus 1901.

Washington-Refraktor. See.

Mittlere Epoche 1901.47.

	lg a	lg b	lg c
$\sin du$	8.3822	9.5097$_n$	8.3388
$2e \sin w$	7.0687	7.6612$_n$	8.5159
$2e \cos w$	7.5123	8.4496$_n$	8.0574$_n$
$\frac{d\Delta}{\Delta}$	6.9393	8.3482	8.8455

Korr. $= a + b \sin dN + c \sin dJ$

Korr. Newcomb		a	w. F.
	du	+1°381	±0°065
	$e \sin w$	+0.00059	±0.00076
	$e \cos w$	+0.00163	±0.00072
	Δ	31"512	±0"034

oder:

du +1°331 ±0°065. wenn auf die Verbesserung der p in Vol. VI Rücksicht genommen wird. Vgl. obige Anm.

(nn)	30.40
$(vv)_{sdp}$	5.17
$(vv)_{ds}$	2.43
(vv)	7.60

Zahl der Mess. 40 p, 40 s

Summe der Gew. 40 sdp, 40 ds

w. F. einer Gl. ±0"217

Titania—Uranus.

Washington-Refraktor 36 Z. 1902. Beob.: See.

Beobachtung — Rechnung.

			Wash. M. T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O p	C p	O − C n sdp	O s	C s	O − C n ds	Zahl der Einst. p	s
1902	April	30	$14^h 41^m 15^s$	$17^h 16^m.9$	288°77	288°60	+0"094	32"89	32"69	+0"20	10	10
	Mai	1	14 32 45	17 8.5	330.18	330.03	+0.085	33.21	32.49	+0.72	10	10
		4	14 29 45	17 5.8	94.03	93.82	+0.118	32.94	32.87	+0.07	10	10
		5	14 26 52	17 3.0	135.66	135.15	+0.292		--	---	10	10
		6	14 28 0	17 4.2	177.33	177.04	+0.166	32.95	32.62	+0.33	10	10
		8	14 32 12	19 8.5	258.42	259.49	−0.619	32.82	33.02	−0.20	10	10
		9	14 7 0	16 43.4	299.64	299.92	−0.163	32.46	32.79	−0.33	10	10
		11	14 21 54	16 58.5	24.30	23.81	+0.280	33.12	32.88	+0.24	10	10
		15	14 2 24	16 39.2	189.06	188.65	+0.232	32.57	32.82	−0.25	10	10
		28	13 18 8	15 45.5	4.74	4.80	−0.032	32.73	32.93	−0.20	10	10
		29	13 9 3	15 46.4	46.53	46.20	+0.189	33.89	33.20	+0.69	10	10
		30	13 17 0	15 54.5	88.67	87.37	+0.754	33.70	33.25	+0.45	10	10
		31	13 23 30	16 1.0	127.82	128.77	−0.548	33.53	33.02	+0.51	10	10

	Wash. M. T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O p	C p	O − C n $s\,dp$	O s	C s	O − C n ds	Zahl der Einst. p	Zahl der Einst. s
1902 Juni 1	$13^h\ 8^m\ 0^s$	$15^h\,45^m.5$	169°82	170°09	−0″155	32″77	32″91	−0″14	10	10
2	13 4 30	15 42.0	211.98	211.60	+0.219	33.05	33.13	−0.08	5	10
4	13 6 45	15 44.4	293.36	293.74	−0.222	33.02	33.15	−0.13	10	10
5	13 5 0	15 42.6	334.25	335.30	−0.602	33.07	32.93	+0.14	10	10
7	13 16 30	15 54.1	59.01	58.61	+0.229	33.63	33.28	+0.35	10	10
8	12 55 0	15 32.6	99.45	98.95	+0.290	33.16	33.25	−0.09	10	10
9	12 42 52	15 20.5	141.50	139.96	+0.885	32.81	33.00	−0.19	10	10
10	12 37 26	15 15.0	181.38	181.59	−0.122	33.17	32.97	+0.20	10	10
11	12 37 45	15 15.4	222.49	223.08	−0.345	33.29	33.20	+0.09	10	10
17	11 58 30	14 36.0	109.56	109.56	−0.002	33.10	33.19	−0.09	10	10
24	11 25 0	14 2.3	40.26	38.76	+0.866	32.56	33.10	−0.54	10	10
Juli 11	9 47 30	12 24.0	18.75	19.05	−0.173	32.70	32.78	−0.08	10	10
12	9 52 0	12 28.3	60.94	60.53	+0.235	33.30	32.98	+0.32	10	10
13	9 53 45	12 30.1	101.53	101.54	−0.008	33.31	32.99	+0.32	10	10
14	9 46 30	12 22.7	140.56	142.60	−1.165	33.06	32.75	+0.31	10	10
22	9 26 0	12 1.5	111.83	112.91	−0.621	33.04	32.78	+0.26	10	10
31	8 19 0	10 53.6	123.83	123.16	+0.381	32.58	32.54	+0.04	10	10
Aug. 2	8 16 15	10 50.6	205.64	206.32	−0.384	32.25	32.35	−0.10	10	10
3	8 30 15	11 4.5	246.29	248.02	−0.985	32.52	32.54	−0.02	10	10
4	8 12 30	10 46.7	286.86	288.48	−0.920	32.85	32.52	+0.33	10	10
7	8 2 30	10 36.3	51.91	52.73	−0.466	32.96	32.38	+0.58	10	10
8	8 17 30	10 51.2	94.81	94.19	+0.351	32.71	32.46	+0.25	10	10
20	8 22 38	10 54.8	229.72	230.90	−0.660	32.11	32.02	+0.09	10	10
21	7 37 0	10 9.0	269.88	270.63	−0.421	32.21	32.12	+0.09	10	10
22	7 54 22	10 26.3	310.75	312.20	−0.809	32.53	31.94	+0.59	10	10
23	7 52 15	10 24.0	353.62	353.71	−0.053	32.41	31.74	+0.67	5	10
24	7 35 0	10 6.6	32.78	34.91	−1.183	31.89	31.82	+0.07	10	10
25	8 3 52	10 35.4	74.83	76.93	−1.175	32.00	32.00	0.00	10	10
28	7 35 30	10 6.6	201.52	200.23	+0.709	31.93	31.64	+0.29	10	10
30	7 31 22	10 2.2	284.29	282.48	+1.008	32.20	31.85	+0.35	10	10
31	7 31 0	10 1.7	321.58	323.65	−1.145	31.96	31.62	+0.34	10	10
Sept. 1	7 31 0	10 1.5	7.21	5.34	+1.025	32.06	31.48	+0.58	10	10

Bedingungsgleichungen.

	Koeffizienten $s\,dp$			Übrigbl. Fehler v	Koeffizienten ds			Übrigbl. Fehler v
	du	dN	dJ		$\frac{d\Delta}{\Delta}$	dN	dJ	
1902 April 30	+32″7	+11″8	−1″3	+0″05	+32″7	+3″1	−1″2	+0″09
Mai 1	+32.9	+ 8.6	−0.5	+0.04	+32.5	+2.4	−4.6	+0.61
4	+32.6	+12.8	−0.4	+0.07	+32.9	+2.2	−0.2	−0.04
5	+32.9	+ 9.7	−1.4	+0.25	—	—	—	—
6	+33.0	+ 8.3	+1.8	+0.12	+32.6	+0.2	−4.9	+0.22
8	+32.6	+13.2	+0.8	−0.66	+33.0	+1.0	−0.2	−0.31

			Koeffizienten *sdp*			Übrigbl. Fehler *r*	Koeffizienten *ds*			Übrigbl. Fehler *r*
			du	*dN*	*dJ*		$\frac{d\Delta}{\Delta}$	*dN*	*dJ*	
1902	Mai	9	+32″.9	+11″.0	−1″.7	−0″.21	+32″.8	+3″.3	−2″.2	−0″.44
		11	+32.9	+ 9.9	+3.4	+0.23	+32.9	−1.4	−3.3	+0.13
		15	+33.0	+ 8.8	+2.6	+0.19	+32.8	−0.6	−4.4	−0.36
		28	+33.2	+ 8.6	+2.0	−0.08	+32.9	−0.4	−4.7	−0.31
		29	+33.0	+11.6	+3.1	+0.14	+33.2	−1.5	−1.5	+0.58
		30	+32.9	+13.1	+0.1	+0.71	+33.3	+1.2	0.0	+0.34
		31	+33.2	+10.5	−1.8	−0.59	+33.0	+3.0	−2.7	+0.40
	Juni	1	+33.3	+ 8.4	+0.6	−0.20	+32.9	+0.8	−5.0	−0.25
		2	+33.1	+10.4	+3.2	+0.17	+33.1	−1.6	−2.8	−0.19
		4	+33.1	+11.8	−1.6	−0.27	+33.2	+2.8	−1.4	−0.24
		5	+33.3	+ 8.8	−0.7	−0.65	+32.9	+1.9	−4.6	+0.03
		7	+33.0	+12.4	+2.5	+0.18	+33.3	−0.1	−0.7	+0.24
		8	+33.0	+12.7	−0.8	+0.24	+33.3	+1.9	−0.4	−0.20
		9	+33.2	+ 9.7	−1.7	+0.84	+33.0	+2.7	−3.5	−0.30
		10	+33.3	+ 8.5	+1.4	−0.17	+33.0	−0.1	−4.8	+0.09
		11	+33.0	+11.2	+3.1	−0.39	+33.2	−1.7	−1.9	−0.02
		17	+33.0	+12.2	−1.5	+0.24	+33.2	+2.3	−0.9	−0.29
		24	+33.0	+10.7	+2.9	+1.11	+33.1	−1.8	−2.5	−0.74
	Juli	11	+33.0	+ 9.0	+2.0	+0.07	+32.8	−1.3	−4.1	−0.28
		12	+32.7	+12.0	+2.2	+0.48	+33.0	−1.[illegible]	−0.9	+0.12
		13	+32.7	+12.6	−0.9	+0.24	+33.0	+1.3	−0.3	+0.12
		14	+32.9	+ 9.8	−2.0	−0.92	+32.7	+2.3	−3.3	+0.11
		22	+32.6	+12.0	−1.7	−0.38	+32.8	+1.8	−0.9	+0.06
		31	+32.4	+11.3	−2.1	+0.62	+32.5	+2.1	−1.5	−0.16
	Aug.	2	+32.5	+ 9.2	+2.0	−0.14	+32.4	−1.7	−3.7	−0.30
		3	+32.3	+12.1	+1.6	−0.74	+32.5	−1.4	−0.6	−0.22
		4	+32.3	+12.2	−1.4	−0.68	+32.5	+1.4	−0.5	+0.13
		7	+32.3	+11.1	+2.3	−0.22	+32.4	−2.0	−1.6	+0.38
		8	+32.1	+12.6	−0.3	+0.60	+32.4	+0.4	0.0	+0.05
		20	+32.0	+10.8	+2.3	−0.42	+32.0	−2.1	−1.8	−0.11
		21	+31.8	+12.5	0.0	−0.18	+32.1	+0.1	0.0	−0.11
		22	+31.9	+10.5	−2.3	−0.56	+31.9	+2.1	−2.1	+0.39
		23	+32.1	+ 8.2	−0.5	+0.19	+31.7	+0.5	−4.5	+0.47
		24	+31.9	+ 9.6	+2.2	−0.94	+31.8	−2.0	−3.1	−0.13
		25	+31.7	+12.3	+1.0	−0.93	+32.0	−0.9	−0.2	−0.20
		28	+31.9	+ 8.6	+1.5	+0.03	+31.6	−1.4	−4.0	+0.09
		30	+31.6	+12.2	−1.0	+1.25	+31.8	+0.9	−0.2	+0.15
		31	+31.7	+ 9.6	−2.1	−0.90	+31.6	+2.0	−3.0	+0.14
	Sept.	1	+31.8	+ 8.1	+0.5	+1.27	+31.5	−0.4	−4.5	+0.38

Auflösung Titania—Uranus 1902.

Washington-Refraktor. See.

Mittlere Epoche 1902.50.

In den Kolumnen *C* und *O−C* ist hier die vorläufige Verbesserung *δu* der Newcombschen Tafel berücksichtigt (vgl. S. 11). Die Messungen sind, wie man sieht, namentlich in der zweiten Hälfte so unsicher, daß eine strenge Auflösung nicht lohnend erscheint. In den Bedingungsgleichungen sind daher die Koeffizienten von $e \sin w$ und $e \cos w$ fortgelassen. Durch einfache Mittelbildung erhält man alsdann aus den Gleichungen für sdp

1. für April 30—Juni 11 $du = +0^{\circ}.081 + (9.5041_n)\, dN^{\circ} + (8.8428_n)\, dJ^{\circ}$ 22 Mess. w. F. $\pm 0^{\circ}.097$
2. » Juni 17—Sept. 1 $du = -0^{\circ}.432 + (9.5260_n)\, dN^{\circ} + (7.8016_n)\, dJ^{\circ}$ 23 Mess. w. F. $\pm 0^{\circ}.182$

und im Mittel, wenn man der ersten Hälfte dreifaches Gewicht erteilt, bei Vernachlässigung von dN, dJ:

$$du = -0^{\circ}.045.$$

Indem $\delta u = +1^{\circ}.420$ angenommen war, erhält man daraus für die Verbesserung der Newcombschen Tafel:

Korr. Newcomb $du = +1^{\circ}.375$ w. F. $\pm 0^{\circ}.09$.

Aus den Messungen der Distanzen folgt, bei Vernachlässigung von dN, dJ:

1. für April 30—Juni 11 $\frac{d\Delta}{\Delta} = +0.00344$ 21 Mess. w. F. ± 0.00141
2. » Juni 17—Sept. 1 $\frac{d\Delta}{\Delta} = +0.00626$ 23 Mess. w. F. ± 0.00122

oder im Mittel aus allen Messungen, bei gleichem Gewicht:

$$\frac{d\Delta}{\Delta} = +0.00490 \quad \pm 0.00092 \qquad \Delta = 31''.639 \quad \pm 0''.029.$$

Titania—Uranus.

Lickrefraktor 36 Z. 1903, 1904, 1905. Beob.: Aitken.

Beobachtung — Rechnung.

		Standard Pacific T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O p	C p	O − C n sdp	O s	C s	O − C n ds	Zahl der Einst. p	s
1903 Mai	2	$15^h 34^m 23^s$	$21^h\ 1^m.1$	351°.10	348°.90	+1".237	31".97	32".22	−0".25	8	8
	28	14 41 56	20 10.4	344.40	342.75	+0.937	32.47	32.55	−0.08	8	8
	29	14 32 14	20 0.7	25.70	23.85	+1.066	32.65	33.01	−0.36	8	8
	31	11 52 12	17 20.8	102.50	100.99	+0.863	32.89	32.74	+0.15	8	8
Juni	2	12 16 22	17 45.1	188.15	185.51	+1.513	32.85	32.84	+0.01	8	8
	4	12 51 48	18 20.5	268.55	268.17	+0.218	32.79	32.92	−0.13	8	8
	12	11 28 59	16 57.8	238.30	237.17	+0.654	32.77	33.18	−0.41	8	8
	13	11 47 10	17 16.0	279.75	278.63	+0.642	32.81	32.85	−0.04	8	8
	26	11 55 32	17 24.2	98.20	96.66	+0.884	33.13	32.88	+0.25	8	8
	27	11 46 56	17 15.6	139.70	138.16	+0.876	32.61	32.59	+0.02	8	8
Juli	10	11 3 5	16 31.1	314.75	314.55	+0.113	32.49	32.51	−0.02	8	8
	11	11 7 17	16 35.3	358.00	356.62	+0.785	32.47	32.60	−0.13	8	8
	17	10 51 16	16 18.9	245.05	243.84	+0.695	32.71	32.91	−0.20	8	8
	25	10 9 5	15 36.0	214.90	213.91	+0.565	32.41	32.68	−0.27	8	8
	31	10 5 39	15 32.0	102.25	101.21	+0.589	32.43	32.44	−0.01	8	8
Aug.	7	9 4 57	14 30.6	31.90	29.76	+1.209	32.31	32.37	−0.06	8	8
	19	8 51 49	14 15.9	166.90	165.45	+0.803	31.71	31.75	−0.04	8	8
	20	8 55 21	14 19.4	208.20	207.10	+0.614	32.14	32.01	+0.13	8	8
	21	9 14 6	14 38.0	249.70	248.49	+0.678	31.72	32.13	−0.41	8	8

	Mt. Ham. Sid. T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O p	C p	O − C n sdp	O s	C s	O − C n ds	Zahl der Einst. p	s
1904 Juli 13	$18^h\ 0^m\ 38^s$	$16^h\ 8^m.0$	92°06	90°33	+0″977	32″45	32″36	+0″09	8	8
16	18 26 13	16 21.5	217.32	215.71	+0.923	32.96	32.86	+0.10	8	8
17	18 43 48	16 35.0	258.48	256.61	+1.062	32.54	32.54	0.00	8	8
30	19 2 30	16 1.6	75.26	73.43	+1.034	32.50	32.39	+0.11	8	8
1905 Juni 8	19 7 55	19 33.6	61.40	59.42	+1.118	31.80	32.37	−0.57	8	8
9	19 48 53	20 10.6	105.06	102.56	+1.367	30.99	31.33	−0.34	8	8
24	18 57 23	18 20.4	2.89	1.65	+0.706	32.24	32.63	−0.39	8	8
Juli 9	18 18 56	16 42.8	257.86	256.92	+0.526	31.96	32.04	−0.08	8	8
20	18 27 59	16 8.0	354.88	353.46	+0.799	32.02	32.25	−0.23	8	8
28	19 2 14	16 10.1	324.74	324.12	+0.341	31.40	31.50	−0.10	8	8
30	18 44 2	15 44.0	45.49	44.57	+0.522	32.25	32.52	−0.27	8	8
Aug. 5	19 10 13	15 45.9	294.08	293.10	+0.535	31.36	31.19	+0.17	8	8
31	19 30 31	14 20.9	286.60	285.68	+0.493	30.39	30.71	−0.32	8	8

Bedingungsgleichungen.

	Koeffizienten sdp					Übrigbl. Fehler v	Koeffizienten ds						Übrigbl. Fehler v
	du	e sin w	e cos w	dN	dJ		du	e sin w	e cos w	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	dN	dJ	
1903 Mai 2	+32″5	− 5″0	+32″1	+ 7″7	+3″7	+0″48	+0″6	−16″0	− 1″8	+32″2	+0″8	−5″6	−0″07
28	+33.0	− 8.6	+31.8	+ 7.7	+2.6	+0.19	+0.5	−15.8	− 3.8	+32.6	+1.5	−5.8	+0.10
29	+32.6	+14.3	+29.3	+10.8	+5.3	+0.19	+0.5	−14.6	+ 7.7	+33.0	−1.1	−2.5	−0.17
31	+32.9	+31.9	− 8.0	+12.1	−1.0	−0.16	−0.6	+ 3.4	+16.0	+32.7	+4.6	−1.2	+0.26
Juni 2	+32.8	− 4.2	−32.5	+ 8.9	+4.6	+0.70	+0.6	+16.2	− 2.7	+32.8	−0.6	−4.5	0.00
4	+32.7	−32.7	+ 0.7	+13.2	−0.1	−0.40	−0.6	+ 0.3	−16.5	+32.9	+3.7	−0.1	−0.02
12	+32.6	−28.1	−16.5	+13.5	+3.2	0.00	−0.1	+ 8.5	−14.3	+33.2	+0.5	+0.3	−0.36
13	+32.9	−32.3	+ 6.5	+12.4	−0.8	+0.02	−0.6	− 2.7	−16.2	+32.9	+4.2	−0.9	+0.08
26	+32.8	+32.4	− 5.3	+12.6	−0.7	−0.14	−0.6	+ 2.1	+16.3	+32.9	+3.8	−0.7	+0.37
27	+33.1	+21.1	−25.5	+ 8.8	−0.5	−0.10	−0.1	+12.5	+10.5	+32.6	+3.6	−4.7	+0.06
Juli 10	+33.0	−22.6	+24.0	+ 9.2	−0.9	−0.56	−0.2	−11.7	−11.3	+32.5	+3.8	−4.2	+0.15
11	+32.9	− 1.1	+32.9	+ 8.3	+3.0	0.00	+0.5	−16.3	− 0.1	+32.6	+0.2	−5.1	+0.06
17	+32.4	−29.6	−13.3	+13.3	+2.4	+0.06	−0.1	+ 6.9	−15.0	+32.9	+0.5	+0.3	−0.14
25	+32.4	−18.7	−26.4	+11.1	+4.2	−0.15	+0.4	+13.1	− 9.8	+32.7	−1.3	−1.9	−0.26
31	+32.4	+31.5	− 7.5	+12.2	−1.0	−0.42	−0.5	+ 3.3	+15.9	+32.4	+3.4	−0.9	−0.08
Aug. 7	+32.1	−16.6	+27.5	+10.5	+4.1	+0.32	+0.4	−13.6	+ 8.7	+32.4	−1.4	−2.4	+0.12
19	+32.1	+ 7.3	−31.3	+ 7.9	+1.3	−0.07	+0.2	+15.5	+ 3.4	+31.8	+1.1	−5.1	−0.04
20	+31.8	−15.1	−28.0	+10.2	+4.0	−0.11	+0.4	+13.9	− 8.0	+32.0	−1.3	−2.7	+0.13
21	+31.7	−29.8	−10.7	+13.0	+1.8	+0.06	−0.1	+ 5.6	−15.1	+32.1	+0.6	+0.2	−0.35
1904 Juli 13	+32.6	+32.4	− 2.6	+12.9	−0.4	−0.04	−0.9	+ 0.4	+16.2	+32.4	+5.5	−0.5	+0.22
16	+32.0	−20.1	−24.8	+12.7	+5.9	+0.23	+0.1	+12.7	−10.4	+32.9	−0.3	−0.4	+0.12
17	+32.3	−31.8	− 5.2	+14.0	+1.0	+0.45	−0.8	+ 3.4	−15.9	+32.5	+4.1	+0.7	+0.09
30	+32.1	+31.3	+ 7.0	+14.0	+1.3	+0.04	−0.7	− 4.3	+15.6	+32.4	+3.5	+0.8	+0.27

			Koeffizienten sdp					Übrigbl. Fehler v	Koeffizienten ds						Übrigbl. Fehler v
			du	$e \sin w$	$e \cos w$	dN	dJ		du	$e \sin w$	$e \cos w$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	dN	dJ	
1905	Juni	8	+31″8	+29″1	+12″7	+15″7	+3″5	+0″15	−1″5	− 7″9	+14″2	+32″4	+4″7	+2″3	−0″37
		9	+32.8	+31.0	−10.6	+10.6	−0.8	+0.35	−0.7	+ 4.4	+15.1	+31.3	+8.9	−3.2	−0.24
		24	+31.7	+ 3.3	+31.5	+ 9.0	+9.0	−0 07	+1.2	−16.1	+ 2.9	+32.7	−0.2	−4.3	−0.22
	Juli	9	+32.2	−32.0	− 3.7	+14.4	+0.7	−0.08	−1.5	+ 3.3	−15.7	+32.1	+6.7	+0.8	+0.03
		20	+31.8	− 1.5	+31.8	+ 7.7	+7.7	+0.04	+1.3	−16.2	+ 0.6	+32.3	+0.5	−5.6	−0.06
		28	+32.4	−17.1	+27.5	+ 6.3	+3.3	−0.35	+1.0	−13.9	− 7.4	+31.5	+4.5	−7.3	+0.06
		30	+31.3	+24.0	+20.1	+14.7	+5.8	−0.39	−0.7	−10.9	+12.0	+32.5	+1.6	+1.5	−0.07
	Aug.	5	+32.4	−28.6	+15.4	+ 9.2	−0.5	−0.09	−0.3	− 7.1	−13.9	+31.2	+7.6	−4.3	+0.31
		31	+31.8	−29.7	+11.4	+10.2	−0.8	−0.11	−0.6	− 4.9	−14.6	+30.7	+7.5	−3.0	−0.19

Normalgleichungen.

	du	$2e \sin w$	$2e \cos w$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	dN	dJ	n
du	33568	−2721	+2873	− 111	+11432	+2234	+820.94
$2e \sin w$		22493	+ 179	−1492	− 939	+ 132	+ 75.13
$2e \cos w$			19458	−1192	+ 488	+ 795	+ 62.35
$\frac{d\Delta}{\Delta}$				33539	+ 2597	−2251	−118.96
dN					4587	+ 592	+274.14
dJ						744	+ 67.76

Auflösung Titania—Uranus 1903, 1904, 1905.

Lickrefraktor. Aitken.

Mittlere Epoche 1904.21.

	lg a	lg b	lg c			a	w. F.	(nn)	24.87
sin du	8.3981	9.5347_n	8.8110_n	Korr. Newcomb	du	+1°433	±0°051		
$2e \sin w$	7.7896	7.7091_n	7.9511_n		$e \sin w$	+0.00308	±0.00055	$(vv)_{sdp}$	2.36
$2e \cos w$	6.8689_n	8.3187	8.4318_n		$e \cos w$	−0.00037	±0.00059	$(vv)_{ds}$	1.19
$\frac{d\Delta}{\Delta}$	7.5022_n	8.8925_n	8.8359		Δ	31″385	±0″028	(vv)	3.55

Korr. $= a + b \sin dN + c \sin dJ$

Zahl der Mess. 32 p, 32 s
Summe der Gew. 32 sdp. 32 ds
w. F. einer Gl. ±0″164

Titania—Uranus.

Washington-Refraktor 26 Z. 1903, 1904. Beob.: Dinwiddie, Frederick und Hammond.

Beobachtung — Rechnung.

			Wash. M. T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O p	C p	O − C n sdp	O s	C s	O − C n ds	Beob.	Zahl d. Einst. p	s
1903	April	28	$15^h 33^m 16^s$	$18^h\ 7^m8$	181°78	178°55	+1″817	30″48	32″25	−1″77	D.	10	10:
		29	15 46 6	18 20.7	219.86	219.75	+0.063	30.99	32.65	−1.66	"	10	10
	Mai	28	14 4 2	16 40.7	337.32	336.63	+0.391	32.33	32.52	−0.19	"	9	10:

			Wash. M. T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O *p*	C *p*	O − C *n* *sdp*	O *s*	C *s*	O − C *n* *ds*	Beob.	Zahl d. Einst. *p*	*s*
1903	Juni	3	$13^h\ 0^m\ 13^s$	$15^h\ 37^m.1$	228°.58	222°.77	—	31″.80	33″.15	−1″.35	D.	8	8
		20	12 7 0	14 44.0	204.72	204.78	−0″.035	32.78	33.05	−0.27	„	8	8
		21	11 52 22	14 29.4	246.73	245.08	+0.955	33.07	33.15	−0.08	„	8	8
		30	10 58 28	13 35.3	256.29	255.72	+0.329	32.70	33.06	−0.36	„	8	8
	Juli	19	9 43 20	12 19.0	320.37	319.64	+0.413	31.83	32.39	−0.56	„	8	8
		21	9 13 59	11 49.5	43.64	41.88	+1.008	32.45	32.81	−0.36	„	8	8
		24	9 2 49	11 38.1	166.74	165.64	+0.620	31.59	32.32	−0.73	„	8	8
1904	Mai	24	14 39 31	17 15.3	186.52	185.61	+0.518	32.60	32.65	−0.05	F.	8	8
	Juni	3	12 20 24	14 56.6	235.28	233.85	+0.821	32.13	32.90	−0.77	„	8	8
		8	14 1 13	16 37.6	85.46	83.24	+1.257	32.74	32.46	+0.28	„	8	8
		13	12 47 17	15 23.8	290.05	288.34	+0.958	32.29	32.12	+0.17	„	8	8
		14	13 7 17	15 43.8	333.49	331.50	+1.118	32.20	32.22	−0.02	„	8	8
		15	12 55 20	15 31.8	14.39	12.50	+1.085	33.09	32.88	+0.21	„	8	8
		17	12 46 10	15 22.7	94.95	93.48	+0.830	32.49	32.35	+0.14	„	8	8
		22	12 38 18	15 14.8	301.85	300.70	+0.644	32.26	32.09	+0.17	„	8	8
		23	12 34 42	15 11.2	344.92	342.98	+1.097	32.32	32.41	−0.09	„	8	8
	Juli	3	11 35 43	14 11.9	35.92	34.25	+0.962	32.84	33.01	−0.17	„	8	8
		4	11 14 18	13 50.5	75.23	74.09	+0.651	33.09	32.69	+0.40	„	8	8
		11	10 43 18	13 19.2	6.49	4.28	+1.258	32.51	32.63	−0.12	„	8	8
		13	10 29 35	13 5.4	87.02	85.07	+1.104	32.69	32.46	+0.23	„	8	8
		20	9 58 22	12 33.7	16.00	15.09	+0.519	33.23	32.65	+0.58	H.	8	8
		31	9 47 44	12 22.1	109.95	108.61	+0.746	32.23	31.90	+0.33	„	8	8
	Aug.	2	8 40 36	11 14.8	192.08	190.59	+0.841	32.55	32.35	+0.20	„	4	4
		3	8 26 17	11 0.4	232.81	230.66	+1.220	32.22	32.53	−0.31	„	8	8
		12	8 19 56	10 53.0	243.84	242.45	+0.782	32.19	32.25	−0.06	„	8	8
		28	7 52 21	10 23.5	185.18	184.45	+0.403	31.08	31.64	−0.56	„	8	8
	Sept.	4	7 40 11	10 10.4	113.67	112.38	+0.699	31.02	31.06	−0.04	„	8	8

Anmerkung. Die Beobachtungen von **Dinwiddie** mußten ausgeschlossen werden. Die andern sind durchweg mit gleichem Gewicht berücksichtigt. In den Publ. Naval Observatory Vol. VI sind noch 10 Messungen von **Rice** aus den Jahren 1905 und 1906 aufgeführt, welche während der Bearbeitung noch nicht bekannt waren.

Bedingungsgleichungen.

			Koeffizienten *sdp*					Übrigbl. Fehler *v*	Koeffizienten *ds*						Übrigbl. Fehler *v*
			du	*e* sin *w*	*e* cos *w*	*dN*	*dJ*		*du*	*e* sin *w*	*e* cos *w*	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	*dN*	*dJ*	
1904	Mai	24	+32″.1	− 5″.0	−31″.6	+ 9″.3	+7″.4	−0″.15	+0″.9	+16″.0	− 3″.5	+32″.7	−0″.4	−4″.0	0″.07
	Juni	3	+32.1	−27.3	−16.7	+14.7	+4.1	+0.02	−0.7	+ 9.2	−13.7	+32.9	+2.1	+1.4	+0.18
		8	+32.6	+32.6	+ 1.0	+13.7	+0.2	+0.44	−1.0	− 1.6	+16.2	+32.4	+5.6	+0.2	+0.28
		13	+33.0	−30.4	+12.8	+10.6	−1.0	−0.06	−0.6	− 5.7	−15.0	+32.1	+6.7	−3.0	−0.05

		Koeffizienten *sdp*					Übrigbl. Fehler *v*	Koeffizienten *ds*						Übrigbl. Fehler *v*
		du	*e* sin *w*	*e* cos *w*	*dN*	*dJ*		*du*	*e* sin *w*	*e* cos *w*	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	*dN*	*dJ*	
1904 Juni	14	+32″9	−14″0	+29″7	+ 6″9	+3″1	+0″02	+0″8	−14″9	− 6″2	+32″2	+3″0	−6″7	+0″10
	15	+32.2	+ 8.7	+31.0	+10.1	+7.2	+0.04	+0.8	−15.6	+ 5.2	+32.9	−0.8	−3.2	+0.05
	17	+32.8	+32.4	− 4.7	+12.6	−0.6	+0.04	−0.9	+ 1.4	+16.1	+32.4	+6.2	−1.0	+0.22
	22	+33.0	−27.2	+18.8	+ 9.1	−0.5	−0.41	−0.2	− 8.9	−13.3	+32.1	+6.2	−4.5	−0.15
	23	+32.7	− 7.9	+31.8	+ 7.2	+4.5	0.00	+0.9	−15.9	− 3.0	+32.4	+1.6	−6.3	−0.28
Juli	3	+32.1	+19.6	+25.3	+12.8	+6.2	−0.02	+0.1	−13.0	+10.2	+33.0	−0.3	−0.5	+0.30
	4	+32.4	+31.7	+ 6.5	+14.3	+1.3	−0.20	−0.9	− 4.1	+15.8	+32.7	+4.1	+0.9	−0.21
	11	+32.4	+ 4.0	+32.1	+ 9.0	+6.2	+0.20	+0.9	−16.1	+ 2.8	+32.7	−0.5	−4.4	+0.13
	13	+32.4	+32.4	+ 0.4	+13.4	+0.1	+0.29	−0.9	− 1.1	+16.2	+32.4	+5.0	+0.1	+0.48
	20	+32.1	+ 9.9	+30.5	+10.2	+6.4	−0.52	+0.7	−15.3	+ 5.7	+32.7	−0.8	−3.0	+0.24
	31	+32.5	+30.1	−12.4	+10.8	−1.1	+0.01	−0.6	+ 5.5	+15.0	+31.9	+5.8	−2.6	+0.22
Aug.	2	+32.0	− 7.3	−31.1	+ 9.5	+6.1	+0.17	+0.7	+15.6	− 4.4	+32.4	−0.7	−3.7	+0.22
	3	+31.8	−25.8	−18.6	+13.7	+4.2	+0.44	−0.2	+ 9.7	−13.0	+32.5	+0.8	+0.7	−0.22
	12	+31.6	−28.9	−12.8	+14.0	+2.7	−0.04	−0.5	+ 7.0	−14.5	+32.3	+2.1	+1.0	+0.04
	28	+31.5	− 3.8	−31.3	+ 8.6	+5.4	−0.25	+0.7	+15.6	− 2.6	+31.6	−0.4	−4.3	−0.55
Sept.	4	+31.6	+28.4	−13.9	+10.2	−1.1	−0.01	−0.5	+ 6.3	+14.2	+31.0	+5.4	−2.8	−0.12

Normalgleichungen.

	du	2*e* sin *w*	2*e* cos *w*	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	*dN*	*dJ*	*n*
du	20860	+1663	+1576	− 15	+7092	+1923	+565.56
2*e* sin *w*		13275	+ 338	−873	+ 734	+ 35	+ 21.04
2*e* cos *w*			12815	+903	+ 437	+ 291	+123.49
$\frac{d\Delta}{\Delta}$				20948	+1634	−1475	+ 16.87
dN					2825	+ 543	+201.03
dJ						587	+ 50.49

Auflösung Titania—Uranus 1904.

Washington-Refraktor. Frederick und Hammond.

Mittlere Epoche 1904.52.

	lg *a*	lg *b*	lg *c*			*a*	w. F.	(*nn*)	18.57
sin *du*	8.4279	9.5310_n	8.9635_n	Korr. Newcomb	*du*	+1°535	±0°073		
2*e* sin *w*	7.2766_n	8.2633_n	8.1485		*e* sin *w*	−0.00095	±0.00080	$(vv)_{sdp}$	1.11
2*e* cos *w*	7.8025	8.1394	8.2268_n		*e* cos *w*	+0.00317	±0.00081	$(vv)_{ds}$	1.56
$\frac{d\Delta}{\Delta}$	6.7956	8.9007_n	8.8555		Δ	31″505	±0″040	(*vv*)	2.67

Korr. $= a + b \sin dN + c \sin dJ$

Zahl der Mess. 20 *p*, 20 *s*
Summe der Gew. 20 *sdp*, 20 *ds*
w. F. einer Gl. ±0″184

Titania—Uranus.

Lickrefraktor 36 Z. 1906, 1907 Beob.: Aitken.

Beobachtung — Rechnung.

			Mt. Ham. Sid. T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O *p*	C *p*	O − C *sdp*	O *s*	C *s*	O − C *ds*	Zahl der Einst. *p*	*s*	
1906	Juni	14	19ʰ16ᵐ23ˢ	19ʰ18ᵐ.8	281°.28	281°.17	+0″.06	30″.57	30″.42	+0″.15	8	8	
		22	17 32 45	17 4.2	246.46	246.72	−0.14	31.57	31.52	+0.05	8	8	
	Juli	12	17 59 55	16 12.5	356.58	356.24	+0.19	32.24	32.36	−0.12	8	8	*p* korr. 180°
		21	19 0 39	16 37.3	8.68	8.56	+0.07	32.19	32.58	−0.39	8	8	
	Aug.	8	18 38 0	15 2.4	29.33	29.06	+0.15	32.21	32.38	−0.17	8	8	
		11	19 58 52	16 11.0	157.19	157.36	−0.09	31.71	31.29	+0.42	8	8	
1907	Juli	9	19 39 3	18 3.6	204.86	204.50	+0.20	32.57	32.62	−0.05	8	8	
		26	19 47 11	17 4.3	188.86	187.79	+0.61	32.15	32.50	−0.35	8	8	
		31	19 28 27	16 25.6	31.69	31.26	+0.24	32.04	32.28	−0.24	8	8	
	Aug.	3	20 11 14	16 56.3	159.31	160.24	−0.51	31.51	31.35	+0.16	8	8	
		16	19 55 40	15 48.7	336.13	336.00	+0.07	30.40	30.92	−0.52	8	8	

Anmerkung. Messungen nach dem eingesandten Manuskript. Im Lick Bulletin Nr. 172 geringfügige Änderungen in *p*. In der Rechnung ist die vorläufige Korrektion δu berücksichtigt (vgl. Seite 11).

Bedingungsgleichungen.

			Koeffizienten *sdp*					Übrigbl. Fehler	Koeffizienten *ds*						Übrigbl. Fehler
			du	*e* sin *w*	*e* cos *w*	*dN*	*dJ*	*v*	*du*	*e* sin *w*	*e* cos *w*	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	*dN*	*dJ*	*v*
1906	Juni	14	+32″.7	−31″.0	+10″.6	+10″.0	− 0.6	+0″.00	−0″.7	− 4″.3	−14″.6	+30″.4	+11″.0	−4″.0	+0″.29
		22	+31.7	−30.8	− 7.7	+16.0	+ 2.0	−0.09	−2.4	+ 0.1	−14.7	+31.5	+ 7.7	+2.2	+0.13
	Juli	12	+31.0	+ 0.8	+31.0	+ 8.1	+10.7	+0.08	+1.7	−16.1	+ 2.1	+32.4	+ 0.3	−5.0	+0.05
		21	+30.7	+ 7.6	+29.7	+10.5	+11.0	−0.07	+1.0	−15.5	+ 5.0	+32.6	− 0.4	−2.6	−0.22
	Aug.	8	+30.4	+17.9	+24.7	+14.1	+ 9.0	−0.03	−0.5	−13.4	+ 9.1	+32.4	+ 0.6	+1.0	−0.02
		11	+31.4	+ 9.7	−29.8	+ 5.6	+ 7.5	−0.18	+2.0	+15.5	+ 3.0	+31.3	+ 2.9	−7.6	+0.43
1907	Juli	9	+29.6	−16.5	−24.6	+15.0	+11.5	+0.21	−1.0	+14.1	− 8.2	+32.6	+ 0.9	+1.8	0.00
		26	+29.6	− 7.7	−28.6	+10.9	+13.0	+0.58	+0.9	+15.4	− 5.1	+32.5	− 0.3	−1.9	−0.32
		31	+29.8	+19.4	+22.5	+15.8	+ 9.9	+0.06	−1.5	−13.2	+ 9.4	+32.3	+ 1.8	+2.6	−0.09
	Aug.	3	+30.6	+ 7.6	−29.6	+ 5.2	+10.5	−0.59	+2.8	+15.9	+ 1.1	+31.3	+ 2.6	−7.7	+0.17
		16	+30.7	− 9.8	+21.0	+ 4.7	+ 9.4	+0.01	+2.8	−15.5	− 2.3	+30.9	+ 3.4	−8.2	−0.37

Normalgleichungen.

	du	2*e* sin *w*	2*e* cos *w*	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	*dN*	*dJ*	*n*
du	10447	−1096	+907	+164	+3551	+2771	+23.82
2*e* sin *w*		5323	+383	−363	− 429	+ 154	+21.36
2*e* cos *w*			7908	+456	+ 126	+ 186	+12.18
$\frac{d\Delta}{\Delta}$				11155	+ 952	− 916	−34.64
dN					1617	+ 880	+14.85
dJ						1227	+11.80

Auflösung Titania—Uranus 1906, 1907.

Lickrefraktor. Aitken.

Mittlere Epoche 1907.00.

	lg *a*	lg *b*	lg *c*		*a*	w. F.	(*nn*)	1.70
sin *du*	7.4322	9.5313_n	9.4419_n	*du*	+0°155	±0°107		
2*e* sin *w*	7.6340	7.6056	8.9108_n	*e* sin *w*	+0.00215	±0.00132	$(vv)_{sdp}$	0.79
2*e* cos *w*	6.9297	8.2611	8.2327	*e* cos *w*	+0.00043	±0.00108	$(vv)_{ds}$	0.62
$\frac{d\Delta}{\Delta}$	7.4726_n	8.9000_n	8.9248	Δ	31°392	±0″057	(*vv*)	1.41

Korr. $= a + b \sin dN + c \sin dJ$

Vorläuf. Korr. δu +1°650

Korr. Newc. *du* +1.805 ±0°107

Zahl der Mess. 11 *p*, 11 *s*

Summe der Gew. 11 *sdp*, 11 *ds*

w. F. einer Gl. ±0″190

Titania—Uranus.

Washington-Refraktor 36 Z. 1907. Beob.: Frederickson.

Beobachtung — Rechnung.

		Wash. M. T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O *p*	C *p*	O − C *n* *sdp*	O *s*	C *s*	O − C *n* *ds*	Zahl der Einst. *p*	*s*	
1907 Mai	11	$15^h 35^m 28^s$	$18^h\ 7^m.3$	283°76	285°34	−0″79	28″71	28″53	+0″18	8	8	
	12	15 27 18	17 59.2	330.10	329.61	+0.26	31.02	30.26	+0.76	8	8	
	13	15 31 17	18 3.4	8.93	8.33	+0.33	32.38	32.10	+0.28	8	8	
	14	15 12 12	17 44.4	45.65	45.44	+0.11	31.31	31.02	+0.29	8	8	
	20	15 20 33	17 53.4	298.30	298.54	−0.12	29.31	28.96	+0.35	8	8	
	21	15 3 23	17 36.3	340.85	340.89	−0.02	31.92	31.15	+0.77	8	8	
Juni	6	13 47 31	16 21.6	274.67	276.70	(−1.04)	29.30	29.16	(+0.14)	8	8 ::	ausgeschl.
	8	13 13 56	15 48.1	0.43	0.73	−0.18	31.91	32.37	−0.46	8	8 :	
	15	12 55 25	15 30.0	288.66	288.71	−0.02	28.83	29.30	−0.47	8	8	
	16	12 51 25	15 26.0	332.77	332.61	+0.08	31.37	31.04	+0.33	8	8	
	17	14 6 29	16 41.1	13.54	13.18	+0.21	33.18	32.67	+0.51	4	8 :	*p* Gew. ½
	19	14 12 45	16 47.5	94.18	94.99	−0.42	29.51	29.43	+0.08	8	8	
	30	12 35 12	15 10.1	8.91	188.85	+0.04	32.69	32.68	+0.01	8	8	

			Wash. M. T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O p	C p	O − C n sdp	O s	C s	O − C n ds	Zahl der Einst. p	s
1907	Juli	3	$11^h 42^m 42^s$	$14^h 17^m.6$	313°30	313°15	+0″08	30″27	30″14	+0″13	8	8
		4	12 38 45	15 13.7	356.37	355.69	+0.39	32.68	32.32	+0.36	8	8
		14	12 57 10	15 31.9	45.78	45.41	+0.20	31.61	31.84	−0.23	8	8
		16	11 26 28	14 1.2	130.34	130.11	+0.12	30.17	30.05	+0.12	8	8
		27	9 17 54	11 52.1	218.58	217.44	+0.64	32.11	32.13	−0.02	8	8
		30	9 31 11	12 5.2	346.24	346.26	−0.01	31.38	31.70	−0.32	8	8
		31	9 12 46	11 46.7	24.49	23.91	+0.33	32.15	32.46	−0.31	8	8
	Aug.	7	11 37 42	14 11.1	321.82	320.77	+0.55	30.60	30.34	+0.26	4	8
		11	9 35 26	12 8 4	121.33	121.50	−0.09	29.46	29.64	−0.18	8	8
		12	9 9 28	11 42.4	163.79	163.36	+0.23	31.46	31.36	+0.10	8	8

Anmerkung. In der Rechnung ist die vorläufige Korrektion δu berücksichtigt (vgl. S. 11).

Bedingungsgleichungen.

			Koeffizienten sdp					Übrigbl. Fehler	Koeffizienten ds						Übrigbl. Fehler
			du	$e \sin w$	$e \cos w$	dN	dJ	v	du	$e \sin w$	$e \cos w$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	dN	dJ	v
1907	Mai	11	+32″1	−29″2	+13″1	+ 7″7	+ 0″2	−0″92	+0″2	− 6″1	−12″9	+28″5	+13″0	−6″0	+0″08
		12	+30.3	−12.6	+27.5	+ 3.4	+ 9.7	−0.16	+3.6	−15.2	− 3.1	+30.3	+ 5.0	−9.2	+0.63
		13	+28.6	+ 8.3	+27.3	+11.4	+14.0	+0.27	+0.6	−15.2	+ 5.3	+32.1	− 0.2	−1.2	+0.15
		14	+29.6	+25.1	+15.9	+17.7	+ 6 7	+0.07	−3.3	−11.1	+11.3	+31.0	+ 5.5	+4.2	+0.18
		20	+32.1	−25.9	+18.8	+ 5.2	+ 2.2	−0.24	+1.7	− 9.9	−10.7	+29.0	+11.5	−8.3	+0.24
		21	+29.8	− 6.8	+29.0	+ 4.9	+12.0	−0.10	+3.3	−15.9	− 0.4	+31.1	+ 2.6	−7.7	+0.64
	Juni	8	+29.4	+ 4.1	+29.0	+ 9.4	+14.0	−0.24	+1.6	−15.8	+ 3.9	+32.4	0.0	−3.3	−0.59
		15	+32.7	−29.1	+14.8	+ 7.4	+ 0.5	−0.15	+0.5	− 7.1	−12.8	+29.3	+12.5	−6.5	−0.58
		16	+30.8	−11.4	+28.6	+ 4.0	+10.0	−0.02	+3.4	−15.7	− 2.6	+31.0	+ 4.3	−8.9	+0.20
		17	+29.3	+10.9	+27.2	+12.6	+13.4	+0.16 (½)	+0.2	−15.1	+ 6.2	+32.7	− 0.1	−0.3	+0.38
		19	+32.6	+31.5	− 8.2	+10.5	− 0.6	−0.47	−1.0	+ 2.7	+14.5	+29.4	+13.0	−3.6	−0.02
		30	+29.5	− 8.5	−28.3	+11.4	+13.5	−0.06	+0.7	+15.4	− 5.4	+32.7	− 0.2	−1.5	−0.08
	Juli	3	+32.1	−20.9	+24.3	+ 4.0	+ 5.0	−0 03	+2.6	−13.1	− 7.9	+30.1	+ 8.5	−9.5	0.00
		4	+29.9	+ 1.2	+29.8	+ 8.1	+13.3	+0.31	+2.1	−16.1	+ 2.7	+32.3	+ 0.4	−4.7	+0.22
		14	+30 4	+25.2	+16.9	+17.4	+ 6.7	+0.15	−2.7	−11.1	+11.7	+31.8	+ 4.8	+3.8	−0.35
		16	+32 2	+22.2	−23.3	+ 4.4	+ 4.1	+0.05	+2.2	+12.4	+ 8.7	+30.1	+ 9.0	−9.1	+0.03
		27	+30.0	−22.1	−20.3	+16.7	+ 8.6	+0.51	−2.1	+12.4	−10.4	+32.1	+ 3.0	+3.3	−0.10
		30	+30.3	− 4.2	+30.1	+ 6.1	+11.6	−0.10	+2.6	−16.1	+ 0.4	+31.7	+ 1.6	−6.7	−0.45
		31	+29.6	+16.0	+24.9	+14.5	+11.3	+0.28	−0.8	−14.1	+ 8.1	+32 4	+ 0.7	+1.5	−0.44
	Aug.	7	+31.5	−17.5	+26.2	+ 4.0	+ 6.2	+0.45	+2.6	−14.1	− 6.3	+30.3	+ 6.6	−9.2	+0.13
		11	+32.1	+25 2	−19.9	+ 5.6	+ 2.1	−0.15	+1.3	+10.2	+10.8	+29.6	+10.1	−8.0	−0.27
		12	+30.3	+ 5.9	−29.8	+ 5.6	+10.8	+0.14	+2.7	+15.9	+ 0.4	+31.3	+ 2.0	−7.2	−0.01

Normalgleichungen.

	du	$2e \sin w$	$2e \cos w$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	dN	dJ	n
du	20432	−877	+7153	+ 673	+5747	+4803	+59.65
$2e \sin w$		11720	−2325	−4448	+ 85	+ 674	−33.26
$2e \cos w$			13993	+ 429	+1734	+2703	+21.24
$\frac{d\Delta}{\Delta}$				21141	+3398	−2968	+77.85
dN					3107	+ 844	+32.44
dJ						2697	+10.06

Auflösung Titania—Uranus 1907.

Washington-Refraktor. Frederickson.

Mittlere Epoche 1907.48.

	lg a	lg b	lg c		a	w. F.	(nn)	4.98
$\sin du$	7.4542	9.4525_n	9.3160_n	du	+0°163	±0°100		
$2e \sin w$	7.1547_n	8.9603_n	8.5915_n	$e \sin w$	−0.00071	±0.00111	$(vv)_{sdp}$	2.05
$2e \cos w$	6.4388_n	8.0465	8.9917_n	$e \cos w$	−0.00014	±0.00107	$(vv)_{ds}$	2.47
$\frac{d\Delta}{\Delta}$	7.5182	9.2333_n	9.1485	Δ	31″589	±0″051	(vv)	4.52

Korr. $= a + b \sin dN + c \sin dJ$ Vorläuf. Korr. δu +1°675

Korr. Newc. du +1.838 ±0°100

Zahl der Mess. 22 p, 22 s

Summe der Gew. $21\frac{1}{2}\,sdp$, 22 ds

w. F. einer Gl. ±0″227

Titania—Uranus.

Yerkesrefraktor 40 Z. 1907, 1908, 1909. Beob.: Barnard.

Beobachtung — Rechnung.

			Central-Standard T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O p	C p	O − C n sdp	O s	C s	O − C n ds	Zahl der Einst. p	s	
1907	Juli	28	9h 10m 13s	12h 36m.0	260°29	259°85	+0″23	29″85	30″10	−0″25	6	8	
	Aug.	11	8 50 52	12 15.6	121.36	121.73	−0.19	29.89	29.64	+0.25	5	10	
		13	9 9 53	12 34.5	202.36	203.15	−0.44	32.01	32.26	−0.25	5	8 :	
	Sept.	1	7 35 49	10 58.3	265.61	265.06	+0.28	29.54	29.50	+0.04	5	8	
		10	7 33 37	10 54.9	279.34	278.11	+0.62	28.52	29.03	−0.51	5	7	
	Okt.	4	6 33 31	9 51.5	189.99	190.15	−0.09	30.49	30.93	−0.44	6	8	
		6	6 40 11	9 57.9	271.51	271.03	+0.24	27.99	28.47	−0.48	5	8 :	
		8	6 40 10	9 57.6	356.85	356.78	+0.04	30.53	30.51	+0.02	5	9	
		13	6 25 10	9 41.9	200.71	200.96	−0.13	30.12	30.72	−0.60	5	8	
	Nov.	3	5 46 24	9 0.3	351.88	350.46	+0.73	28.77	29.64	−0.87	5	10	
1908	Juli	7	11 23 59	14 50.1	133.93	133.78	+0.08	29.69	29.45	+0.24	5	8	
		19	10 18 53	13 44.8	263.04	262.49	+0.28	28.82	28.82	0.00	6	10 :	
		21	12 3 25	15 29.2	353.82	352.93	+0.50	31.44	32.06	+0.62	6	10	
		27	9 38 45	13 4.3	231.11	230.76	+0.19	30.31	30.70	−0.39	5	10	
		28	9 24 26	12 49.9	275.72	274.59	+0.56	28.38	28.54	−0.16	5	7	
	Aug.	2	9 37 20	13 2.5	124.97	125.22	−0.13	29.11	29.00	+0.11	5	10	
		16	10 8 41	13 32.8	345.41	345.58	−0.09	31.42	31.30	+0.12	6	9	
		22	8 21 31	11 45.0	224.31	224.34	−0.02	30.77	30.88	−0.11	5	8	p −10° corr.
	Sept.	1	8 7 19	11 29.7	281.43	280.54	+0.44	28.11	28.16	−0.05	7	8 :	
		20	7 34 3	10 53.9	348.79	348.24	+0.29	30.55	30.64	−0.09	6	5 :	p +40° corr.

	Central-Standard T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O p	C p	O − C n sdp	O s	C s	O − C n ds	Zahl der Einst. p	s
1909 Juli 20	$10^h 29^m 29^s$	$13^h 55^m.0$	278°60	278°29	+0″15	26″93	27″17	−0″24	5	10
Aug. 2	10 11 23	13 36.3	95.14	94.86	+0.13	27.37	27.24	+0.13	6	10:
15	8 33 51	11 58.0	269.36	268.80	+0.27	27.21	27.31	−0.10	6	8
17	9 22 50	12 46.7	356.50	356.50	0.00	31.91	31.88	+0.03	5	9
22	8 57 13	12 20.6	198.32	198.67	−0.19	31.39	31.87	−0.48	6	10
29	8 40 55	12 3.6	133.67	133.79	−0.06	28.91	28 42	+0.49	6	8:
31	7 45 36	11 8.1	206.86	207.55	−0.37	30.80	31.24	−0.44	7	9

Anmerkung. Die Messungen waren im Manuskript eingesandt. Später im Astr. Journ. Nr. 606 publiziert. In den berechneten Örtern ist die vorläufige Korrektion δu (vgl. S. 11) berücksichtigt.

Bedingungsgleichungen.

	Koeffizienten sdp					Übrigbl. Fehler	Koeffizienten ds						Übrigbl. Fehler
	du	$e \sin w$	$e \cos w$	dN	dJ	v	du	$e \sin w$	$e \cos w$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	dN	dJ	v
1907 Juli 28	+32″0	−32″0	+ 0″1	+14″0	0″0	+0″06	−2″3	+ 2″3	−15″1	+30″1	+11″2	0″0	+0″02
Aug. 11	+32.1	+25.2	−20.0	+ 5.6	+ 2.1	−0.10	+1.4	+10.3	+10.8	+29.6	+10.1	− 8.0	+0.28
13	+29.5	−15.5	−25.1	+14.2	+11.2	−0.34	−0.6	+14.1	− 7.9	+32.3	+ 0.6	+ 1.2	−0.01
Sept. 1	+31.5	−31.4	+ 2.5	+12.7	− 0.4	+0.09	−1.9	+ 0.7	−14.9	+29.5	+11.0	− 1.0	+0.32
10	+31.5	−30.2	+ 9.1	+10.0	− 0.6	+0.36	−0.8	− 3.4	−14.1	+29.0	+11.4	− 3.6	−0.24
Okt. 4	+28.4	− 8.4	−27.1	+10.8	+11.9	+0.04	+0.7	+14.5	− 5.3	+30.9	− 0.3	− 1.5	−0.23
6	+30.8	−30.3	+ 5.4	+11.2	− 0.6	+0.02	−1.4	− 1.2	−14.3	+28.4	+11.1	− 2.1	−0.21
8	+28.6	+ 1.4	+28.5	+ 7.8	+11.7	−0.33	+1.8	−15.1	+ 2.6	+30.5	+ 0.2	− 4.4	+0.10
13	+28.1	−13.7	−24.5	+13.0	+10.9	−0.03	−0.4	+13.6	− 7.2	+30.7	+ 0.3	+ 0.7	−0.38
Nov. 3	+28.0	− 1.8	+28.0	+ 6.4	+11.3	+0.34	+2.2	−14.9	+ 1.3	+29.6	+ 0.9	− 5.5	−0.78
1908 Juli 7	+31.4	+20.1	−24.1	+ 2.6	+ 6.7	+0.20	+3.8	+13 7	+ 6.5	+29.4	+ 9.3	−10.4	+0.31
19	+32.1	−32.1	+ 2.5	+13.1	− 0.4	+0.09	−2.4	+ 1.2	−14.5	+28.8	+13.8	− 1.2	+0.28
21	+28.9	+ 0.1	+28.9	+ 7.4	+15.0	+0.10	+2.6	−16.0	+ 2.7	+32.1	+ 0.6	− 5.0	−0.54
27	+30.1	−27.1	−13.1	+18.2	+ 5.3	+0.16	−4.0	+10.3	−12.1	+30.7	+ 7.6	+ 4.3	−0.11
28	+32.4	−31.3	+ 8.5	+10.1	− 0.5	+0.31	−0.9	− 2.8	−14.0	+28.5	+14.3	− 4.1	+0.09
Aug. 2	+31.8	+23.6	−21.4	+ 3.7	+ 4.1	−0.02	+2.8	+11.8	+ 8.9	+29 0	+10.9	− 9 6	+0.15
16	+29.2	− 4.0	+28.9	+ 5.6	+13.5	−0.49	+3.2	−15.9	+ 1.0	+31.3	+ 1.7	− 6.8	+0.22
22	+29.4	−24.7	−16.0	+17.9	+ 7.0	−0.02	−3.5	+11.3	−11.1	+30.9	+ 5.6	+ 4.3	+0.15
Sept. 1	+31.8	−29.9	+11.0	+ 8.6	− 0.2	+0.16	−0.3	− 4.6	−13.3	+28.2	+13.4	− 5.1	+0.20
20	+28.4	− 2.6	+28.3	+ 6.1	+13.2	−0.10	+2.8	−15.5	+ 1.4	+30.6	+ 1.3	− 6.0	0.00
1909 Juli 20	+32.5	−30.6	+10.8	+ 8.1	+ 0.1	−0.12	+0.1	− 4.6	−12.8	+27.2	+16.3	− 5.9	−0.01
Aug. 2	+32.4	+31.0	− 9.2	+ 9.1	− 0.3	+0.13	−0.5	+ 3.4	+13.2	+27 2	+16.1	− 5.0	+0.12
15	+32.1	−31.5	+ 6.2	+10.9	− 0.6	+0.04	−1.5	− 1.2	−13.7	+27.3	+15.7	− 3.3	+0.16
17	+27.4	+ 2.5	+27.3	+ 8.5	+16.7	−0.37	+2.2	−15.7	+ 3.7	+31.9	+ 0.2	− 3.5	+0.10
22	+27.3	−14.2	−23.3	+15.4	+14.3	−0.10	−1.8	+14.5	− 6.7	+31.8	+ 1.0	+ 2.6	−0.25
29	+30.4	+19.4	−23.4	+ 1.7	+ 7.5	+0.06	+4.4	+13.8	+ 5 7	+28.4	+ 9.7	−10.6	+0.56
31	+27.6	−18.2	−20.7	+17.2	+12.0	−0.30	−3.1	+13.8	− 8.0	+31.3	+ 2.7	+ 4.1	−0.19

Normalgleichungen.

	du	$2e \sin w$	$2e \cos w$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	dN	dJ	n
du	24883	−8981	− 332	+ 77	+8044	+4660	+110.35
$2e \sin w$		17393	−1995	+1144	−3975	− 429	− 81.95
$2e \cos w$			13505	−3752	−2153	− 37	+147.49
$\frac{d\Delta}{\Delta}$				24092	+5657	−2477	−142.54
dN					5569	+ 879	+ 11.49
dJ						2802	− 0.96

Auflösung Titania—Uranus 1907, 1908, 1909.

Yerkesrefraktor. Barnard.

Mittlere Epoche 1908.53.

	lg a	lg b	lg c		a	w. F.	(nn)	0.06
sin du	7.6184	9.4494n	9.3460n	du	+0°238	±0°064		
$2e$ sin w	7.0693n	9.0417	8.9808n	e sin w	−0.00059	±0.00075	$(vv)_{sdp}$	1.23
$2e$ cos w	7.9838	9.0291	8.1400	e cos w	+0.00482	±0.00077	$(vv)_{ds}$	2.18
$\frac{d\Delta}{\Delta}$	7.6408n	9.3473n	9.0423	Δ	31″347	±0″037	(vv)	3.41

Korr. = $a + b \sin dN + c \sin dJ$ Vorläuf. Korr. δu +1°727   Zahl der Mess. 27 p, 27 s

Korr. Newc. du +1.965 ±0°064   Summe der Gew. 27 sdp, 27 ds

w. F. einer Gl. ±0″176

Aus der vollständigen Auflösung folgt weiter:

dN	+0°84	±0°24	N	166°89	±0°24	Aeq.
dJ	−1.20	±0.23	J	74.08	±0.23	1900.0

Titania—Uranus.

Yerkesrefraktor 40 Z. Lickrefraktor 36 Z. 1910, 1911. Beob.: Barnard, Aitken.

Beobachtung[1] — Rechnung.

		Central-Standard T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O p	C p	O − C n sdp	O s	C s	O − C n ds	Zahl der Einst. p	s	Beob.
1910 Mai	31	$14^{\mathrm{h}}32^{\mathrm{m}}8$	$17^{\mathrm{h}}55^{\mathrm{m}}5$	352° 6′0	351°56′2	+0″09	31″17	31″54	−0″37	5	8	B.
Juni	7	15 3.3	18 26.9	281 34.2	280 56.5	+0.27	24.98	25.01	−0.03	5	8	"
	12	14 27.5	17 51.3	131 6.0	131 42.5	−0.29	27.23	27.19	+0.04	6	8	"
Juli	3	11 59.9	15 24.8	269 12.0	268 12.5	+0.44	25.17	25.52	−0.35	6	9	"
	10	11 2.8	14 27.8	194 13.2	194 37.3	−0.22	31.79	32.08	−0.29	4	2	"
	12	12 35.1	16 0.1	285 37.2	284 55.5	+0.31	25.56	25.79	−0.23	5	8	"
	17	11 26.0	14 51.0	133 7.8	133 52.4	−0.36	28.44	27.88	+0.56	5	8	"
	24	10 36.4	14 1.3	48 58.8	49 9.5	−0.09	28.73	28.55	+0.18	6	8	"
	26	9 57.6	13 22.4	142 52.8	143 45.1	−0.44	29.23	29.00	+0.23	5	8	"
	31	10 2.2	13 26.9	349 19.2	348 5.6	+0.68	31.75	31.62	+0.13	5	4	"
Aug.	2	10 13.1	13 37.7	62 27.0	61 39.8	+0.37	28.40	27.34	+1.06	5	10	"
	9	9 52.2	13 16.5	357 42.0	357 53.6	−0.11	31.98	32.11	−0.13	4	8	"

---

[1] Die Messungen waren im Manuskript eingesandt, sind später Astr. Journ. 637 und Lick-Bulletin Nr. 207 veröffentlicht. Die wenigen Messungen von Aitken sind mit denjenigen von Barnard verbunden. In den berechneten Örtern ist die vorläufige Korrektion δu (vgl. S. 11) berücksichtigt.

			Central-Standard T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O p	C p	O − C n sdp	O s	C s	O − C n ds	Zahl der Einst. p	s	Beob.
1910	Sept.	10	$7^{h}49^{m}.7$	$11^{h}11^{m}.1$	230° 1′.2	235° 7′.6	−0″.05	27″.92	28″.23	−0″.31	5	8	B.
		20	7 46.3	11 6.4	293 20.4	292 35.7	+0.34	25.89	25.87	+0.02	5	9	
		25	9 8.1	12 27.5	143 21.6	144 34.5	−0.60	28.51	28.27	+0.24	5	9	"
	Okt.	9	6 33.0	9 50.5	355 25.8	355 22.0	+0.04	30.03	30.64	−0.61	5	9	"
1911	Juni	30	14 42.4	18 6.5	129 2.4	130 1.5	−0.45	26.18	26.28	−0.10	5	9	"
	Juli	2	11 51.1	15 15.3	195 4.8	195 5.9	−0.01	30.78	31.47	−0.69	5	8	"
		4	13 45.4	17 9.9	291 16.2	290 32.2	+0.31	24.97	24.50	+0.47	5	8	"
		16	13 25.5	16 50.0	53 8.4	53 48.1	−0.30	26.62	26.38	+0.24	5	8	"
		25	11 55.4	15 19.9	65 25.2	65 13.1	+0.09	25.46	25.34	+0.12	5	8	"
		30	12 51.0	16 15.4	283 34.8	282 9.1	+0.61	24.48	24.44	+0.04	5	8	"
			Sternzeit Mt. Ham.										
1910	Juli	27	20 44.8	17 55.7	186 27.6	186 5.4	+0.21	32.22	32.35	−0.13	8—10		A.
	Aug.	3	21 15.9	17 59.0	119 44.4	120 48.1	−0.50	26.63	26.79	−0.16	8—10		"
		24	21 13.7	16 32.7	258 12.6	259 16.2	−0.48	26.06	26.18	−0.12	8—10		"
		31	20 36.0	15 27.0	189 28.8	189 1.6	+0.25	32.07	31.84	+0.23	8—10		"
	Sept.	21	20 23.7	13 49.7	340 6.6	340 28.5	−0.19	29.80	30.01	−0.21	8—10		"
1911	Juli	29	21 20.7	18 24.3	234 10.2	234 28.2	−0.14	26.51	26.47	+0.04	8—10		"
	Aug.	4	20 48.7	17 28.5	136 44.4	136 29.7	+0.12	27.56	27.40	+0.16	8—10		"
		15	20 2.1	15 58.3	213 22.8	213 32.1	−0.08	29.75	29.33	+0.42	8—10		"
		20	19 23.2	14 59.5	59 40.2	59 22.0	+0.14	25.98	26.06	−0.08	8—10		"
		28	20 10.9	15 14.9	30 39.6	30 31.1	+0.07	29.62	29.66	−0.04	8—10		"

Bedingungsgleichungen.

			Koeffizienten sdp					Übrigbl. Fehler[1] v	Koeffizienten ds						Übrigbl. Fehler[1] v
			du	$e \sin w$	$e \cos w$	dN	dJ		du	$e \sin w$	$e \cos w$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	dN	dJ	
1910	Mai	31	+25″.1	+ 0″.9	+25″.1	+ 7″.1	+19″.7	−0″.05	+3″.1	−15″.6	+ 3″.6	+31″.5	+ 0″.6	− 3″.9	−0″.36
	Juni	7	+31.9	−29.5	+12.2	+ 5.7	+ 1.0	+0.11	+1.7	− 6.3	−10.9	+25.0	+18.3	− 7.6	−0.03
		12	+29.6	+19.8	−22.1	− 0.5	+ 9.3	−0.01	+6.7	+14.6	+ 4.1	+27.2	+11.9	−11.8	+0.02
	Juli	3	+32.3	−31.6	+ 6.9	+10.1	− 0.4	+0.29	−1.2	− 1.5	−12.7	+25.5	+18.5	− 4.2	−0.32
		10	+25.8	−13.0	−22.4	+16.1	+16.9	−0.10	−2.7	+15.2	− 5.7	+32.1	+ 1.1	+ 3.1	−0.12½
		12	+32.2	−29.1	+13.9	+ 4.9	+ 1.6	+0.15	+2.2	− 7.6	+10.7	+25.8	+17.6	− 8.4	−0.39
		17	+29.9	+19.1	−23.0	− 0.2	+ 9.7	−0.08	+6.4	+14.8	+ 4.0	+27.9	+11.0	−11.7	+0.55
		24	+29.2	+27.2	+10.8	+20.0	+ 5.2	−0.18	−6.6	−11.4	+10.8	+28.6	+10.7	+ 5.1	+0.09
		26	+28.8	+14.4	−24.9	+ 0.1	+12.8	−0.15	+6.6	+15.8	+ 1.6	+29.0	+ 7.9	−11.1	+0.26
		31	+26.4	− 1.5	+26.4	+ 5.7	+18.6	+0.53	+3.9	−16.0	+ 3.0	+31.6	+ 1.3	− 5.5	+0.14½
	Aug.	2	+30.5	+30.0	+ 5.4	+17.8	+ 1.9	+0.33½	−5.6	− 8.0	+12.4	+27.3	+14.1	+ 2.9	+0.93½
		9	+26.0	+ 3.9	+25.7	+ 9.4	+18.9	−0.27	+1.7	−15.6	+ 4.1	+32.1	+ 0.1	− 2.3	−0.11

---

[1] Nach der vollständigen Auflösung mit 6 Unbekannten.

			Koeffizienten *sdp*					Übrigbl. Fehler *r*	Koeffizienten *ds*						Übrigbl. Fehler *r*
			du	*e* sin *w*	*e* cos *w*	*dN*	*dJ*		*du*	*e* sin *w*	*e* cos *w*	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	*dN*	*dJ*	
1910	Sept.	10	+28″8	−26″7	−10″7	+19″2	+ 4″9	−0″11	−6″0	+10″8	−10″9	+28″2	+10″2	+ 4″8	−0″18
		20	+30.9	−26.3	+16.2	+ 3.5	+ 2.8	+0.18	+3.0	− 9.4	− 9.4	+25.9	+15.2	− 9.2	+0.02
		25	+28.1	+13.7	−24.5	+ 0.6	+12.0	−0.32	+5.9	+15.2	+ 1.8	+28.3	+ 7.2	−10.5	+0.27
	Okt.	9	+25.3	+ 2.3	+25.2	+ 8.0	+17.7	−0.11	+2.3	−15.1	+ 3.6	+30.6	+ 0.3	− 3.2	−0.59
1911	Juni	30	+29.2	+20.2	−21.0	− 1.7	+ 9.8	−0.17	+7.9	+14.9	+ 3.4	+26.3	+13.3	−12.2	−0.13
	Juli	2	+24.4	−13.6	−20.2	+17.6	+17.5	+0.08	−4.5	+15.6	− 5.0	+31.5	+ 1.7	+ 4.4	−0.53
		4	+31.4	−27.2	+15.7	+ 2.0	+ 3.6	+0.17	+4.7	−10.2	− 8.3	+24.5	+18.3	−10.2	+0.43
		16	+29.5	+28.6	+ 7.3	+19.8	+ 3.3	−0.37	−7.6	−10.6	+10.9	+26.4	+14.0	+ 4.2	+0.12
		25	+30.9	+30.8	+ 2.6	+17.0	+ 0.8	+0.07	−5.9	− 6.9	+12.1	+25.3	+16.9	+ 1.6	−0.03
		30	+32.0	−29.4	+12.8	+ 4.8	+ 1.5	+0.46	+2.5	− 7.2	−10.2	+24.4	+19.2	− 8.4	+0.02
1910	Juli	27	+25.8	− 8.4	−24.4	+12.7	+18.5	+0.38	−0.4	+15.4	− 4.9	+32.3	+ 0.1	+ 0.5	+0.04
	Aug.	3	+31.2	+24.3	−19.4	+ 1.5	+ 5.3	−0.25	+4.8	+12.1	+ 7.5	+26.8	+14.4	−10.9	−0.23
		24	+31.6	−31.5	+ 2.5	+13.1	− 0.4	−0.62	−3.0	+ 2.0	−13.3	+26.2	+16.8	− 1.4	−0.06
		31	+25.8	− 9.7	−23.9	+13.4	+17.3	+0.40	0.8	+15.1	− 5.2	+31.8	+ 0.2	+ 1.1	+0.40
	Sept.	21	+26.6	− 5.7	+26.0	+ 3.4	+16.2	−0.34	+4.8	−15.7	+ 1.5	+30.0	+ 2.8	− 7.6	−0.21
1911	Juli	29	+29.6	−28.7	− 7.2	+19.6	+ 3.1	−0.24	−7.4	+10.4	−11.0	+26.4	+14.0	+ 4.1	+0.13
	Aug.	4	+28.6	+17.5	−22.7	− 1.5	+11.8	+0.41	+7.8	+15.6	+ 2.2	+27.4	+10.9	−11.9	+0.16
		15	+26.7	−21.8	−15.4	+20.9	+10.3	−0.09	−7.3	+14.4	− 7.8	+29.3	+ 6.7	+ 6.3	+0.56
		20	+30.0	+29.5	+ 5.3	+18.4	+ 2.0	+0.09	−6.6	− 8.8	+11.6	+26.1	+14.9	+ 3.1	−0.21
		28	+26.2	+20.4	+16.5	+20.3	+11.5	−0.07	−6.7	−14.6	+ 7.3	+29.7	+ 5.6	+ 6.1	−0.07

Normalgleichungen.

	du	2*e* sin *w*	2*e* cos *w*	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	*dN*	*dJ*	*n*
du	27005	−1212	− 703	+152	+8504	+6683	− 0.78
2*e* sin *w*		20115	−3021	+815	− 615	− 90	− 74.02
2*e* cos *w*			12937	− 53	− 50	− 651	+106.29
$\frac{d\Delta}{\Delta}$				24177	+8156	−2792	− 9.77
dN					9103	+1120	+ 23.13
dJ						5626	− 14.32

Auflösung Titania—Uranus 1910, 1911.

Yerkesrefraktor, Barnard. Lickrefraktor, Aitken.

Mittlere Epoche 1910.94.

	lg *a*	lg *b*	lg *c*		*a*	w. F.
sin *du*	5.7672	9.4943*n*	9.3838*n*	*du*	+0°003	+0°088
2*e* sin *w*	7.4012*n*	8.3807	7.9966*n*	*e* sin *w*	−0.00126	±0.00071
2*e* cos *w*	7.8825	7.9461*n*	8.5442	*e* cos *w*	+0.00381	±0.00090
$\frac{d\Delta}{\Delta}$	6.4811*n*	9.5266*n*	9.0689	Δ	31″475	±0″041

Korr. = $a + b \sin dN + c \sin dJ$

Vorläuf. Korr. δu	+1°847	
Korr. Newc. *du*	+1.850	±0°088

Die vollständige Auflösung mit 6 Unbekannten ergibt:

	lg				w. F.		(nn)	6.33
sin du	7.0895n	Korr. Newcomb	du	+1°777	±0°103			
$2e$ sin w	7.3681n		e sin w	−0.00117	±0.00072		$(vv)_{sdp}$	2.29
$2e$ cos w	7.8733		e cos w	+0.00374	±0.00090		$(vv)_{ds}$	2.85
$\frac{d\Delta}{\Delta}$	7.4500n		Δ	31″396	±0″055		(vv)	5.14
sin dN	7.8101		N	166°42	±0°19	Aeq. 1900.0	Zahl der Mess. 32 p, 32 s	
sin dJ	7.4683n		J	75.11	±0.19		Summe der Gew. 31 sdp, 31½ ds	
							w. F. einer Gl. ±0″201	

Oberon — Uranus.

Lickrefraktor 36 Z. 1894, 1895. Beob.: Barnard, Schaeberle.

Beobachtung — Rechnung.

			Standard Pacific T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O p	C p	O − C n dp	O	C s	O − C n ds	Beob.	Zahl der Einst. p	s	
1894	Mai	21	$10^{h}\,10^{m}\,35^{s}$	$15^{h}\,43^{m}.9$	210°6	209°74	+0″658	44″36	43″80	+0″56	B.	4	6	
		28	9 42 13	15 15.2	36.4	35.79	+0.456	43.34	42.84	+0.50	"	4	6	
	Juli	11	10 37 13	16 9.1	51.9	50.76	+0.802	40.51	40.33	+0.18	"	4	6	
		24	10 58 5	16 28.7	39.6	38.84	+0.552	41.62	41.64	−0.02	"	4	7	
		25	10 12 30	15 43.0	66.4	65.70	+0.465	38.38	38.04	+0.34	"	4	6	
	Juli	1	10 10 27	15 40.2	225.2	224.88	+0.226	40.54	40.50	+0.04	"	4	7	
		8	9 56 48	15 25.7	52.3	51.86	+0.302	39.36	39.26	+0.10	"	4	6	
		9	9 39 30	15 8.2	82.2	81.77	+0.272	36.47	36.31	+0.16	"	4	6	
		15	9 17 13	14 35.2	238.7	238.49	+0.140	38.19	38.14	+0.05	"	4	6	
		16	8 40 15	14 8.0	269.9	269.19	+0.444	35.89	35.83	+0.06	"	4	6	
		22	8 36 15	14 3.3	66.3	65.80	+0.324	36.99	37.09	−0.10	"	4	6	
		23	8 51 11	14 18.1	99.3	98.25	+0.652	35.90	35.58	+0.32	"	4	6	
		30	8 32 9	13 58.1	287.4	286.57	+0.516	35.37	35.60	−0.23	"	4	6	
	Aug.	5	8 13 54	13 39.0	82.9	82.16	+0.458	35.40	35.47	−0.07	"	4	6	
1895	März	4	17 15 50	22 44.3	337.5	327.26	+0.182	43.80	43.52	+0.28	"	4	4	
	April	1	13 57 10	19 28.8	360.6	359.94	+0.521	44.94	45.20	−0.26	"	4	6	
		14	14 56 30	20 29.1	350.5	350.13	+0.293	44.93	45.31	−0.38	"	4	6	
		21	13 52 27	19 25.3	175.9	175.52	+0.362	45.44	45.56	−0.12	"	4	6	
		22	13 8 48	18 41.7	199.5	198.46	+0.815	44.94	44.91	+0.03	"	4	6	
		28	14 58 2	20 31.1	4.2	2.95	+0.990	45.72	45.64	+0.08	"	4	6	
	Mai	6	11 36 54	17 10.1	210.6	210.15	+0.345	43.68	43.98	−0.30	"	4	6	
		13	10 35 51	16 9.0	36.3	35.91	+0.295	43.77	43.39	+0.38	"	4	6	
		19	11 20 49	16 53.9	198.9	198.56	+0.267	44.90	44.95	−0.05	"	4	6	
		20	9 59 55	15 32.9	222.2	222.26	−0.045	42.37	42.63	−0.26	"	4	6	
	Juni	2	10 14 54	15 47.4	210.8	210.56	+0.183	—	43.66	—	"	4	—	
		2	11 0 30	16 33.0	212.3	211.36	+0.715	43.42	43.58	−0.16	"	2	7	p Gew. ½
		9	9 22 54	14 54.9	36.6	36.43	+0.127	42.46	42.88	−0.42	"	4	6	
		10	9 58 0	15 29.9	64.8	64.70	+0.070	40.27	40.03	+0.24	"	4	7	

			Standard Pacific T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O p	C p	O – C n sdp	O s	C s	O – C n ds	Beob.	Zahl der Einst. p	s
1895	Juni	16	$9^h\ 7^m\ 42^s$	$14^h\ 39^m.1$	223°3	223°16	+0".102	42".13	41".93	+0".20	B.	4	6
		17	10 26 27	15 57.7	253.3	253.31	−0.007	39.35	39.25	+0.10	"	4	7
		24	10 13 48	15 44.5	81.8	81.26	+0.364	38.80	38.65	+0.15	"	4	7
		30	9 10 5	14 40.1	238.4	237.99	+0.286	39.74	39.94	−0.20		5	6
	Juli	7	9 51 24	15 20.5	67.6	66.65	+0.646	38.97	38.98	−0.01	"	4	6
		8	9 26 40	14 55.7	97.5	96.96	+0.359	38.17	38.04	+0.13	"	4	6
		14	9 10 51	14 39.1	253.4	253.86	−0.307	37.94	38.26	−0.32	"	4	6
		15	9 43 10	15 11.4	285.9	285.63	+0.179	37.69	38.05	−0.36		4	6
		21	8 30 3	13 57.4	81.6	81.24	+0.237	37.45	37.70	−0.25	"	4	6
		22	9 15 33	14 42.8	113.6	113.23	+0.247	38.32	38.21	+0.11	"	4	6
	Aug.	5	8 38 53	14 4.2	129.0	128.12	+0.598	39.35	38.97	+0.38	"	4	6
		11	8 18 54	13 43.3	286.4	285.99	+0.266	36.98	37.19	−0.21	"	4	6
		12	8 0 11	14 24.5	314.8	314.77	+0.021	39.50	39.42	+0.08	"	4	6
1894	April	4	12 10 43	17 43.4	35.01	34.85	+0.120	42.78	43.10	−0.32	S.	8	8
		7	13 23 43	18 56.6	126.00	125.36	+0.448	40.01	40.10	−0.09	"	8	8 :
		28	11 36 32	17 10.2	325.85	325.89	−0.030	41.72	42.51	−0.79	"	6	10
	Juni	19	10 46 31	16 17.6	270.54	269.72	+0.526	36.61	36.77	−0.16	"	8	10
		20	9 28 41	14 59.7	300.71	300.17	+0.357	37.69	37.91	−0.22	"	8	10
		26	10 3 15	15 33.6	97.74	97.52	+0.140	36.54	36.48	+0.06	"	10	10 :
	Juli	4	9 14 20	14 43.7	315.46	315.76	−0.205	39.24	39.18	+0.06	"	6	6
		6	9 24 40	14 53.8	4.10	3.83	+0.209	44.35	44.45	−0.10	"	6	6
1895	Juni	13	10 57 0	16 28.7	153.57	153.03	+0.410	43.65	43.53	+0.12	"	10	10
		23	10 18 26	15 49.2	52.18	51.76	+0.299	40.65	40.79	−0.14	"	10	10

Bedingungsgleichungen.

			Koeffizienten sdp					Übrigbl. Fehler r	Koeffizienten ds						Übrigbl. Fehler r
			du	$e \sin w$	$e \cos w$	dN	dJ		du	$e \sin w$	$e \cos w$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	dN	dJ	
1894	Mai	21	+39".3	−16".5	−35".7	+ 0".5	−21".1	+0".45	−6".7	+22".7	− 3".1	+43".8	− 6".4	−10".2	+0".57
		28	+39.9	+20.8	+34.0	− 1.0	−18.9	+0.08	−7.6	−22.2	+ 4.7	+42.8	− 9.0	−11.7	+0.59
	Juni	11	+41.5	+30.3	+28.4	− 2.1	−12.3	+0.39	−8.2	−19.8	+ 9.1	+40.3	−15.6	−12.9	+0.26
		24	+39.4	+22.5	+32.3	− 1.9	−17.7	+0.18	−8.0	−21.7	+ 2.3	+41.6	−10.3	−12.1	+0.07
		25	+43.1	+37.5	+21.1	+ 0.3	− 6.1	+0.06	−6.7	−15.1	+13.3	+38.0	−21.1	−11.2	+0.40
	Juli	1	+40.0	−26.3	−30.2	− 2.5	−15.0	+0.03	−8.3	+20.8	− 7.0	+40.5	−12.9	−12.7	+0.07
		8	+40.8	+30.3	+27.3	− 2.3	−11.8	−0.08	−8.2	−19.3	+ 9.1	+39.3	−15.8	−12.7	+0.18
		9	+44.0	+42.4	+11.8	+ 5.8	− 1.6	−0.14	−3.3	− 8.1	+16.6	+36.3	−24.4	− 6.8	+0.18
		15	+41.4	−33.6	−24.2	− 1.4	− 8.9	−0.06	−7.6	+17.4	−11.0	+38.1	−18.3	−12.2	+0.09
		16	+44.0	−43.4	− 7.3	+ 8.8	− 0.4	+0.22	−1.4	+ 4.4	−17.4	+35.8	−24.8	− 4.3	+0.09
		22	+42.1	+36.7	+20.5	+ 0.2	− 6.0	−0.07	−6.6	−14.8	+13.0	+37.1	−20.7	−11.0	−0.04

			Koeffizienten *s/p*					Übrigbl. Fehler *r*	Koeffizienten *ds*						Übrigbl. Fehler *r*
			du	*e* sin *w*	*e* cos *w*	*dN*	*dJ*		*du*	*e* sin *w*	*e* cos *w*	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	*dN*	*dJ*	
1894	Juli	23	+43″8	+43″8	+ 1″7	+12″7	+ 0″1	+0″25	+0″9	+ 0″3	+17″8	+35″6	−24″4	− 1″0	+0″35
		30	+43.2	−43.1	+ 3.5	+16.0	− 0.4	+0.28	+3.0	− 4.5	−17.5	+35.6	−23.1	+ 2.0	−0.22
	Aug.	5	+43.0	+41.4	+11.3	+ 5.8	− 1.4	+0.06	−3.1	− 7.7	+16.3	+35.5	−23.8	− 6.5	−0.06
1895	März	4	+40.0	−21.9	+33.5	+20.2	−15.9	−0.11	+3.5	−20.1	− 9.0	+43.5	− 3.0	+ 6.2	+0.30
	April	1	+39.9	− 5.6	+39.5	+13.0	−21.0	+0.19	−0.2	−22.3	− 3.4	+45.2	0.0	− 0.3	−0.21
		14	+40.2	−13.3	+37.9	+17.0	−20.2	−0.03	+1.9	−22.0	− 5.8	+45.3	− 0.6	+ 3.3	−0.34
		21	+40.0	+ 9.2	−38.9	+15.0	−21.2	+0.05	+0.8	+22.4	+ 4.4	+45.6	− 0.1	+ 1.5	−0.17
		22	+40.6	− 8.8	−39.6	+ 5.9	−20.2	+0.59	−3.6	+22.7	− 1.4	+44.9	− 2.5	− 6.9	+0.02
		28	+40.0	− 3.5	+39.8	+12.0	−22.0	+0.66	−0.7	−22.7	− 2.6	+45.5	− 0.1	− 1.2	+0.13
	Mai	6	+41.4	−17.6	−37.5	+ 2.5	−17.5	+0.13	−5.2	+22.1	− 4.6	+44.0	− 6.0	−10.1	−0.29
		13	+41.8	+21.7	+35.8	+ 1.4	−15.7	−0.10	−5.7	−21.5	+ 6.4	+43.4	− 8.1	−11.2	+0.45
		19	+40.3	− 8.7	−39.3	+ 5.7	−21.1	+0.06	−3.8	+22.8	− 1.2	+45.0	− 2.5	− 6.9	−0.06
		20	+42.4	−26.0	33.5	+ 0.7	−13.4	−0.17	−6.0	+20.5	− 8.3	+42.6	−10.5	−12.0	−0.24
	Juni	2	+40.8	−17.7	−36.8	+ 2.0	−18.0	−0.03		—	—	—	—	—	—
		2	+40.9	−18.3	−36.6	+ 1.8	−17.7	+0.50½	−5.6	+22.0	− 4.7	+43.6	− 6.6	−10.4	−0.17
		9	+41.2	+21.8	+35.0	+ 0.9	−16.0	−0.26	−6.1	−21.4	+ 6.2	+42.9	− 8.4	−11.3	−0.49
		10	+44.1	+37.9	+22.6	+ 2.7	− 5.2	−0.35	−4.8	−14.4	+14.7	+40.0	−18.4	−10.6	+0.28
		16	+41.7	−26.1	−32.6	+ 0.2	−13.4	−0.11	−6.3	+20.3	− 8.2	+41.9	−10.9	−12.0	+0.22
		17	+44.5	−41.0	−17.5	+ 5.0	− 2.8	−0.22	−3.5	+10.9	−16.7	+39.2	−20.4	− 8.6	+0.13
		24	+44.7	+43.0	+12.4	+ 7.6	− 1.1	−0.05	−2.1	− 7.4	+18.0	+38.7	−21.7	− 6.3	+0.15
		30	+42.8	−34.3	−25.7	+ 1.0	− 7.7	+0.09	−5.7	+16.6	−12.5	+39.9	−16.4	−11.6	−0.17
	Juli	7	+43.4	+37.9	+21.0	+ 2.8	4.7	+0.24	−4.7	−13.5	+14.8	+39.0	−19.0	−10.1	+0.03
		8	+44.4	+44.3	+ 2.1	+13.4	+ 0.1	−0.04	+1.1	+ 0.2	+19.0	+38.0	−21.8	− 1.1	+0.10
		14	+43.6	−40.3	−16.8	+ 4.8	− 2.7	−0.52	−3.5	+10.6	−16.3	+38.3	−20.3	− 8.4	−0.29
		15	+43.8	−43.7	+ 3.6	+16.5	− 0.5	−0.06	+2.8	− 4.4	−18.7	+38.0	−20.7	+ 1.8	−0.34
		21	+43.8	+42.0	+12.2	+ 7.3	− 1.1	−0.17	−2.1	− 7.3	+17.5	+37.7	−21.4	− 6.3	−0.24
		22	+43.1	+42.2	− 8.5	+18.9	1.7	−0.13	+4.1	+ 7.8	+17.9	+38.2	−19.0	+ 4.2	+0.04
	Aug.	5	+41.2	+37.4	−17.5	+22.2	− 5.7	+0.26	+5.9	+13.6	+15.2	+39.0	−14.2	+ 7.7	+0.29
		11	+42.8	−42.6	+ 3.8	+16.2	− 0.5	+0.03	+2.8	− 4.5	−18.3	+37.2	−20.0	+ 1.9	−0.20
		12	+40.3	−34.4	+21.0	+22.8	− 8.0	−0.24	+6.2	−15.5	−13.6	+39.4	− 1.2	+ 8.5	+0.08
1894	April	4	+40.5	+20.4	+35.0	+ 0.1	−17.9	−0.26	−6.7	−22.0	+ 5.1	+43.1	− 8.1	−11.3	−0.24
		7	+43.5	+40.5	−16.3	+23.0	− 4.9	+0.08	+6.3	+13.3	+16.3	+40.1	−16.9	+ 7.7	−0.18
		28	+41.2	−30.9	+27.2	+25.1	−13.3	−0.31	+7.5	−19.7	−11.0	+42.5	− 9.3	+10.2	−0.79
	Juni	19	+45.0	−44.5	− 7.1	+ 9.4	− 0.3	+0.29	−1.2	+ 4.1	−17.9	+36.7	−25.1	− 4.1	−0.13
		20	+43.5	−41.9	+12.1	+21.6	− 3.2	+0.11	+6.1	−11.1	−16.5	+37.9	−20.1	+ 6.5	−0.22
		26	+44.8	+44.8	+ 2.2	+12.7	+ 0.1	−0.27	+0.8	− 0.1	+18.2	+36.5	−24.9	− 1.3	−0.02
	Juli	4	+41.1	−35.6	+20.7	+24.7	− 8.6	−0.47	+8.1	−16.9	−12.8	+39.2	−14.3	+ 9.8	+0.05
		6	+36.1	− 3.8	+35.9	+11.8	−25.8	−0.10	+0.3	−22.1	− 2.1	+44.5	0.0	+ 0.3	−0.06
1895	Juni	13	+40.4	+25.6	−31.2	+22.7	−15.7	+0.11	+5.5	+20.3	+ 9.6	+43.5	− 5.2	+ 8.4	+0.03
		23	+42.5	+31.1	+28.8	+ 0.3	−10.0	−0.10	6.2	−18.4	+10.8	+40.8	−14.3	−12.1	−0.08

Anmerkung. Allen Messungen, mit Ausnahme der zweiten Messung *p*, Juni 2 1895, ist gleiches Gewicht erteilt.

Normalgleichungen.

	du	2*e* sin *w*	2*e* cos *w*	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	*dN*	*dJ*	*n*
du	90301	+4259	+ 5902	−3809	+19241	−18456	+668.52
2*e* sin *w*		67473	+11304	−4967	+ 279	+ 587	+168.56
2*e* cos *w*			43383	+1321	+ 869	− 2624	+123.09
$\frac{d\Delta}{\Delta}$				82193	−26840	− 8912	− 36.87
dN					20016	− 373	+131.07
dJ						11841	−189.34

Auflösung Oberon—Uranus 1894, 1895.

Lickrefraktor. Barnard, Schaeberle.

Mittlere Epoche 1895.01.

	lg *a*	lg *b*	lg *c*			*a*	w. F.		
sin *du*	7.8589	9.3020_n	9.3180	Korr. Newcomb	*du*	+0°414	±0°033	(*nn*)	11.68
2*e* sin *w*	7.2573	8.5309	8.2763_n		*e* sin *w*	+0.00090	±0 00033	$(vv)_{sdp}$	3.00
2*e* cos *w*	7.1411	8.0545_n	8.5260		*e* cos *w*	+0.00069	±0.00043	$(vv)_{ds}$	3.46
$\frac{d\Delta}{\Delta}$	5.4289_n	9.5044	9.0658		Δ	42″101	±0″025	(*vv*)	6.46

Korr. = $a + b \sin dN + c \sin dJ$

Zahl der Mess. 51 *p*, 50 *s*
Summe der Gew. 50½ *sdp*, 50 *ds*
w. F. einer Gl. ±0″174

Die vollständige Auflösung mit 6 Unbekannten ergibt:

	lg					
sin *du*	7.7619	Korr. Newcomb	*du*	+0°331		
2*e* sin *w*	7.2848		*e* sin *w*	+0.00096		
2*e* cos *w*	7.0543		*e* cos *w*	+0.00057		
$\frac{d\Delta}{\Delta}$	7.0764_n		Δ	42″052		
sin *dN*	6.9160_n		*N*	166°006	±0°114	Aeq.
sin *dJ*	7.8895_n		*J*	74.856	±0.120	1900.0

Oberon—Uranus.

Lickrefraktor 36 Z. 1896, 1897, 1898. Beob.: Hussey, Schaeberle, Aitken.

Beobachtung — Rechnung.

			Mt. Ham. M. T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O *p*	C *p*	O − C *n* *sdp*	O *s*	C *s*	O − C *n* *ds*	Beob.	Zahl der Einst. *p* *s*
1896	Juli	8	$9^h 32^m 40^s$	15^h $8^m.2$	164°3	163°66	+0″492	44″09	44″10	−0″01	H.	4—6
1897	Mai	2	12 30 40	18 9.1	211.2	210.17	+0 830	43.91	44.04	−0.13	"	4—6
		9	12 20 46	17 59.4	37.3	37.17	+0.099	43.87	43.74	+0.13	"	4—6
	Juni	6	11 3 50	16 42.1	65.9	65.55	+0 258	42.10	42.27	−0.17	"	4—6
		27	10 14 39	15 51 4	267.2[1]	267.79	−0.427	41.22	41.47	−0.25	"	4—6
	Juli	4	15 55 7	16 31.1	95.7	96.36	−0.476	41.41	41.37	+0.04	"	4—6

---

[1] Im Lick-Bulletin Nr. 17 steht 262°7. Offenbar Versehen. Korrektur jedoch zweifelhaft.

			Mt. Ham. M. T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O p	C p	O − C $s\,dp$	O s	C s	O − C ds	Beob.	Zahl der Einst. p	s
1898	Juni	9	11h 8m 31s	16h 46m.3	185°.7	184°.66	+0″.813	44″.26	44″.82	−0″.56	B.	4−6	
		23	11 38 37	17 15.6	200.1	199.26	+0.647	43.80	44.12	−0.32	"	4−6	
	Juli	7	9 12 17	14 48.0	212.7	210.84	+1.405	43.44	43.30	+0.14		4−6	
			Pac. Std. T.										
1897	April	12	12 59 21	18 30.2	35.56	35.68	−0.091	42.92	43.49	−0.57	S.	6	6
		23	11 53 48	17 25.3	331.56	331.46	+0.078	44.77	44.89	−0.12	"	6	6
	Mai	3	12 15 52	17 47.9	237.40	237.05	+0.262	42.83	42.88	−0.05	"	6	6
		17	10 31 15	16 3.4	250.52	250.23	+0.215	42.59	42.50	+0.09	"	6	6
		20	10 5 40	15 37.9	331.60	331.92	−0.252	44.99	45.03	−0.04	"	6	6
		21	10 38 2	16 10.2	357.56	357.56	0.000	45.13	45.32	−0.19	"	6	6
		28	9 37 35	15 9.6	184.12	183.30	+0.646	45.01	45.18	−0.17	"	6	6
		29	11 15 48	16 47.8	210.96	210.73	+0.177	43.70	43.98	−0.28	"	6	6
		31	10 19 42	15 51.7	266.07	265.46	+0.450	42.41	42.22	+0.19	"	6	6
	Juni	4	10 46 26	16 18.2	12.08	11.33	+0.587	44.29	44.87	−0.58	"	6	6
		7	11 9 58	16 41.6	94.65	94.21	+0.324	42.15	42.16	−0.01	"	6	6
		11	9 24 56	14 56.3	196.94	196.75	+0.148	44.65	44.51	+0.14	"	6	6
		16	9 13 35	14 44.7	333.45	333.28	+0.132	44.36	44.67	−0.31	"	6	6
1898	März	27	17 2 23	22 30.5	12.4	11.52	+0.671	43.20	43.71	−0.51	A.	6	4
	April	18	15 51 46	21 21.2	331.3	332.39	−0.847	—	44.51	—	"	5	5
		22	14 38 12	20 8.8	345.3	345.08	+0.172	44.05	44.89	−0.84	"	5	5
		24	14 49 14	20 20.0	38.4	37.95	+0.343	43.28	43.72	−0.44	"	5	5
	Mai	29	11 20 56	16 52.5	251.2	251.30	−0.075	43.80	43.21	+0.59	"	5	5
	Juni	4	11 37 34	17 9.0	52.1	51.28	+0.621	42.87	43.39	−0.52	"	5	5
		5	11 46 20	17 17.7	80.3	79.35	+0.714	43.46	43.09	+0.37	"	5	5
		17	10 40 7	16 10.9	37.9	37.56	+0.259	43.62	43.58	+0.04	"	5	5
	Juli	3	10 45 26	16 14.9	108.7	108.25	+0.337	42.91	42.95	−0.04	"	5	5

Bedingungsgleichungen.

			Koeffizienten sdp					Übrigbl. Fehler	Koeffizienten ds						Übrigbl. Fehler
			du	$e \sin w$	$e \cos w$	dN	dJ	v	du	$e \sin w$	$e \cos w$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	dN	dJ	v
1896	Juli	8	+39″.9	+17″.4	−35″.9	+18″.3	−17″.5	−0″.04	+2″.4	+20″.9	+ 7″.5	+44″.1	− 1″.4	+4″.4	+0″.07
1897	Mai	2	+43.6	−19.0	−39.4	+ 6.1	−10.7	+0.40	−2.8	+21.0	− 7.1	+44.1	− 5.1	−9.1	−0.09
		9	+44.1	+23.9	+37.0	+ 5.5	− 9.1	−0.10	−2.9	−19.9	+ 9.5	+43.7	− 6.8	−9.8	+0.42
	Juni	6	+45.0	+39.0	+22.4	+ 7.6	− 2.3	−0.09	−1.6	−11.9	+17.5	+42.3	−13.8	−8.0	+0.12
		27	+44.8	−44.2	− 7.2	+12.8	+ 0.2	−0.59	+0.6	+ 2.8	−20.6	+41.5	−15.9	−2.7	−0.24
	Juli	4	+44.4	+44.4	+ 1.1	+15.1	+ 0.1	−0.96	+1.5	+ 1.0	+20.7	+41.4	−15.6	−0.4	+0.27
1898	Juni	9	+43.2	− 0.2	−43.2	+10.9	−12.7	+0.30	−1.4	+22.4	+ 1.2	+44.8	− 0.4	−4.6	−0.49
		23	+43.3	−11.3	−41.8	+ 8.1	11.0	+0.18	−2.0	+21.8	− 3.8	+44.2	− 2.6	−7.4	−0.28
	Juli	7	+43.3	−19.5	38.7	+ 6.7	− 8.8	+0.98	−2.2	+20.3	− 7.8	+43.2	− 5.1	−8.7	+0.17

			Koeffizienten *sdp*					Übrigbl. Fehler	Koeffizienten *ds*						Übrigbl. Fehler
			du	*e* sin *w*	*e* cos *w*	*dN*	*dJ*	*v*	*du*	*e* sin *w*	*e* cos *w*	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	*dN*	*dJ*	*v*
1897	April	12	+43″7	+22″9	+37″3	+ 5″9	− 8″8	−0″29	−2″6	−19″9	+ 9″1	+43″4	− 6″2	−9″4	−0″28
		23	+42.8	−24.9	+34.7	+19.1	−11.9	+0.07	+1.6	−19.2	−11.7	+44.9	− 2.2	+3.8	−0.01
	Mai	3	+44.9	−35.5	−27.5	+ 6.8	− 3.7	−0.05	−2.0	+14.7	−15.7	+42.8	−11.6	−8.9	−0.04
		17	+45.3	−40.9	−19.4	+ 9.0	− 1.2	−0.03	−1.0	+10.0	−18.7	+42.5	−14.1	−6.8	+0.09
		20	+42.7	−24.9	+34.7	+19.5	−12.4	−0.26	+1.9	−19.4	−11.6	+45.0	− 2.5	+4.3	+0.10
		21	+42.4	− 6.1	+42.0	+13.0	−16.0	−0.04	−0.7	−22.3	− 4.0	+45.3	+ 0.1	−1.9	+0.03
		28	+42.4	+ 1.7	−42.4	+11.4	−16.0	+0.12	−1.3	+22.5	+ 2.2	+45.2	− 0.2	−3.4	−0.10
		29	+43.5	−19.3	−39.0	+ 5.6	−11.4	−0.25	−3.0	+21.1	− 7.0	+44.0	− 5.3	−9.4	−0.24
		31	+45.3	−44.4	− 8.8	+12.6	+ 0.2	+0.28	+0.4	+ 3.7	−20.8	+42.2	−15.5	−3.2	+0.20
	Juni	4	+42.5	+ 4.6	+42.2	+ 9.2	−15.5	+0.40	−2.1	−22.5	+ 0.4	+44.9	− 1.2	−5.6	−0.33
		7	+45.1	+45.0	+ 2.5	+14.9	+ 0.2	−0.16	+1.3	+ 0.1	+21.1	+42.2	−15.3	−0.9	+0.23
		11	+42.5	− 8.7	−41.6	+ 7.8	−14.8	−0.33	−2.5	+22.3	− 2.1	+44.5	− 2.0	−6.9	+0.20
		16	+42.2	−24.0	+34.7	+19.4	−13.1	+0.13	+2.0	−19.5	−11.0	+44.7	− 2.5	+4.5	−0.16
1898	März	27	+43.0	+ 6.0	+42.7	+ 9.6	− 9.7	+0.37	−1.4	−21.8	+ 1.6	+43.7	− 1.3	−6.1	−0.26
	April	18	+43.0	−23.1	+36.3	+17.0	− 9.9	−0.85	—	—				—	—
		22	+43.2	−14.4	+40.7	+14.9	−11.5	−0.04	−0.3	−21.1	− 7.7	+44.9	+ 0.2	−0.9	−0.65
		24	+44.5	+25.0	+36.7	+ 7.7	− 5.5	+0.13	−1.5	−18.9	+11.0	+43.7	− 6.0	−8.5	−0.13
	Mai	29	+45.2	−41.4	−18.2	+11.0	− 0.2	−0.31	−0.2	+ 8.8	−19.7	+43.2	−11.7	−5.3	+0.60
	Juni	4	+44.9	+32.8	+30.5	+ 7.7	− 3.5	+0.31	−1.4	−15.8	+14.9	+43.3	− 9.2	−8.4	−0.23
		5	+45.1	+43.3	+12.5	+12.6	+ 0.3	+0.38	+0.4	− 5.6	+20.8	+43.0	−12.3	−3.7	+0.64
		17	+44.2	+24.4	+36.8	+ 6.8	− 6.9	+0.05	−2.0	−19.3	+10.3	+43.5	− 6.3	−9.0	+0.33
	Juli	3	+43.9	+43.0	− 8.7	+18.2	− 1.5	−0.19	+2.0	+ 6.2	+20.6	+42.9	−10.6	+2.3	+0.17

Anmerkung. Allen Messungen ist gleiches Gewicht gegeben, obwohl die Messungen von Schaeberle etwas genauer sind.

Normalgleichungen.

	du	2*e* sin *w*	2*e* cos *w*	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	*dN*	*dJ*	*n*
du	59261	−1262	+4987	− 914	+15341	−10191	+377.09
2*e* sin *w*		34648	+6204	−1717	− 542	+ 830	+106.25
2*e* cos *w*			38908	− 105	+ 2002	− 925	−146.49
$\frac{d\Delta}{\Delta}$				57190	− 8674	− 5626	−194.79
dN					6855	− 1857	+ 78.75
dJ						4131	− 57.77

Auflösung Oberon—Uranus 1896, 1897, 1898.

Lickrefraktor. Hussey, Schaeberle, Aitken.

Mittlere Epoche 1897.74.

	lg *a*	lg *b*	lg *c*			*a*	w. F.	(*nn*)	11.67
sin *du*	7.8355	9.4056_n	9.2377	Korr. Newcomb	*du*	+0°392	±0°057		
2*e* sin *w*	7.6136	8.2409	8.1271_n		*e* sin *w*	+0.00205	±0.00065	$(vv)_{sdp}$	4.41
2*e* cos *w*	7.7248_n	8.3177_n	7.6069		*e* cos *w*	−0.00265	±0.00062	$(vv)_{ds}$	2.58
$\frac{d\Delta}{\Delta}$	7.5029_n	9.1706	9.0033		Δ	41″968	±0″042	(*vv*)	6.99

Korr. $= a + b \sin dN + c \sin dJ$

Zahl der Mess. 31 *p*, 30 *s*
Summe der Gew. 31 *sdp*, 30 *ds*
w. F. einer Gl. ±0″236

Oberon — Uranus.

Lickrefraktor 36 Z. 1899, 1900, 1901. Beob.: Aitken.

Beobachtung — Rechnung.

		Standard Pacific T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O	C	O − C	O	C	O − C	Zahl der Einst.		
				p	p	n sdp	s	s	n ds	p	s	
1899 Mai	11	$13^h 13^m 41^s$	$18^h 44^m.5$	171°3	169°98	+1″033	44″86	44″83	+0″03	10	10	
	14	13 2 46	18 33.7	250.8	250.71	+0.069	44.43	43.92	+0.51	10	10:	Gew. ½
	20	11 31 33	17 2.7	49.4	49.01	+0.299	43.79	43.96	−0.17	10	10	
	26	12 4 21	17 35.5	211.2	209.75	+1.118	44.53	44.21	+0.32	10	10	
Juni	4	11 14 33	16 45.6	91.1	90.92	+0.138	44.26	44.07	+0.19	10	10	
	15	12 29 54	18 0.5	25.7	25.13	+0.439	43.68	44.13	−0.45	10	10	
	16	12 32 51	18 3.4	53.3	52.40	+0.686	43.11	43.66	−0.55	10	10	
	21	11 21 18	16 51.6	185.7	184.43	+0.986	45.02	44.48	+0.54	10	10:	Gew. ½
	28	11 39 46	17 9.6	12.5	11.90	+0.463	43.87	44.18	−0.31	10	10	
	29	9 3 56	14 33.6	37.2	35.84	+1.035	43.84	43.62	+0.22	10	10	
Juli	7	10 53 16	16 22.3	253.0	252.81	+0.143	42.83	43.07	−0.24	10	10	
	9	10 4 15	15 33.0	306.1	305.95	+0.115	44.14	44.00	+0.14	10	10	
	23	8 44 17	14 11.6	318.8	318.68	+0.092	44.01	43.78	+0.23	10	10	
1900 April	27	13 29 21	18 58.5	195.2	194.31	+0.683	43.87	43.98	−0.11	8	8	
Mai	18	12 54 30	18 24.8	36.4	35.64	+0.586	43.42	44.20	−0.78	8	8:	Gew. ½
	19	13 4 2	18 34.4	64.3	62.93	+1.058	43.88	44.27	−0.39	8	8	
	25	12 30 36	18 1.1	222.7	222.53	+0.131	44.32	44.22	+0.10	8	8	
Juni	2	10 46 55	16 17.5	75.0	75.02	−0.015	44.26	44.37	−0.11	8	8	
	16	10 45 11	16 15.4	90.7	89.62	+0.836	43.88	44.38	−0.50	8	8:	Gew. ½
	22	11 9 37	16 39.5	251.0	250.43	+0.438	43.98	44.06	−0.08	8	8	
1901 März	28	16 11 28	21 36.3	154.1	153.22	+0.659	42.75	42.89	−0.14	8	8	
April	11	15 39 3	21 5.6	168.3	167.14	+0.877	43.21	43.30	−0.09	8	8	
	12	15 6 33	20 33.3	194.4	193.54	+0.650	43.63	43.32	+0.31	8	8	
	13	15 7 37	20 34.4	221.8	220.48	+1.002	43.18	43.51	−0.33	8	8	
	18	15 46 51	21 14.1	355.3	354.58	+0.547	43.41	43.50	−0.09	8	8	
Mai	10	15 9 30	20 38.7	223.8	222.78	+0.786	44.39	44.16	+0.23	8	8	
Juni	6	12 24 12	17 54.2	222.7	222.01	+0.534	44.48	44.33	+0.15	8	8	
	8	10 54 11	16 24.1	274.0	273.78	+0.172	44.94	44.67	+0.27	8	8	
	22	10 28 52	15 58.5	287.3	287.74	−0.342	44.57	44.59	−0.02	8	8	
Juli	6	10 21 39	15 50.4	302.1	302.01	+0.070	44.11	44.36	−0.25	8	8	

Bedingungsgleichungen.

		Koeffizienten sdp					Übrigbl. Fehler	Koeffizienten ds						Übrigbl. Fehler
		du	$e \sin w$	$e \cos w$	dN	dJ	v	du	$e \sin w$	$e \cos w$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	dN	dJ	v
1899 Mai	11	+43″9	+ 9″9	−42″8	+13″2	−8″9	+0″216	−0″7	+21″7	+ 5″7	+44″9	+0″5	−3″2	+0″011
	14	+45.0	−41.4	−17.6	+13.0	+0.7	−0.314 (½)	+0.4	+ 8.3	−20.4	+43.9	−8.5	−3.8	+0.508 (½)
	20	+45.0	+32.2	+31.4	+10.0	−1.5	−0.236	−0.5	−15.7	+15.4	+43.9	−6.9	−6.8	+0.081

		Koeffizienten *sdp*					Übrigbl. Fehler *v*	Koeffizienten *ds*						Übrigbl. Fehler *v*
		du	*e* sin *w*	*e* cos *w*	*dN*	*dJ*		*du*	*e* sin *w*	*e* cos *w*	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	*dN*	*dJ*	
1899 Mai	26	+44″7	−20″1	−39″9	+ 9″0	−4″8	+0″486	−1″0	+20″2	− 9″0	+44″3	−4″2	−7″7	+0″227
Juni	4	+44.8	+44.7	+ 2.7	+16.0	+0.3	−0.630	+1.0	− 0.4	+22.0	+44.1	−8.6	−0.6	+0.372
	15	+44.4	+16.6	+41.1	+ 8.8	−6.2	+0.058	−1.2	−20.9	+ 7.1	+44.2	−3.4	−7.6	−0.206
	16	+44.9	+33.7	+29.5	+ 9.8	−1.5	+0.132	−0.5	−14.8	+16.1	+43.6	−7.8	−6.8	−0.299
	21	+43.8	− 0.9	−43.7	+10.9	−9.3	+0.229 (½)	−1.1	+22.2	+ 0.7	+44.5	−0.5	−5.3	+0.493 (½)
	28	+43.7	+ 6.6	+43.2	+ 9.9	−8.6	+0.159	−1.3	−22.0	+ 2.1	+44.2	−1.3	−6.3	−0.088
	29	+44.3	+23.8	+37.3	+ 8.4	−4.5	+0.590	−1.1	−19.0	+10.7	+43.6	−5.3	−7.9	+0.471
Juli	7	+44.5	−41.3	−16.3	+12.4	+0.4	−0.226	+0.3	+ 7.6	−20.1	+43.0	−9.7	−4.0	−0.339
	9	+43.3	−37.1	+22.3	+18.8	−4.9	−0.046	+1.2	−12.4	−18.2	+44.0	−4.3	+2.9	+0.161
	23	+42.7	−30.8	+29.6	+18.2	−7.3	−0.056	+0.9	−15.8	−15.2	+43.7	−2.2	+2.4	+0.292
1900 April	27	+44.4	− 9.8	−43.3	+10.7	−2.7	−0.025	−0.4	+21.5	− 4.4	+43.9	−1.6	−6.4	−0.190
Mai	18	+44.8	+24.8	+37.3	+11.0	−0.6	+0.131 (½)	−0.1	−18.4	+12.1	+44.2	−4.1	−6.2	−0.535 (½)
	19	+44.8	+39.0	+22.0	+13.6	+1.3	+0.433	+0.4	−10.5	+19.5	+44.3	−5.9	−3.4	−0.155
	25	+44.9	−29.0	−34.2	+11.3	0.0	−0.417	0.0	+16.9	−14.3	+44.3	−4.8	−5.8	−0.015
Juni	2	+44.7	+42.6	+13.5	+15.0	+1.2	−0.710	+0.6	− 6.2	+21.3	+44.4	−6.0	−2.0	+0.108
	16	+44.5	+44.4	+ 2.6	+16.5	+0.3	+0.071 (½)	+0.7	− 0.6	+22.2	+44.4	−5.6	−0.3	−0.311 (½)
	22	+44.6	−41.2	−17.0	+14.1	+1.2	+0.062	+0.5	+ 7.9	−20.6	+44.1	−6.6	−2.9	−0.184
1901 März	28	+43.1	+19.3	−38.5	+12.2	−2.6	−0.178	−0.4	+19.0	+ 9.9	+42.9	+2.1	−4.7	−0.126
April	11	+43.7	+ 9.7	−42.6	+11.5	−1.7	+0.067	−0.2	+21.0	+ 5.0	+43.3	+1.1	−5.7	−0.117
	12	+43.7	−10.0	−42.6	+11.3	+1.0	−0.044	+0.1	+21.0	− 5.1	+43.3	−1.4	−5.9	+0.220
	13	+43.6	−28.0	−33.4	+13.4	+2.8	+0.467	+0.4	+16.4	−14.3	+43.5	−3.0	−3.8	−0.448
	18	+43.9	− 4.2	+43.7	+11.3	−1.1	+0.308	−0.1	−21.6	− 2.2	+43.4	+0.5	−6.0	+0.091
Mai	10	+44.4	−29.7	−32.9	+13.5	+2.6	+0.254	+0.4	+16.1	−15.1	+44.2	−3.3	−3.9	+0.110
Juni	6	+44.7	−29.2	−33.7	+13.0	+2.0	−0.007	+0.3	+16.5	−14.8	+44.4	−3.6	−4.4	+0.031
	8	+44.3	−44.3	+ 2.2	+17.3	−0.3	+0.038	+0.2	− 1.3	−22.3	+44.7	−1.4	+0.1	+0.215
	22	+44.2	−42.3	+12.7	+17.2	−1.9	−0.537	+0.1	− 6.5	−21.3	+44.6	−0.4	+0.1	−0.038
Juli	6	+43.8	−37.7	+22.5	+16.6	−3.3	−0.093	−0.1	−11.3	−19.1	+44.4	+0.6	−0.4	−0.230

Normalgleichungen.

	du	2*e* sin *w*	2*e* cos *w*	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	*dN*	*dJ*	*n*
du	54737	−6185	−3321	− 44	+15981	−2302	+621.86
2*e* sin *w*		33169	+6489	+1447	− 2584	− 251	+ 83.29
2*e* cos *w*			35111	−3258	− 770	− 706	−196.27
$\frac{d\Delta}{\Delta}$				54174	− 4241	−4774	− 54.75
dN					5521	− 267	+170.95
dJ						1087	− 20.55

Auflösung Oberon—Uranus 1899, 1900, 1901.

Lickrefraktor. Aitken.

Mittlere Epoche 1900.32.

	lg a	lg b	lg c			a	w. F.		
								(nn)	13.50
$\sin du$	8.0673	9.4619*n*	8.6503	Korr. Newcomb	du	+0°669	±0°047		
$2e \sin w$	7.7686	8.3210	7.7627		$e \sin w$	+0.00293	±0.00053	$(vv)_{sdp}$	2.85
$2e \cos w$	7.7566*n*	7.3408*n*	8.4998		$e \cos w$	−0.00285	±0.00052	$(vv)_{ds}$	1.73
$\frac{d\Delta}{\Delta}$	7.1765*n*	8.8885	8.9537		Δ	42″039	±0″035	(vv)	4.58

Korr. $= a + b \sin dN + c \sin dJ$

Zahl der Mess. 30 *p*, 30 *s*
Summe der Gew. 28 *sdp*, 28 *ds*
w. F. einer Gl. ±0″193

Oberon — Uranus.

Washington-Refraktor 26 Z. 1900. Beob.: See.

Beobachtung — Rechnung.

			Wash. M. T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O p	C p	O − C n sdp	O s	C s	O − C n ds	Zahl der Einst. p	Zahl der Einst. s	
1900	April	25	$15^h\ 8^m.5$	$17^h\ 45^m.6$	140°03	139°55	+0″372	45″78	44″38	(+1″40)	10	10	
		26	14 32.7	17 9.9	166.41	165.44	+0.749	44.68	44.23	+0.45	10	10	
	Mai	5	15 10.4	17 48.3	47.98	47.38	+0.461	44.39	44.03	+0.36	10	10	
		9	15 30.7	18 8.8	155.34	154.36	+0.761	44.68	44.60	+0.08	10	10 :	
		17	13 23.8	16 2.3	6.68	5.95	+0.565	43.87	44.38	−0.51	10	10	
		20	12 31.8	15 10.4	86.04	86.02	+0.016	44.95	44.48	+0.47	10	10	
		21	13 27.5	16 6.1	114.47	113.64	+0.648	44.80	44.77	+0.03	10	10	
		30	11 25.9	14 4.7	351.83	351.50	+0.257	44.81	44.63	+0.18	10	10	
	Juni	1	10 41.0	13 19.8	45.29	44.59	+0.540	44.93	44.20	+0.73	10	10 :	Gew. ½
		4	11 30.3	14 9.0	126.59	125.91	+0.532	45.31	44.84	+0.47	10	10	
		5	11 47.8	14 26.5	153.40	152.60	+0.626	44.62	44 80	−0.18	10	10	
		6	12 2.2	14 40.9	180.23	179.42	+0.629	44.46	44.52	−0.06	10	10	
		7	12 9.0	14 47.7	207.52	206.46	+0.818	44.10	44.23	−0.13	10	10	
		8	12 1.1	14 39.8	233.21	233.47	−0.200	43.45	44.17	−0.72	10	10	
		19	9 29.5	12 7.8	165.19	164.43	+0.592	44.33	44.60	−0.27	10	10	
		20	10 37.4	13 15.7	192.59	192.35	+0.185	44.11	44.24	−0.13	10	10	
		23	11 15.5	13 53.6	274.46	274.25	+0.162	44.39	44.31	+0.08	10	10	
		24	10 55.0	13 33.0	300.66	300.44	+0.171	44.87	44.59	+0.28	5	6 :	Gew. ½
		30	9 47.4	12 25.0	100.48	99.86	+0.479	44.70	44.23	+0.47	10	10 :	Gew. ½
	Juli	1	9 56.3	12 33.9	127.27	126.52	+0.582	44.35	44.48	−0.13	10	10	
		2	9 32.5	12 10.0	153.12	152.39	+0.567	44.78	44.47	+0.31	10	10	
		15	9 22.7	11 59.1	140.81	140.17	+0.493	44.58	44.18	+0.40	10	10	
		16	9 27.0	12 3.3	167.10	166.55	+0.422	43.69	44.01	−0.32	10	10	
		17	9 29.8	12 6.0	194.76	193.24	+1.157	43.77	43.62	+0.15	10	10	
		27	8 46.9	11 22.0	101.36	100.96	+0.303	43.89	43.44	+0.45	10	10	
		28	8 42.0	11 17.0	127.96	127.34	+0.473	44.16	43.71	+0.45	10	10	
		30	8 36.0	11 10.8	180.90	179.90	+0.758	43.47	43.41	+0.06	10	10	

		Wash. M. T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O p	C p	O − C $s\,dp$	O s	C s	O − C ds	Zahl der Einst. p	s
1900 Juli	31	$8^h 29^m.3$	$11^h 3^m.9$	207°.56	206°.60	+0.720	43″.37	42″.99	+0″.38	10	10
Aug.	15	8 4.2	10 36.9	247.74	247.96	(−0.163)	42.61	42.35	(+0.26)	10	10
	18	8 8.4	10 40.6	326.99	327.88	(−0.668)	42.70	43.00	(−0.30)	10	10:
	19	8 0.7	10 32.8	354.98	354.07	(+0.679)	43.08	42.76	(+0.32)	10	10
	25	7 48.7	10 20.0	156.54	154.52	(+1.505)	42.92	42.71	(+0.21)	10	10
	30	7 51.7	10 22.3	288.83	288.99	(−0.118)	41.48	42.30	(−0.82)	10	10
	31	7 50.6	10 21.0	314.26	315.33	(−0.793)	42.24	42.50	(−0.26)	10	10

Anmerkung. Ausgeschlossen: *s* April 25 wegen zu großer Abweichung und alle Messungen im August, welche aus unbekannten Gründen mißglückt sind. Die Messungen sind den Astr. Nachr. Bd. 154 entnommen, vgl. die Anmerkung S. 24. Bei Berücksichtigung der nachträglich bestimmten kleinen Verbesserungen (Vol. VI Naval Observ.) würden nur die Distanzen im Mittel um etwa 0″.02 zu vergrößern sein.

Bedingungsgleichungen.

		Koeffizienten $s\,dp$					Übrigbl. Fehler r	Koeffizienten ds						Übrigbl. Fehler r
		du	$e \sin w$	$e \cos w$	dN	dJ		du	$e \sin w$	$e \cos w$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	dN	dJ	
1900 April	25	+43″.8	+29″.4	−32″.5	+15″.6	−5″.1	−0″.16		·	–			—	--
	26	+44.1	+12.2	−42.4	+12.7	−5.4	+0.22	−0″.6	+22″.1	+ 6″.6	+44″.3	+1″.0	−4.2	+0″.35
Mai	5	+44.6	+31.7	+31.3	+12.1	+0.8	+0.01	+0.2	−15.3	+15.8	+44.1	−5.0	−5.1	+0.29
	9	+44.2	+20.3	−39.3	+14.2	−5.9	+0.23	−0.5	+19.6	+10.6	+44.6	+1.2	−2.7	−0.03
	17	+44.6	+ 3.3	+44.5	+11.0	−4.3	+0.13	−0.6	−22.2	+ 1.1	+44.4	−0.7	−6.1	−0.60
	20	+44.5	+44.3	+ 5.0	+16.3	+0.6	−0.47	+0.6	− 1.9	+22.2	+44.5	−5.0	−0.6	+0.38
	21	+44.3	+41.2	−16.0	+17.7	−2.6	+0.14	+0.4	+ 8.5	+20.7	+44.8	−2.1	+0.9	−0.05
	30	+44.5	− 8.0	+43.7	+12.4	−6.0	−0.17	−0.6	−21.8	− 4.6	+44.7	+0.6	−4.6	+0.08
Juni	1	+44.9	+30.2	+33.2	+11.4	0.0	+0.09(½)	0.0	−16.3	+14.9	+44.2	−5.1	5.7	+0.05(½)
	4	+44.2	+36.9	−24.4	+17.5	−4.3	+0.01	+0.2	+12.5	+18.6	+44.9	−0.9	+0.7	+0.37
	5	+44.3	+21.8	−38.5	+14.8	−6.5	+0.10	−0.4	+19.3	+11.4	+44.8	+1.0	−2.0	−0.29
	6	+44.5	+ 1.9	−44.5	+11.5	−5.7	+0.10	−0.7	+22.2	+ 1.7	+44.6	0.0	−5.4	−0.17
	7	+44.8	−18.5	−40.8	+10.3	−2.4	+0.30	−0.4	+20.3	− 8.7	+44.3	3.2	−6.8	−0.26
	8	+44.9	−34.8	−28.2	+12.2	+0.7	−0.70	+0.2	+13.8	−17.3	+44.2	−5.8	−4.9	−0.86
	19	+44.2	+13.4	−42.1	+13.3	−6.9	+0.06	−0.6	+21.0	+ 7.3	+44.6	+0.9	−3.4	−0.37
	20	+44.5	− 7.9	−43.7	+10.5	−4.7	−0.34	−0.7	+21.9	− 3.3	+44.3	−1.3	−1.5	−0.24
	23	+44.4	−44.3	+ 0.9	+16.9	−0.1	−0.29	+0.7	− 1.2	−22.1	+44.3	−5.3	+0.1	−0.07
	24	+44.0	−39.0	+20.4	+17.8	−3.6	−0.26(½)	+0.5	−10.7	−19.5	+44.6	−2.1	+1.2	+0.13(½)
	30	+44.1	+43.7	− 5.2	+17.3	−0.7	−0.02(½)	+0.8	+ 3.3	+21.9	+44.3	−4.9	+0.6	+0.37(½)
Juli	1	+43.8	+36.5	−24.3	+17.6	−4.5	+0.06	+0.4	+12.6	+18.3	+44.5	−1.4	+1.1	−0.24
	2	+43.7	+21.9	−37.9	+15.0	−7.0	+0.04	−0.3	+19.1	+11.4	+44.5	+0.8	−1.5	+0.21
	15	+43.3	+29.4	−31.9	+16.5	−6.2	−0.02	0.0	+16.3	+14.9	+44.2	−0.1	+0.2	+0.29
	16	+43.4	+11.9	−41.8	+13.1	−7.3	−0.10	−0.6	+21.0	+ 6.6	+44.0	+0.7	−3.4	−0.41
	17	+43.8	− 8.3	−43.0	+10.2	−5.2	+0.64	−0.8	+21.6	− 3.4	+43.6	−1.6	−6.5	+0.05
	27	+43.3	+42.9	− 5.7	+17.1	−0.8	−0.19	+0.8	+ 3.7	+21.4	+43.4	5.2	+0.7	+0.37
	28	+42.9	+35.6	−24.1	+17.5	−4.6	−0.03	+0.4	+12.6	+17.8	+43.7	−1.7	+1.3	+0.36
	30	+43.1	+ 1.9	−43.1	+11.2	−6.8	+0.23	−0.8	+21.6	+ 1.7	+44.1	0.1	−5.1	+0.04
	31	+43.5	−17.8	−39.7	+ 9.6	−3.4	+0.21	−0.7	+19.9	− 8.2	+42.9	−3.3	−6.6	+0.27

Normalgleichungen 1900. See.

	du	$2e \sin w$	$2e \cos w$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	dN	dJ	n
du	51482	+13659	−23374	− 162	+16286	− 4604	+583.97
$2e \sin w$		27831	− 4080	+11220	+ 5218	− 2138	+189.31
$2e \cos w$			36105	+ 6625	− 7405	+ 3072	−279.51
$\frac{d\Delta}{\Delta}$				49874	− 1873	− 3203	+113.57
dN					5561	− 1345	+171.52
dJ						1014	− 59.85

Auflösung Oberon — Uranus 1900.

Washington-Refraktor. See.

Mittlere Epoche 1900.46.

	lg a	lg b	lg c			a	w. F.	(nn)	11.70
$\sin du$	8.0290	9.4824n	8.7844	Korr. Newcomb	du	+0°613	±0°066		
$2e \sin w$	6.6230	8.7799n	8.0175		$e \sin w$	+0.00021	±0.00070	$(vv)_{sdp}$	1.82
$2e \cos w$	7.0825n	7.8845n	8.7581n		$e \cos w$	−0.00060	±0.00066	$(vv)_{ds}$	2.96
$\frac{d\Delta}{\Delta}$	7.3762	8.7088	8.8430		Δ	42″202	±0″042	(vv)	4.78

Korr. $= a + b \sin dN + c \sin dJ$

Zahl der Mess. 28 p, 27 s
Summe der Gew. $26\frac{1}{2}\,sdp$, $25\frac{1}{2}\,ds$
w. F. einer Gl. ±0″206

Oberon — Uranus.

Washington-Refraktor 26 Z. 1901. Beob.: See.

Beobachtung — Rechnung.

	Wash. M. T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O p	C p	O − C n sdp	O s	C s	O − C n ds	Zahl der Einst. p	s
1901 April 11	$15^{h}\,38^{m}.1$	$18^{h}\,12^{m}.9$	165°14	163°91	+0″930	43″20	43″32	−0″12	10	10
16	15 45.0	18 20.3	297.50	297.76	−0.199	43.65	43.80	−0.15	10	10
17	14 52.5	17 27.9	326.12	323.44	(+2.041)	45.87	43.64	(+2.23)	5	2 .:
26	14 29.6	17 5.9	204.87	204.22	+0.496	43.91	43.76	+0.15	10	10:
27	14 40.2	17 16.6	232.24	231.29	+0.729	43.79	43.95	−0.16	10	10
28	14 40.0	17 16.5	258.46	257.92	+0.416	43.96	44.16	−0.20	10	10
29	14 9.3	16 45.8	283.63	283.87	−0.186	44.06	44.22	−0.16	10	10
Mai 13	12 59.2	15 36.7	297.73	296.99	+0.574	43.91	44.47	−0.56	10	10
14	13 0.8	15 38.4	324.38	323.64	+0.572	43.99	44.32	−0.33	10	10
15	12 39.6	15 17.2	351.18	350.11	+0.824	44.31	44.15	+0.16	10	10
16	12 40.2	15 17.9	17.69	17.12	+0.439	44.31	44.13	+0.18	10	10
22	12 43.3	15 21.2	179.08	177.49	+1.227	44.25	44.22	+0.03	10	10:
23	12 29.4	15 7.4	205.44	204.25	+0.918	44.69	44.22	+0.47	10	10
28	11 49.3	14 27.4	337.63	336.88	+0.581	44.25	44.39	−0.14	10	10

		Wash. M. T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O *p*	C *p*	O − C *n sdp*	O *s*	C *s*	O − C *n ds*	Zahl der Einst. *p*	*s*
1901 Juni	3	$10^{h}\,54^{m}.5$	$13^{h}\,32^{m}.7$	137.°37	136.°41	+0."747	44."20	44."59	−0."39	10	10
	4	11 33.2	14 11.4	164.93	163.90	+0.798	43.76	44.38	−0.62	10	10
	9	10 30.2	13 8.3	295.27	296.65	(−1.076)	44.24	44.69	−0.45	10	10 :
	10	11 30.0	14 8.1	325.60	324.31	+1.002	44.47	44.53	−0.06	10	10
	18	11 23.7	14 1.7	178.82	178.30	+0.402	44.57	44.25	+0.32	10	10
	19	11 23.7	14 1.6	206.16	205.32	+0.647	44.22	44.17	+0.05	10	10
	23	11 10.1	13 47.8	311.66	311.82	−0.124	44.80	44.52	+0.28	10	10
	24	11 1.7	13 39.4	338.95	338.31	+0.495	44.31	44.32	−0.01	10	10
Juli	5	10 11.7	12 48.8	272.36	272.17	+0.147	44.02	44.32	−0.30	10	10
	9	9 32.8	12 9.6	19.54	18.13	+1.078	43.68	43.81	−0.13	10	10
	10	9 14.6	11 51.3	46.67	44.84	+1.400	43.23	43.83	−0.60	10	10
	15	8 40.4	11 16.7	177.87	177.46	+0.313	43.87	43.77	+0.10	10	10
	20	9 28.0	12 3.8	312.32	312.20	+0.092	44.34	43.98	+0.36	10	10
	21	8 40.0	11 15.7	338.86	337.90	+0.733	44.21	43.78	+0.43	10	10
	23	8 49.1	11 24.6	32.54	31.92	+0.470	44.03	43.44	+0.59	10	10
Aug.	2	8 29.7	11 4.1	299.94	298.96	+0.746	43.36	43.61	−0.25	10	10
	7	8 31.7	11 5.5	74.34	73 04	+0.979	43.80	43.16	+0.64	10	10
	8	8 19.5	10 53.1	99.64	99.42	+0.166	43.74	43.34	+0.40	10	10
	9	8 17.2	10 50.7	126.33	125.82	+0.386	43.70	43.37	+0.33	10	10
	17	8 11.2	10 43.7	338.95	339.38	−0.322	42.44	42.88	−0.44	10	10
	18	8 47.9	11 20.2	7.78	6.88	+0.669	43.62	42.61	(+1.01)	10	10 :
	19	7 56.8	10 29.0	34.17	32.94	+0.912	42.24	42.49	−0.25	10	10
	20	7 56.6	10 28.7	61.21	59.95	+0.936	42.87	42.57	+0.30	10	10
Sept.	4	7 37.8	10 7.8	101.42	100.55	+0.643	42.24	42.34	−0.10	10	10
	6	7 38.5	10 8.2	154.10	153.49	+0.449	42.46	42.17	+0.29	10	10

Anmerkung. Ausgeschlossen April 17 *p* und *s*, Juni 9 *p*, Aug. 18 *s*. Sonst gleiches Gewicht gegeben. Die Messungen sind den Astr. Nachr. Bd. 159 entnommen, vgl. die Anmerkung S. 24. Bei Berücksichtigung der nachträglich bestimmten kleinen Verbesserungen wäre das Resultat für *u* um 0.°05 zu verkleinern, Δ um 0."005 zu vergrößern.

Bedingungsgleichungen.

		Koeffizienten *sdp*					Übrigbl. Fehler *v*	Koeffizienten *ds*						Übrigbl. Fehler *v*
		du	*e* sin *w*	*e* cos *w*	*dN*	*dJ*		*du*	*e* sin *w*	*e* cos *w*	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	*dN*	*dJ*	
1901 April	11	+43."6	+12."1	−42."0	+11."6	−2."0	+0."31	−0."3	+20."7	+ 6."3	+43."3	+1."4	−5."6	−0."22
	16	+43.4	−38.5	+20.3	+15.9	−2.6	−0.60	−0.3	− 9.9	−19.5	+43.7	+2.0	−1.1	−0.09
	26	+44.1	−17.8	−40.4	+12.0	+1.8	+0.02	+0.3	+19.9	− 9.1	+43.7	−2.3	−5.4	+0.06
	27	+43.9	−34.0	−27.9	+14.4	+2.8	+0.32	+0.4	+13.6	−17.3	+43.9	−3.2	−2.8	−0.23
	28	+43.8	−42.8	− 9.5	+16.7	+1.3	+0.05	+0.3	+ 4.5	−21.6	+44.2	−1.8	−0.4	−0.21
	29	+43.8	−42.6	+10.3	+16.9	−1.5	−0.59	−0.1	− 5.1	−21.5	+44.3	+0.7	−0.2	−0.13
Mai	13	+44.1	−39.4	+19.8	+16.4	−2.7	+0.16	−0.2	− 9.8	−20.0	+44.5	+1.5	−0.8	−0.49
	14	+44.3	−26.4	+35.6	+13.9	−3.7	+0.09	−0.4	−17.5	−13.5	+44.4	+2.3	−3.5	−0.23

		Koeffizienten *sdp*					Übrigbl. Fehler *v*	Koeffizienten *ds*						Übrigbl. Fehler *v*
		du	*e* sin *w*	*e* cos *w*	*dN*	*dJ*		*du*	*e* sin *w*	*e* cos *w*	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	*dN*	*dJ*	
1901 Mai	15	+44.″5	− 7.″9	+43.″7	+11.″7	−2.″2	+0.″23	−0.″3	−21.″7	− 4.″2	+44.″2	+0.″8	−5.″8	+0.″26
	16	+44.6	+12.7	+42.7	+11.5	+0.6	−0.25	+0.1	−21.1	+ 6.4	+44.2	−1.8	−6.0	+0.28
	22	+44.7	+ 2.3	−44.6	+11.4	−1.7	+0.65	−0.2	+22.1	+ 1.4	+44.3	+0.1	−6.1	−0.10
	23	+44.7	−17.8	−40.9	+11.8	+1.1	+0.43	+0.2	+20.2	− 9.0	+44.3	−2.5	−5.7	+0.38
	28	+44.5	−17.7	+40.8	+12.8	−3.5	+0.05	−0.4	−20.2	− 9.3	+44.4	+1.8	−4.6	−0.02
Juni	3	+44.4	+30.9	−31.8	+15.0	−4.0	+0.02	−0.4	+15.7	+15.8	+44.6	+2.0	−2.3	−0.47
	4	+44.6	+12.7	−42.8	+12.3	−3.3	+0.17	−0.4	+21.1	+ 6.7	+44.4	+1.3	−5.2	−0.71
	9	—	—	—	—	—	—	−0.1	− 9.6	−20.1	+44.7	+0.8	−0.4	−0.39
	10	+44.4	−26.2	+35.8	+14.3	−4.2	+0.51	−0.4	−17.7	−13.5	+44.6	+2.0	−3.0	+0.05
	18	+44.6	+ 1.9	−44.6	+11.4	−2.5	−0.18	−0.3	+22.1	+ 1.3	+44.3	+0.1	−6.0	+0.21
	19	+44.7	−18.4	−40.7	+11.6	+0.5	+0.16	+0.1	+20.1	− 9.1	+44.2	−2.6	−5.9	−0.04
	23	+44.2	−33.3	+29.0	+15.7	−4.0	−0.57	−0.3	−14.3	−17.0	+44.6	+1.5	−1.4	+0.36
	24	+44.4	−16.9	+41.0	+12.9	−4.2	−0.05	−0.5	−20.3	− 8.9	+44.4	+1.6	−4.3	+0.11
Juli	5	+43.9	−43.9	+ 0.6	+17.0	−0.1	−0.23	+0.3	− 0.6	−22.1	+44.4	−2.4	0.0	−0.29
	9	+44.2	+12.9	+42.4	+11.0	−0.8	+0.40	−0.1	−21.0	+ 6.2	+43.8	−2.0	−6.2	−0.03
	10	+44.3	+30.4	+32.1	+12.6	+1.5	+0.64	+0.3	−15.7	+15.3	+43.8	−4.2	−4.5	−0.53
	15	+44.1	+ 2.7	−43.9	+11.4	−3.3	−0.26	−0.4	+21.8	+ 1.8	+43.7	+0.2	−5.7	0.00
	20	+43.5	−32.9	+28.6	+15.7	−4.2	−0.35	−0.2	−14.3	−16.7	+44.0	+1.1	−1.1	+0.44
	21	+43.6	−17.2	+40.2	+13.0	−4.7	+0.20	−0.5	−19.9	− 9.1	+43.7	+1.4	−3.9	+0.55
	23	+43.9	+22.3	+37.8	+11.4	+0.4	−0.25	+0.1	−18.7	+11.1	+43.4	−3.3	−5.7	+0.67
Aug.	2	+43.1	−38.2	+19.9	+16.6	−3.1	+0.34	+0.1	−10.1	−19.3	+43.6	−0.1	0.0	−0.19
	7	+43.2	+40.9	+13.9	+15.1	+1.5	+0.19	+0.5	− 6.5	+20.6	+43.1	−4.3	−1.6	+0.65
	8	+42.9	+42.6	− 5.8	+16.9	−0.8	−0.61	+0.3	+ 3.3	+21.4	+43 3	−2.2	+0.3	+0.37
	9	+42.8	+35.3	−24.2	+16.2	−3.7	−0.35	−0.1	+12.2	+17.9	+43.3	+0.5	−0.4	+0.26
	17	+42.8	−15.8	+39.7	+12.7	−4.8	−0.83	−0.5	−19.7	− 8.4	+42.8	+1.4	−3.8	−0.32
	18	+42.9	+ 4.2	+42.8	+10.7	−2.6	+0.04	—	—	—	—	—	—	—
	19	+42.9	+22.4	+36.6	+11.1	+0.2	+0.22	0.0	−18.1	+11.1	+42.5	−3.4	−5.6	−0.17
	20	+42.8	+36.4	+22.6	+13.5	+1.7	+0.17	+0.4	−10.9	+18.3	+42.6	−4.7	−3.0	+0.33
Sept.	4	+41.9	+41.5	− 6.5	+16.5	−0.9	−0.12	+0.3	+ 3.6	+20.8	+42.4	−2.0	+0.3	−0.13
	6	+42.0	+19.5	−37.1	+13.1	−4.8	−0.18	−0.5	+18.4	+10.2	+42.2	+1.5	−3.2	−0.20

Normalgleichungen 1901. See.

	du	2*e* sin *w*	2*e* cos *w*	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	*dN*	*dJ*	*n*
du	70989	−6542	+8471	− 158	+22075	−2712	+926.63
2*e* sin *w*		38662	−3525	−3660	− 2590	+ 752	+ 95.83
2*e* cos *w*			50077	−4442	+ 2349	− 707	+126.61
$\frac{d\Delta}{\Delta}$				71071	− 709	−5285	− 17.04
dN					7235	− 796	+268.40
dJ						874	− 27.29

Auflösung Oberon—Uranus 1901.

Washington-Refraktor. See.

Mittlere Epoche 1901.48.

	lg *a*	lg *b*	lg *c*			*a*	w. F.		
								(nn)	21.85
sin *du*	8.1279	9.4918_n	8.5589	Korr. Newcomb	*du*	+0°.769	± 0°.052		
2*e* sin *w*	7.6824	8.2092	7.6914_n		*e* sin *w*	+0.00241	± 0.00061	$(vv)_{sdp}$	4.72
2*e* cos *w*	6.7798	7.8850	8.1555		*e* cos *w*	+0.00030	± 0.00054	$(vv)_{ds}$	4.12
$\frac{d\Delta}{\Delta}$	5.8783	8.0254	8.8755		Δ	$42''.105$	$\pm 0''.038$	(vv)	8.84

Korr. $= a + b \sin dN + c \sin dJ$

Mit Rücksicht auf die verbesserten
p in Vol. VI, vgl. obige Anmerkung:
du +0°.719 ± 0°.052

Zahl der Mess. 37 *p*, 37 *s*
Summe der Gew. 37*s dp*, 37 *ds*
w. F. einer Gl. $\pm 0''.240$

Oberon—Uranus.

Washington-Refraktor 36 Z. 1902. Beob.: See.

Beobachtung — Rechnung.

		Wash. M. T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O *p*	C *p*	O − C *n sdp*	O *s*	C *s*	O − C *n ds*	Zahl der Einst. *p*	Zahl der Einst. *s*	
1902 April	30	$15^{h}\ 1^{m}15^{s}$	$17^{h}36^{m}.9$	351°.07	350°.70	$+0''.278$	$43''.49$	$43''.43$	$+0''.06$	10	10	
Mai	1	14 53 45	17 29 6	17.76	17.51	+0.188	43.23	43.69	−0.46	10	10	
	4	14 45 15	17 21.2	96.81	96.92	−0.082	44.23	43 92	+0.31	10	10	
	5	14 41 50	17 17.9	123.35	123.60	−0.187	44.39	43.71	+0.68	10	10	
	6	14 50 0	17 26.2	151.72	150.75	+0.735	44.77	43.57	+1.20	10	10	
	8	14 12 45	16 49.1	203.62	204.01	−0.299	43.80	43.91	−0.11	10	10	
	9	14 25 30	17 1.9	230.30	230.82	−0.405	44.15	44.15	0 00	10	10	
	15	14 25 45	17 2.6	32.52	31.50	+0.787	43.24	44.11	−0.87	10	10	
	28	13 33 30	16 10.9	17.91	18.31	−0.309	44.04	44.14	−0.10	10	10	
	29	13 25 48	16 3.2	46.24	44.86	+1.065	44.56	44.38	+0.18	10	10	
	30	13 39 45	16 17.3	72.26	71.62	+0.500	44.51	44 50	+0.01	10	10	
Juni	1	13 25 8	16 2.6	124.43	124.51	−0.062	44.06	44.20	−0.14	10	10	
	4	13 24 30	16 2.1	205.35	205.42	−0.053	44.61	44.25	+0.36	10	10	
	5	13 23 45	16 1.4	232.75	232.05	+0.542	44.58	44.46	+0.12	10	10	
	7	13 29 30	16 7.1	285.18	285.17	+0.008	44.46	44.41	+0 05	10	10	
	8	13 11 0	15 48.6	310.96	311.56	−0.461	44.41	44.19	+0 22	10	10	
	9	12 59 0	15 36.6	338.41	338.31	+0.078	44.43	44.05	+0.38	10	10	
	10	12 55 30	15 33.1	4.44	5.27	−0.638	44.43	44.11	+0.32	10	10	
	11	12 53 8	15 30.7	32.04	32.11	−0 054	44.70	44.31	+0.39	10	10	
	24	11 35 38	14 12.9	18.10	18.41	−0.237	44.17	44.09	+0.08	10	10	
Juli	2	10 57 38	13 34.6	231.02	231.70	−0.525	44.35	44.26	+0.09	10	10	(B. Dinwiddie)
	11	10 3 40	12 40.2	110.24	110.94	−0.543	44.13	44.11	+0.02	10	10	
	12	10 12 30	12 48.8	136.37	137.82	−1.113	43.59	43.88	−0.29	10	10	
	13	10 11 45	12 48.1	164.70	164.75	−0.041	43.96	43.70	+0 26	10	10	
	14	10 1 15	12 37.4	190.61	191.57	−0.736	43.70	43.71	−0.01	10	10	
	22	9 43 0	12 18.5	45.93	45.34	+0.447	43.72	43.74	−0.02	10	10	
	31	8 46 15	11 20.8	284.01	284.53	−0.395	43.78	43.63	+0.15	10	10	

		Wash. M. T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O p	C p	O − C n $s\,dp$	O s	C s	O − C n ds	Zahl der Einst. p	 s
1902 Aug.	2	$8^h 31^m 30^s$	$11^h 5^m.9$	337°60	337°73	−0″098	43″39	43″21	+0″18	10	10
	3	8 47 0	11 21.3	5.49	5.02	+0.355	43.41	43.14	+0.27	10	10
	4	8 28 22	11 2.6	31.86	31.63	+0.174	44.22	43.24	+0.98	10	10:
	7	8 16 15	10 50.0	111.52	111.14	+0.286	43.58	43.38	+0.20	10	10:
	8	8 33 30	11 7.2	138.64	138.14	+0.377	43.47	43.15	+0.32	10	10
	21	7 51 0	10 23.0	125.71	124.97	+0.552	43.71	42.81	+0.90	10	10
	22	8 7 0	10 38.9	153.47	152.05	+1.053	42.26	42.56	−0.30	10	10:
	23	8 10 0	10 41.8	178.93	179.08	−0.111	42.37	42.44	−0.07	10	10:
	24	7 49 0	10 20.6	205.62	205.66	−0.033	42.83	42.49	+0.34	10	10
	25	8 16 30	10 48.0	232.52	232.94	−0.316	42.35	42.65	−0.30	10	10
	28	7 51 30	10 22.6	309.87	312.13	(−1.680)	41.92	42.50	−0.58	10	10:
	30	7 49 48	10 20.6	5.55	5.93	−0.282	41.95	42.18	−0.23	10	10
	31	7 45 22	10 16.1	32.51	32.80	−0.218	44.48	42.28	(+2.20)	10	10:
Sept.	1	7 47 52	10 18.4	58.54	59.57	−0.760	42.64	42.43	+0.21	10	10:

Anmerkung. In den berechneten Werten von *p*, *s* ist die vorläufige Verbesserung der Newcombschen Tafel δu berücksichtigt, vgl. S. 11. Die Messungen erweisen sich — ebenso wie die gleichzeitigen Messungen von Titania — als sehr unsicher, namentlich während der zweiten Hälfte. Ganz verfehlt sind die Beobachtungen Aug. 28 *p*, Aug. 31 *s* und daher bei der Auflösung ausgeschlossen. Wegen der Unsicherheit der Messungen sind in den Bedingungsgleichungen die Koeffizienten von $e \sin w$, $e \cos w$ fortgelassen.

Bedingungsgleichungen.

		Koeffizienten $s\,dp$ du	 dN	 dJ	Übrigbl. Fehler v	Koeffizienten ds $\frac{d\Delta}{\Delta}$	 dN	 dJ	Übrigbl. Fehler v
1902 April	30	+43″9	+10″9	+1″8	+0″29	+43″4	+1″0	−6″7	−0″06
Mai	1	+43.7	+12.5	+4.4	+0.20	+43.7	−1.5	−5.0	−0.58
	4	+43.7	+16.9	−0.9	−0.07	+43.9	+3.3	−0.5	+0.19
	5	+43.9	+14.2	−2.2	−0.17	+43.7	+4.5	−3.4	+0 56
	6	+44.1	+11.6	−0.7	+0.75	+43.6	+3.1	−6.2	+1.08
	8	+43.9	+13.2	+4.6	−0.29	+43.9	−1.8	−4.4	−0.23
	9	+43.7	+16.2	+4.1	−0 39	+44.2	−1.5	−1.2	−0.12
	15	+44.0	+14.0	+4.7	+0.80	+44.1	−2.0	−3.6	−0.99
	28	+44.3	+12.5	+3.8	−0.30	+44.1	−1.6	−5.2	−0.22
	29	+44.1	+15.4	+4.2	+1.08	+44.4	−2.0	−2.2	+0.06
	30	+44.0	+17.5	+2.0	+0.51	+44.5	−0.1	0.0	−0.11
Juni	1	+44.3	+14.6	−2.5	−0.05	+44.2	+4.0	−3 1	−0.26
	4	+44.3	+13.2	+4.0	−0.04	+44.3	−2.0	−4.5	+0.24
	5	+44.1	+16.0	+3.8	+0.56	+44.5	−1.8	−1.5	0.00
	7	+44.2	+16.6	−1.6	+0.02	+44.4	+3.1	−1.0	−0.07
	8	+44.4	+13.9	−2.5	−0.45	+44.2	+3.9	−3.8	+0.10
	9	+44.5	+11.6	−0.7	+0.09	+44.1	+2.3	−6.2	+0.26
	10	+44.5	+11.5	+2.3	−0.63	+44.1	−0.5	−6.3	+0.20
	11	+44.3	+13.8	+4.1	−0.04	+44.3	−2.3	−3.9	+0.27
	24	+44.4	+12.3	+3.0	−0.22	+44.1	−1.7	−5.4	−0.04

	Koeffizienten *sdp*			Übrigbl. Fehler *v*	Koeffizienten *ds*			Übrigbl. Fehler *v*
	du	*dN*	*dJ*		$\frac{d\Delta}{\Delta}$	*dN*	*dJ*	
1902 Juli 2	+44″0	+15″5	+3″5	−0″51	+44″3	−2″3	−2″0	−0″03
11	+43.8	+16.3	−2.1	−0 53	+44.1	+2.6	−1.1	−0.10
12	+44.0	+13.6	−2.8	−1.10	+43.9	+3.2	−3.9	−0.41
13	+44.2	+11.5	−1.0	−0.03	+43.7	+1.5	−6.1	+0.14
14	+44.1	+11.7	+1.9	−0.72	+43.7	−1.1	−6.0	−0.13
22	+43.7	+14.4	+3.4	+0.46	+43.7	−2.7	−2.9	−0.14
31	+43.3	+16.6	−1.5	−0.38	+43.6	+1.7	−0.5	+0.03
Aug. 2	+43.6	+11.8	−2.0	−0.10	+43.2	+2.0	−5.4	+0.06
3	+43.6	+11.1	+0.8	+0.37	+43.1	−0.5	−6.2	+0.15
4	+43.4	+12 8	+2.9	+0.19	+43.2	−2.5	−4.4	+0.86
7	+43.1	+16.1	−2.1	+0.30	+43.4	+2.1	−0.9	+0.08
8	+43.2	+13.6	−3.0	+0.39	+43.1	+2.9	−3.5	+0.20
21	+42.7	+14.8	−2.9	+0.57	+42.8	+2.7	−2.1	+0.78
22	+42.8	+12.1	−2.5	+1.07	+42.6	+2.4	−4.8	−0.42
23	+42.9	+10.9	0.0	−0.10	+42.4	+0.1	−6.1	−0.19
24	+42.8	+12.0	+2.4	−0.02	+42.5	−2.2	−5.0	+0.22
25	+42.5	+14.6	+3.0	−0.30	+42.7	−2.7	−2.2	−0.42
28	—	—	—	—	+42.5	+2.8	−2.8	−0.70
30	+42.6	+10.9	+0.7	−0.27	+42.2	−0.6	−6.0	−0.35
31	+42.4	+12.5	+2.8	−0.21	—	—	—	—
Sept. 1	+42.2	+15.1	+2.7	−0.06	+42.4	−2.4	−1.5	+0.09

Auflösung Oberon—Uranus 1902.

Washington-Refraktor. See.

Mittlere Epoche 1902.50.

Durch einfache Mittelbildung erhält man aus den Gleichungen für *sdp*:

$du = -0°017 + (9.4951_n)\, dN + (8.3587_n)\, dJ$ 40 Messungen.   w. F. ± 0°065

oder wegen $\delta u = +0°600$, bei Vernachlässigung von *dN*, *dJ*

Korr. Newcomb $du = +0°583$ ± 0°065.

Aus den Messungen der Distanzen folgt bei Vernachlässigung von *dN*, *dJ*

$\frac{d\Delta}{\Delta} = +0.00275$ $\Delta = 42''218$ ± 0″040   40 Messungen.

Oberon—Uranus.

Lickrefraktor 36 Z. 1903. Beob.: Aitken.

Beobachtung — Rechnung.

	Standard Pacific T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O *p*	C *p*	O − C *n* *sdp*	O *s*	C *s*	O − C *n* *ds*	Zahl der Einst. *p*	*s*
1903 Mai 2	$15^h 20^m 4^s$	$20^h 46^m.8$	85°65	84°61	+0″787	43″42	43″36	+0″06	8	8
23	14 28 30	19 56.8	285.60	285.56	+0.030	43.64	43.58	+0.06	8	8
28	14 27 55	19 56.4	60.30	59.62	+0.525	44.28	44.25	+0.03	8	8
29	14 18 33	19 47.1	86.85	85.86	+0.760	44.01	43.98	+0.03	8	8

	Standard Pacific T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O p	C p	O – C n sdp	O s	C s	O – C n ds	Zahl der Einst. p	s
1903 Mai 31	$12^h\ 0^m\ 7^s$	$17^h 28^m.7$	138°05	137°30	+0″569	43″56	43″45	+0″11	8	8
Juni 2	12 24 12	17 52.9	192.55	191.83	+0.553	44.31	43.99	+0.32	8	8
4	13 25 8	18 53.8	245.90	245.66	+0.186	44.15	44.28	–0.13	8	8
13	11 56 59	17 25.8	125.30	124.81	+0.373	43.55	43.64	–0.09	8	8
27	11 58 39	17 27.3	140.15	139.60	+0.418	43.92	43.58	+0.34	8	8

Washington-Refraktor 26 Z. 1903. Beob.: Dinwiddie.

	Wash. M. T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O p	C p	O – C n sdp	O s	C s	O – C n ds	Zahl der Einst. p	s
1903 Juni 3	$13^h 46^m 38^s$	$16^h 23^m.5$	217°01	216°65	(+0″278)	45″31	44″30	(+1″01)	8	8:
20	12 40 26	15 17.4	308.19	309.76	(–1.195)	43.22	43.61	(–0.39)	8	8:
21	12 24 58	12 2.0	337.26	336.70	(+0.426)	43.05	43.63	(–0.58)	8	8
30	11 34 43	14 11.5	215.34	216.57	(–0.949)	43.52	44.23	(–0.71)	8	8
Juli 21	9 43 52	12 19.4	57.93	56.04	(+1.449)	42.76	43.92	(–1.16)	8	8:
24	9 32 32	12 7.8	136.11	135.86	(+0.189)	43.87	43.22	(+0.65)	8	8:

Anmerkung. Diese Messungen sind als verfehlt zu bezeichnen und weiterhin nicht berücksichtigt.

Bedingungsgleichungen.

	Koeffizienten sdp					Übrigbl. Fehler	Koeffizienten ds						Übrigbl. Fehler
	du	$e \sin w$	$e \cos w$	dN	dJ	v	du	$e \sin w$	$e \cos w$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	dN	dJ	v
1903 Mai 2	+43″2	+43″2	+ 1″4	+17″8	+0″2	+0″16	–0″9	– 1″7	+21″6	+43″3	+5″3	+0″2	+0″04
23	+43.9	–41.6	+14.1	+15.5	–1.5	–0.12	–0.8	– 6.2	–20.9	+43.5	+6.6	–2.4	+0.06
28	+43.4	+38.5	+20.1	+18.4	+4.0	–0.07	–0.3	–10.5	+19.4	+44.3	+1.3	+0.8	+0.04
29	+43.7	+43.7	+ 0.8	+17.9	+0.1	+0.12	–0.8	– 1.2	+22.0	+44.0	+4.9	+0.1	0.00
31	+44.3	+28.6	–33.9	+11.5	–0.2	+0.02	–0.1	+16.6	+14.1	+43.4	+5.3	–6.6	–0.03
Juni 2	+43.8	–10.4	–42.6	+12.7	+6.6	+0.22	+0.8	+21.2	– 6.0	+44.0	–1.1	–5.1	+0.14
4	+43.5	–40.5	–16.0	+18.5	+3.0	+0.04	–0.4	+ 8.6	–20.4	+44.3	+2.0	+0.9	–0.23
13	+44.3	+35.2	–26.9	+13.1	–1.5	–0.22	–0.4	+12.9	+17.6	+43.6	+6.1	–4.9	–0.21
27	+44.4	+27.4	–34.8	+11.6	–0.5	–0.22	–0.1	+17.1	+13.6	+43.5	+4.8	–6.4	+0.19

Normalgleichungen 1903. Aitken.

	du	$2e \sin w$	$2e \cos w$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	dN	dJ	n
du	17298	+5452	–5239	– 137	+5977	+ 451	+184.41
$2e \sin w$		12952	–1240	+2471	+2007	– 408	+124.99
$2e \cos w$			8667	+2656	–1031	– 392	– 51.01
$\frac{d\Delta}{\Delta}$				17258	+1538	–1027	+ 31.84
dN					2349	+ 67	+ 66.44
dJ						216	+ 1.36

Auflösung Oberon—Uranus 1903.

Lickrefraktor. Aitken.

Mittlere Epoche 1903.40.

	lg *a*	lg *b*	lg *c*			*a*	w. F.	(*nn*)	2.72
sin *du*	7.9459	9.5725*n*	8.5156*n*	Korr. Newcomb	*du*	+0°.506	± 0°.056		
2*e* sin *w*	7.7571	8.0065	8.5666		*e* sin *w*	+0.00286	± 0.00052	$(vv)_{sdp}$	0.20
2*e* cos *w*	5.8411*n*	8.9060*n*	8.1721		*e* cos *w*	−0.00003	± 0.00066	$(vv)_{ds}$	0.16
$\frac{d\Delta}{\Delta}$	7.0442	8.9090*n*	8.7132		Δ	42″.149	± 0″.037	(*vv*)	0.36

Korr. $= a + b \sin dN + c \sin dJ$

Zahl der Mess. 9 *p*, 9 *s*
Summe der Gew. 9 *sdp*, 9 *ds*
w. F. einer Gl. ± 0″.108

Oberon—Uranus.

Yerkesrefraktor 40 Z. 1907, 1908, 1909. Beob.: Barnard.

Beobachtung — Rechnung.

			Central-Standard T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O *p*	C *p*	O − C *n* *sdp*	O *s*	C *s*	O − C *n* *ds*	Zahl der Einst. *p*	*s*	
1907	Okt.	4	$6^h 58^m 21^s$	$10^h 16^m.4$	78°.01	78°.01	0″.00	38″.65	38″.66	−0″.01	5	8	
		6	6 56 57	10 14.7	134.98	135.67	−0.46	38.65	38.54	+0.11	5	10 :	
		8	6 29 50	9 47.2	187.20	187.45	−0.18	40.56	41.17	−0.61	5	8	
		13	6 34 23	9 51.1	323.25	322.68	+0.38	38.70	38.65	+0.05	5	8	
	Nov.	3	5 58 40	9 12.6	163.42	163.39	+0.02	39.27	39.22	+0.05	6	10	
1908	Juli	7	11 39 12	15 5.3	291.62	291.54	+0.05	38.10	38.10	0.00	5	8	
		19	10 33 31	13 59.4	246.10	246.46	−0.25	39.49	39.62	−0.13	7	11 :	
		21	12 16 26	15 42.2	307.97	308.40	−0.28	38.66	39.02	−0.36	5	10	
		27	9 56 52	13 22.4	102.85	103.55	−0.47	38.28	38.08	+0.20	5	8 :	
		28	9 43 49	13 9.3	132.40	133.08	−0.47	39.42	39.35	+0.07	6	8	
	Aug.	2	9 51 39	13 16.8	262.12	261.42	+0.47	38.53	38.62	−0.09	5	10	
		4	9 44 15	13 9.3	321.08	320.67	+0.29	39.86	39.89	−0.03	5	10	
		22	8 33 43	11 57.2	73.84	74.39	−0.37	39.01	38.82	+0.19	6	10	
	Sept.	1	8 22 31	11 44.9	347.46	347.33	+0.10	41.62	41.53	+0.09	5	8 :	
		15	7 55 38	11 16.2	360.82	359.97	+0.62	41.71	41.82	−0.11	7	5 :	
1909	Juli	20	11 15 15	14 40.7	321.93	321.00	+0.63	39.66	39.21	+0.45	5	10 :	Gew. ½
	Aug.	2	9 49 9	13 14.1	306.32	306.01	+0.20	37.53	37.64	−0.11	6	9 :	
		15	8 44 20	12 8.4	291.05	290.47	+0.37	36.56	36.60	−0.04	5	8	
		17	9 32 41	12 56.6	346.94	346.57	+0.27	41.92	41.86	+0.06	5	8	
		22	8 44 8	12 7.5	118.05	118.76	−0.46	36.75	36.92	−0.17	6	10	
		29	8 23 47	11 46.5	306.88	306.40	+0.32	37.65	37.34	+0.31	6	10 :	
		31	8 2 39	11 25.1	357.43	357.72	−0.22	42.59	42.32	+0.27	7	8 :	

Anmerkung. Die Messungen waren im Manuskript eingesandt; später Astr. Journ. Nr. 608 veröffentlicht. In den berechneten Örtern ist die vorläufige Korrektion δu (vgl. S. 11) berücksichtigt.

Bedingungsgleichungen.

	Koeffizienten *sdp*					Übrigbl. Fehler *v*	Koeffizienten *ds*						Übrigbl. Fehler *v*
	du	*e* sin *w*	*e* cos *w*	*dN*	*dJ*		*du*	*e* sin *w*	*e* cos *w*	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	*dN*	*dJ*	
1907 Okt. 4	+40″6	+40″5	+ 1″4	+18″3	+ 0″3	+0″25	−3″0	− 3″6	+19″2	+38″6	+13″3	+ 0″5	−0″12
6	+40.6	+25.3	−31.7	+ 5.5	+ 6.2	−0.09	+2.9	+16.9	+ 9.8	+38.5	+ 9.6	−11.5	+0.15
8	+37.8	− 9.4	−36.6	+13.6	+16.0	+0.05	+1.2	+19.6	− 6.3	+41.2	− 0.4	− 2.8	−0.45
13	+39.9	−21.1	+34.0	+ 5.2	+ 8.2	+0.14	+3.3	−18.2	− 7.4	+38.6	+ 7.8	−11.6	+0.03
Nov. 3	+37.9	+ 7.3	−37.2	+ 7.0	+13.8	+0.34	+3.4	+19.9	+ 0.4	+39.2	+ 2.6	− 9.0	+0.18
1908 Juli 7	+43.4	−37.5	+21.8	+ 7.7	+ 2.0	−0.19	+1.9	−11.2	−15.5	+38.1	+18.2	−10.6	+0.06
19	+41.8	−41.2	− 7.4	+22.2	+ 2.1	−0.34	−5.0	+ 8.5	−18.6	+39.6	+15.2	+ 3.1	+0.03
21	+42.5	−29.9	+30.1	+ 4.3	+ 6.8	−0.53	+4.2	−16.8	−10.7	+39.0	+13.9	−13.4	−0.35
27	+43.5	+40.0	−17.0	+10.4	+ 0.3	−0.11	+0.3	+ 7.7	+17.4	+38.1	+18.7	− 8.2	+0.16
28	+42.1	+27.3	−32.0	+ 3.9	+ 8.3	−0.08	+4.6	+17.9	+ 9.3	+39.4	+12.4	−13.6	+0.14
Aug. 2	+42.8	−42.7	+ 2.5	+17.9	− 0.4	+0.32	−3.3	+ 2.2	−19.5	+38.6	+17.9	− 1.1	+0.05
4	+41.3	−22.7	+34.6	+ 3.6	+10.8	+0.05	+5.1	−19.4	− 6.7	+39.9	+ 9.9	−13.5	−0.05
22	+41.8	+41.8	+ 2.4	+19.8	+ 0.6	−0.11	−4.0	− 5.2	+19.1	+38.8	+16.1	+ 1.0	−0.04
Sept. 1	+38.6	− 4.1	+38.4	+ 7.9	+17.9	−0.09	+4.0	−21.1	+ 1.7	+41.5	+ 1.9	− 8.5	+0.01
15	+37.5	− 5.0	+37.2	+ 7.1	+18.9	+0.44	+2.2	−21.0	− 0.6	+41.8	0.0	− 4.3	−0.19
1909 Juli 20	+40.3	−21.8	+33.8	+ 1.7	+13.7	+0.38(½)	+7.0	−20.3	− 4.7	+39.2	+10.8	−14.5	+0.41(½)
Aug. 2	+41.9	−30.5	+28.6	+ 2.9	+ 7.5	−0.05	+5.4	−16.8	−10.0	+37.7	+16.0	−14.2	−0.10
15	+42.8	−37.2	+21.1	+ 6.8	+ 2.4	+0.13	+2.5	−11.2	−14.7	+36.6	+19.6	−11.1	+0.02
17	+37.3	− 3.9	+37.1	+ 7.3	+21.2	+0.09	+4.9	−21.3	− 2.7	+41.9	+ 2.1	− 8.5	+0.01
22	+42.2	+33.7	−25.2	+ 4.6	+ 4.7	−0.08	+4.0	+14.3	+12.4	+36.9	+17.6	−12.8	−0.14
29	+41.4	−30.0	+28.5	+ 3.2	+ 7.2	+0.07	+5.1	−16.6	−10.0	+37.3	+15.3	−13.8	+0.32
31	+36.4	+ 4.2	+36.1	+11.7	+22.0	−0.35	+2.6	−20.7	+ 5.0	+42.3	+ 0.2	− 4.3	+0.16

Normalgleichungen 1907, 1908, 1909. Barnard.

	du	2*e* sin *w*	2*e* cos *w*	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	*dN*	*dJ*	*n*
du	35967	−5015	+7141	+1807	+8183	+6475	+ 8.67
2*e* sin *w*		23515	−7964	−4303	−1333	+ 122	−150.86
2*e* cos *w*			20736	−1180	+ 318	+3295	+150.47
$\frac{d\Delta}{\Delta}$				33137	+8953	−6814	− 5.82
dN					5963	− 650	− 5.87
dJ						4690	+ 11.80

Auflösung Oberon—Uranus 1907, 1908, 1909.

Yerkesrefraktor. Barnard.

Mittlere Epoche 1908.65.

	lg *a*	lg *b*	lg *c*		*a*	w. F.		
sin *du*	7.1994*n*	9.3533*n*	9.2447*n*	*du*	−0°091	±0°047	(*nn*)	3.55
2*e* sin *w*	7.6852*n*	8.4192*n*	8.5951*n*	*e* sin *w*	−0.00242	±0.00053	$(vv)_{sdp}$	1.21
2*e* cos *w*	7.7718	8.5744	9.0078*n*	*e* cos *w*	+0.00296	±0.00057	$(vv)_{ds}$	0.73
$\frac{d\Delta}{\Delta}$	6.7060*n*	9.4149*n*	9.3148	Δ	42″081	±0″035	(*vv*)	1.94

Korr. = *a* + *b* sin *dN* + *c* sin *dJ*

Vorläuf. Korr. *δu* +0°723

Korr. Newc. *du* +0.632 ±0°047

Zahl der Mess. 22 *p*, 22 *s*

Summe der Gew. 21½ *sdp*, 21½ *ds*

w. F. einer Gl. ±0″149

Die vollständige Auflösung mit 6 Unbekannten ergibt:

	lg					
sin *du*	7.3004_n	Korr. Newcomb	*du*	+0°.609		
2*e* sin *w*	7.6895_n		*e* sin *w*	−0.00245		
2*e* cos *w*	7.7764		*e* cos *w*	+0.00299		
$\frac{d\Delta}{\Delta}$	6.9855_n		Δ	42″.061		
sin *dN*	7.2557		*N*	166°.156	±0°.198	Aeq.
sin *dJ*	5.6524		*J*	75.279	±0.202	1900.0

Oberon — Uranus.

Yerkesrefraktor 40 Z. Lickrefraktor 36 Z. 1910, 1911. Beob.: **Barnard**, **Aitken**.

Beobachtung[1] — Rechnung.

			Central-Standard T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O *p*	C *p*	O − C *n* *sdp*	O *s*	C *s*	O − C *n* *ds*	Zahl der Einst. *p*	*s*	Beob.
1910	Mai	31	$14^h44^m.5$	$18^h\ 7^m.2$	102° 37′.8	102° 54′.8	−0″.16	33″.53	33″.32	+0″.21	5	10	B.
	Juni	7	15 13.6	18 37.0	292 47.4	292 36.3	+0.11	33.86	34.08	−0.22	5	6	„
		12	14 39.0	18 2.8	55 24.6	54 55.8	+0.30	36.11	36.38	−0.27	5	10	„
	Juli	3	11 41.0	15 5.8	257 39.6	256 35.0	+0.65	34.49	34.64	−0.15	6	8	„
		12	12 26.9	15 51.9	148 15.6	148 17.9	−0.03	39.32	39.46	−0.14	5	8	„
		17	11 15.1	14 40.1	274 42.6	274 7.3	+0.35	34.48	34.36	+0.12	5	8	„
		24	10 24.2	13 49.1	101 13.8	101 59.7	−0.46	34.71	34.55	+0.16	4	8	„
		26	10 10.7	13 35.6	159 0.6	159 7.1	−0.08	40.81	41.15	−0.34	5	8	„
		31	9 47.9	13 12.7	291 39.6	290 2.2	+0.99	34.41	34.98	−0.57	5	10	„
	Aug.	2	9 53.1	13 17.8	345 6.6	345 1.5	+0.06	41.71	41.88	−0.17	5	8	„
	Sept.	10	7 33.3	10 54.7	306 10.8	306 9.9	+0.01	35.93	35.94	−0.01	6	8	„
		20	7 58.0	11 18.1	205 3.0	205 1.3	+0.02	40.21	40.84	−0.63	6	11	„
		25	8 57.1	12 16.5	348 43.2	347 39.3	+0.76	40.60	40.81	−0.21	5	8	
	Okt.	9	6 43.0	10 0.5	357 58.2	357 31.3	+0.32	41.25	41.11	+0.14	6	8	„
1911	Juni	20	14 43.5	18 7.1	323 33.6	323 4.0	+0.32	37.55	37.36	+0.19	5	8	
		30	14 29.9	17 54.1	212 36.0	213 18.8	−0.48	38.41	38.73	−0.32	5	8	„
	Juli	2	11 38.5	15 2.7	273 25.8	272 9.7	+0.71	31.68	31.88	−0.20	5	8	„
		4	13 30.5	16 54.8	335 26.4	334 52.8	+0.39	39.62	40.01	−0.39	5	8	„
		16	13 44.3	17 8.9	294 43.2	294 5.6	+0.36	33.17	33.33	−0.16	5	8	„
		25	12 4.8	15 29.4	171 2.4	171 3.1	−0.01	42.63	42.63	0.00	5	8	„
		30	12 42.6	16 7.1	310 15.6	309 39.4	+0.37	35.26	35.49	−0.23	5	8	„
			Sternzeit Mt. Ham.										
1910	Juli	27	20 57.5	18 8.5	186 12.6	185 20.4	+0.66	43.78	43.27	+0.51	8—10		A.
	Aug.	31	20 49.9	15 40.8	34 2.4	33 41.2	+0.25	40.02	40.29	−0.27	8—10		„
	Sept.	21	20 44.3	14 10.2	233 21.0	233 9.5	+0.12	36.88	37.07	−0.19	8—10		„
1911	Juli	29	20 59.2	18 2.8	279 13.2	279 22.3	−0.09	32.64	32.57	+0.07	8—10		„
	Aug.	4	20 31.0	17 11.0	72 38.4	72 31.7	+0.06	33.08	33.32	−0.24	8—10		„
		15	19 51.1	15 47.3	8 17.4	7 55.6	+0.27	42.02	42.80	−0.78	8—10		„
		20	19 39.0	15 15.3	150 19.2	150 17.3	+0.02	38.89	39.06	−0.17	8—10		„

---

[1] Die Messungen waren im Manuskript eingesandt, sind später Astr. Journ. Nr. 637 und Lick-Bulletin Nr. 207 veröffentlicht. Die wenigen Messungen von **Aitken** sind mit denjenigen von **Barnard** verbunden. In den berechneten Örtern ist die vorläufige Korrektion δu (vgl. S. 11) berücksichtigt.

Bedingungsgleichungen.

	Koeffizienten *sdp*					Übrigbl. Fehler[1]	Koeffizienten *ds*						Übrigbl. Fehler[1]
	du	*e* sin *w*	*e* cos *w*	*dN*	*dJ*	*v*	*du*	*e* sin *w*	*e* cos *w*	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	*dN*	*dJ*	*v*
1910 Mai 31	+42″.4	+38″.8	−17″.2	+ 6″.8	+ 1.8	−0″.20	+ 2″.9	+ 9″.4	+14″.1	+33″.3	+24″.2	−10.8	+0″.25
Juni 7	+41.9	−35.7	+22.0	+ 3.3	+ 4.7	−0.23	+ 5.4	−13.6	−11.7	+34.1	+22.3	−13.4	−0.08
12	+39.6	+38.2	+10.4	+25.7	+ 4.4	+0.09	− 8.9	−13.4	+15.2	+36.4	+17.4	+ 5.5	−0.19
Juli 3	+42.5	−42.5	+ 2.2	+18.5	− 0.4	+0.37	− 4.8	+ 3.8	−17.5	+34.6	+23.4	− 1.3	+0.08
12	+37.6	+16.2	−34.0	+ 0.6	+19.4	+0.01	+ 8.9	+21.6	+ 0.5	+39.5	+ 8.7	−14.0	+0.02
17	+43.3	−41.5	+12.6	+11.1	0.0	+0.03	0.0	− 4.9	−16.5	+34.4	+24.4	− 7.7	+0.31
24	+43.2	+39.7	−16.9	+ 7.9	+ 1.3	−0.51	+ 2.1	+ 8.7	+15.1	+34.6	+23.6	−10.2	+0.21
26	+36.3	+ 8.6	−35.2	+ 3.8	+23.0	−0.04	+ 7.3	+21.7	− 2.2	+41.2	+ 4.4	−10.9	−0.14
31	+42.7	−37.1	+21.1	+ 5.0	+ 3.4	+0.65	+ 4.0	−12.2	−13.2	+35.0	+22.1	−12.4	−0.41
Aug. 2	+35.6	− 4.3	+35.4	+ 6.2	+24.3	−0.28	+ 6.0	−21.5	+ 3.4	+41.9	+ 2.5	− 8.7	−0.05
Sept. 10	+40.4	−29.4	+27.7	+ 1.4	+ 8.7	−0.34	+ 6.7	−17.2	− 8.5	+35.9	+16.7	−14.6	+0.12
20	+35.0	−23.1	−26.4	+23.6	+17.4	−0.06	− 5.4	+18.9	− 9.4	+40.8	+ 3.8	+ 6.1	−0.35
25	+34.8	− 2.4	+34.7	+ 7.3	+23.1	+0.43	+ 5.0	−20.7	+ 3.6	+40.8	+ 1.8	− 7.5	−0.09
Okt. 9	+33.7	+ 4.6	+33.4	+11.7	+23.6	0.00	+ 2.4	−20.0	+ 5.2	+41.1	+ 0.2	− 3.4	+0.27
1911 Juni 20	+36.2	−18.8	+30.9	− 2.4	+19.7	−0.01	+11.3	−21.8	0.0	+37.4	+11.8	−15.2	+0.27
30	+35.4	−29.3	−19.9	+28.6	+13.8	−0.62	−10.7	+19.8	−10.0	+38.7	+ 9.7	+ 8.7	−0.03
Juli 2	+43.1	−41.4	+12.0	+10.4	+ 0.2	+0.40	+ 0.4	− 4.8	−15.2	+31.9	+27.0	− 8.0	−0.03
4	+34.4	−10.8	+32.7	+ 0.8	+24.7	+0.06	+ 9.7	−22.0	+ 2.9	+40.0	+ 6.4	−12.2	−0.30
16	+41.7	−35.1	+22.6	+ 1.6	+ 6.0	+0.02	+ 7.0	−15.0	−10.2	+33.3	+23.4	−14.4	−0.04
25	+32.8	− 0.9	−32.8	+ 9.1	+28.1	0.00	+ 4.5	+21.2	− 5.1	+42.6	+ 1.0	− 5.2	+0.24
30	+39.5	−27.4	+28.4	− 1.7	+12.6	+0.03	+ 9.9	−19.7	− 5.2	+35.5	+17.6	−16.2	−0.14
1910 Juli 27	+34.5	−10.7	−32.8	+16.6	+24.8	+0.64	− 0.3	+20.6	− 6.5	+43.3	0.0	+ 0.3	+0.78
Aug. 31	+36.5	+28.4	+22.8	+25.9	+13.8	−0.02	− 7.2	−18.2	+11.2	+40.3	+ 7.1	+ 7.4	−0.15
Sept. 21	+38.6	−36.5	−12.5	+24.9	+ 5.4	−0.07	− 7.7	+13.3	−15.0	+37.1	+14.6	+ 5.8	+0.09
1911 Juli 29	+43.0	−40.0	+15.7	+ 7.5	+ 1.4	−0.42	+ 2.5	− 8.2	−14.3	+32.6	+26.0	−10.3	+0.23
Aug. 4	+42.1	+42.1	− 0.7	+19.8	− 0.1	−0.09	− 6.0	− 5.7	+16.8	+33.3	+24.3	− 0.4	−0.20
15	+32.7	+13.0	+30.0	+19.0	+25.5	−0.03	− 2.4	−20.6	+ 6.3	+42.8	+ 0.5	+ 2.6	−0.63
20	+35.8	+14.2	−32 8	0.0	+21.7	+0.06	+ 9.7	+21.8	− 1.2	+39.1	+ 8.1	−13.5	0.00

---

[1] Nach der vollständigen Auflösung mit 6 Unbekannten.

Normalgleichungen.

	du	2*e* sin *w*	2*e* cos *w*	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	*dN*	*dJ*	*n*
du	42846	−9892	+5159	+1985	+11697	+11004	+226.32
2*e* sin *w*		31472	−6573	−2701	− 2912	− 45	−110.15
2*e* cos *w*			21325	−2315	− 1401	+ 1835	+146.60
$\frac{d\Delta}{\Delta}$				39827	+13107	− 6292	−163.68
dN					12895	+ 399	+ 6.29
dJ						9908	− 84.27

Auflösung Oberon—Uranus 1910, 1911.

Yerkesrefraktor, **Barnard**. Lickrefraktor, **Aitken**.

Mittlere Epoche 1910.96.

	lg *a*	lg *b*	lg *c*		*a*	w. F.
sin *du*	7.6591	9.4315*n*	9.4462*n*	*du*	+0°261	+0°055
2*e* sin *w*	7.1463*n*	7.1683	8.8881*n*	*e* sin *w*	−0.00070	±0.00058
2*e* cos *w*	7.6893	8.9904	8.3865*n*	*e* cos *w*	+0.00244	±0.00070
$\frac{d\Delta}{\Delta}$	7.6178*n*	9.4911*n*	9.2181	Δ	41″927	±0″042

Korr. = $a + b \sin dN + c \sin dJ$ Vorläuf. Korr. δu +0°769

Korr. Newc. *du* +1.030 ±0°055

Die vollständige Auflösung mit 6 Unbekannten ergibt:

	lg				w. F.			
							(*nn*)	7.06
sin *du*	7.6110	Korr. Newcomb *du*	+1°003		±0°085			
2*e* sin *w*	7.1447*n*	*e* sin *w*	−0.00070		±0.00062		$(vv)_{sdp}$	2.46
2*e* cos *w*	7.7048	*e* cos *w*	+0.00253		±0.00073		$(vv)_{ds}$	2.03
$\frac{d\Delta}{\Delta}$	7.6736*n*	Δ	41″903		±0″058		(*vv*)	4.49
sin *dN*	7.2583	*N*	166°157		±0°156	Aeq.	Zahl der Mess. 28 *p*, 28 *s*	
sin *dJ*	5.6045*n*	*J*	75.274		±0.153	1900.0	Summe der Gew. 28 *sdp*, 28 *ds*	
							w. F. einer Gl. ±0″202	

Oberon—Titania.

Washington-Refraktor 26 Z. 1901. Beob.: **See**.

Beobachtung — Rechnung.

	Wash. M. T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	*p*	*s*	O $x_1 - x_2$	C $x_1 - x_2$	O − C $d(x_1 - x_2)$ *n*	O $y_1 - y_2$	C $y_1 - y_2$	O − C $d(y_1 - y_2)$ *n*	Zahl der Einst. *p*	*s*
1901 April 11	$15^{h}26^{m}.4$	$18^{h}\ 1^{m}.1$	126°94	53″66	−44″76	−44″82	+0″06	+29″59	+29″45	+0″14	10	10
16	15 33.6	18 8.9	290.32	75.58	+72.60	+72.70	−0.10	−21.00	−20.89	−0.11	10	10
17	14 39.5	17 14.9	321.91	76.85	+51.86	+51.52	+0.34	−56.70	−56.22	−0.48	10	10
26	14 21.5	16 57.8	252.02	35.54	+32.46	+32.78	−0.32	+14.46	+14.61	−0.15	10	10
27	14 25.4	17 1.8	279.18	27.73	+27.69	+27.50	+0.19	− 1.42	− 1.60	+0.18	10	10
28	14 27.5	17 4.0	301.83	19.81	+17.90	+17.49	+0.41	− 8.49	− 8.22	−0.27	10	10
29	13 56.0	16 32.5	308.13	13.63	+11.63	+10.79	+0.84	− 7.11	− 6.92	−0.19	10	10
Mai 13	12 50.4	15 27.9	303.15	77.42	+71.25	+70.78	+0.47	−30.26	−30.54	+0.28	10	10
14	12 49.2	15 26.8	336.13	75.12	+42.32	+41.93	+0.39	−62.04	−62.06	+0.02	10	10
15	12 24.1	15 1.7	8.70	71.79	+ 2.49	+ 2.19	+0.30	−71.73	−71.72	−0.01	10	10
16	12 29.1	15 6.8	41.77	68.08	−34.86	−35.08	+0.22	−58.48	−58.08	−0.40	10	10
17	12 19.8	14 57.5	73.53	62.23	−55.08	−56.30	(+1.22)	−28.95	−28.42	(−0.53)	5	4::
22	12 32.2	15 10.1	226.55	25.28	+14.09	+13.89	+0.20	+20.99	+21.07	−0.08	10	10
23	12 19.2	14 57.2	245.26	17.07	+13.50	+13.77	−0.27	+10.44	+10.59	−0.15	10	10
28	11 40.0	14 18.1	289.85	36.23	+36.07	+35.99	+0.08	− 3.42	− 3.58	+0.16	10	10

		Wash. M. T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	p	s	O x_1-x_2	C x_1-x_2	O − C $\frac{d(x_1-x_2)}{n}$	O y_1-y_2	C y_1-y_2	O − C $\frac{d(y_1-y_2)}{n}$	Zahl der Einst. p	s	
1901 Juni	4	$11^h 24^m.4$	$14^h 2^m.6$	153°.64	75".67	−51".49	−51".71	+0".22	+55".45	+55".54	−0".09	10	10	
	9	10 20.2	12 58.3	316.86	72.11	+63.14	+62.59	+0.55	−34.82	−34.61	−0.21	10	10:	Gew. ½
	10	11 21.5	13 59.6	351.08	66.10	+30.23	+30.42	−0.19	−58.79	−59.11	+0.32	10	10	Gew. ½
	18	11 15.4	13 53.4	180.62	11.61	− 3.96	− 3.82	−0.14	+10.91	+10.48	+0.43	10	10	
	19	11 14.8	13 52.7	173.82	14.90	− 6.77	− 7.01	+0.24	+13.27	+12.74	+0.53	10	10	
	23	11 1.3	13 39.1	269.14	47.10	+43.42	+43.38	+0.04	+18.26	+17.51	+0.75	10	10	
	24	10 53.1	13 30.8	301.23	54.17	+53.50	+53.52	−0.02	− 8.48	− 8.30	−0.18	10	10	
Juli	5	10 3.4	12 40.5	300.29	64.84	+64.55	+64.67	−0.12	− 6.06	− 6.18	+0.12	10	10	
	9	9 23.0	11 59.8	66.05	37.11	−23.98	−23.72	−0.26	−28.33	−28.13	−0.20	10	10:	
	10	9 5.9	11 42.6	94.02	28.75	−26.66	−26.53	−0.13	−10 77	−10.91	+0.14	10	10	
	15	8 32.2	11 8.5	131.45	24.53	−23.75	−23.26	−0.49	+ 6.12	+ 5.65	+0.47	10	10	
	20	9 19.7	11 55.5	281.82	61.73	+59.30	+59.32	−0.02	+17.10	+16.82	+0.28	10	10	
	21	8 29.8	11 5.5	313.32	67.37	+65.00	+64.41	+0.59	−17.73	−17.38	−0.35	10	10	
	23	8 39.7	11 15.2	19.54	74.07	+11.37	+11.87	−0.50	−73.18	−72.30	−0.88	10	10	
Aug.	2	8 22.3	10 56.7	344.19	41.83	+29.81	+29.88	−0.07	−29.34	−29.04	−0.30	10	10	
	7	8 23.7	10 57.5	51.40	12.63	− 4.59	− 4.31	−0.28	−11.77	−11.28	−0.49	10	10	
	8	8 11.2	10 44.9	58.76	18.81	− 9.01	− 8.21	−0.80	−16.52	−16.26	−0.26	10	10:	Gew. ½
	9	8 8.7	10 42.2	77.56	26.20	−19.26	−19.55	+0.29	−17.76	−17.47	−0.29	10	10	
	17	8 3.4	10 35.9	328.97	74.26	+65.34	+64.54	+0.80	−35.29	−34.61	−0.68	10	10	
	18	8 41.8	11 14.1	2.71	74.65	+34.94	+34.80	+0.14	−65.97	−65.53	−0.44	10	10	
	19	7 49.8	10 22.0	34.99	73.47	− 5.58	− 5.36	−0.22	−73.25	−74.05	+0.80	10	10	
	20	7 48.9	10 21.0	67.82	73.55	−44.45	−44.71	+0.26	−58.60	−58.52	−0.08	10	10	
Sept.	4	7 28.8	9 58.8	54.09	35.73	−14.49	−14.76	+0.27	−32.67	−32.93	+0.26	10	10	
	6	7 30.0	9 59.7	115.56	50.54	−50.40	−50.91	+0.51	− 3.91	− 3.51	−0.40	10	10	

Anmerkung. Juni 10 ist $s = 61''.60$ offenbar fehlerhaft angegeben. Statt dessen $s = 66''.10$ angenommen und dieser Tag nur mit halbem Gewicht berücksichtigt. p, s nach Astr. Nachr. Bd. 159 angenommen, nur unbedeutend abweichend von den später in Publ. Nav. Obs. Vol. VI publizierten Werten.

Bedingungsgleichungen.

Koeffizienten in $d(x_1 - x_2)$.

	Oberon				Titania			Übrigbl. Fehler
	du_1	$e_1 \sin w_1$	$e_1 \cos w_1$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	$-du_2$	$-e_2 \sin w_2$	$-e_2 \cos w_2$	v
1901 April 11	+41".3	+ 8".7	−83".4	−44".8	+11".6	−12".9	−36".1	+0".14
16	−17.9	+12.7	−52.2	+72.6	+ 3.2	+ 0.8	−33.3	−0.32
17	−33.5	+16.6	−70.8	+51.9	+23.3	+12.8	−50.5	+0.15
26	+41.9	−21.6	−82.2	+32.4	+27.2	+ 9.8	−56.6	−0.44
27	+31.2	−28.8	−63.6	+27.7	+32.8	−10.5	−64.9	+0.10
28	+13.9	−18.4	−46.9	+17.9	+22.2	−21.5	−45.9	+0.34
29	− 5.8	+ 0.8	−45.4	+11.6	+ 1.1	− 4.8	−32.8	+0.78

			Oberon				Titania			Übrigbl. Fehler	
			du_1	$e_1 \sin w_1$	$e_1 \cos w_1$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	$-du_2$	$-e_2 \sin w_2$	$-e_2 \cos w_2$	v	
1901	Mai	13	−13″3	+ 4″4	−50″0	+71″3	+17″5	+ 7″5	−44″4	+0″26	
		14	−30.8	+10.5	−68.8	+42.3	+31.8	− 1.7	−64.4	+0.24	
		15	−41.8	− 0.7	−85.1	+ 2.5	+30.6	−22.7	−58.3	+0.23	
		16	−44.3	−21.0	−86.2	−34.8	+14.4	−19.9	−36.6	+0.24	
		22	+43.1	− 7.4	−86.8	+14.1	+21.9	+ 6.2	−50.1	+0.12	
		23	+43.7	−27.3	−83.6	+13.5	+33.0	− 9.5	−65.6	−0.33	
		28	−35.7	+ 3.4	−76.3	+36.1	−32.1	−23.9	−60.4	−0.09	
	Juni	4	+37.9	− 1.5	−79.4	−51.5	−18.2	+ 2.9	−45.8	+0.31	
		9	− 7.1	− 6.8	−45.9	+63.1	+27.9	− 2.0	−58.7	+0.36	Gew. ½
		10	−26.7	+ 2.3	−64.3	+30.2	+33.0	−24.8	−61.4	−0.31	Gew. ½
		18	+41.5	−13.5	−83.5	− 4.0	+30.9	− 9.8	−62.4	−0.16	
		19	+44.5	−33.8	−82.4	− 6.8	+31.6	−31.1	−56.1	+0.23	
		23	−15.6	− 4.2	−52.0	+43.4	−33.3	−25.3	−61.7	−0.12	
		24	−32.5	− 3.9	−71.7	+53.5	−24.1	−33.9	−41.3	−0.23	
	Juli	5	+17.0	−34.9	−40.3	+64.6	+23.3	− 4.7	−52.0	−0.31	
		9	−43.9	−31.5	−82.2	−24.0	−15.5	− 4.3	−42.5	−0.26	
		10	−41.9	−47.5	−70.5	−26.7	−30.8	−15.7	−60.8	−0.12	
		15	+38.6	−17.1	−78.4	−23.8	+33.0	−30.3	−58.5	−0.46	
		20	−11.3	−11.2	−46.9	+59.3	−28.3	−38.5	−44.8	−0.22	
		21	−28.6	− 8.7	−65.7	+65.0	−11.0	−25.7	−28.0	+0.37	
		23	−43.8	−42.5	−76.7	+11.4	+29.3	−15.0	−58.6	−0.57	
	Aug.	2	+ 0.2	−20.8	−38.4	+29.8	+29.6	−39.1	−46.5	−0.17	
		7	−31.8	−50.9	−48.1	− 4.6	−20.3	−35.6	−32.1	−0.31	
		8	−15.2	−35.9	−35.9	− 9.0	+ 1.2	−14.5	−29.1	−0.80	Gew. ½
		9	+ 4.6	−17.1	−40.6	−19.3	+22.3	− 8.8	−49.7	+0.32	
		17	−27.4	−11.0	−63.2	+65.3	+ 7.6	−10.1	−33.3	+0.58	
		18	−39.6	−25.2	−76.9	+34.9	+26.7	−13.5	−54.7	0.00	
		19	−42.9	−43.6	−74.0	− 5.6	+32.0	−34.0	−54.3	−0.25	
		20	−37.4	−52.8	−57.0	−44.5	+21.8	−36.8	−33.2	+0.35	
	Sept.	4	−14.1	−34.3	−34.9	−14.5	+19.2	− 7.4	−45.4	+0.30	
		6	+23.8	− 9.3	−58.3	−50.4	+27.3	−38.5	−42.0	+0.62	

Koeffizienten in $d(y_1 - y_2)$.

			Oberon				Titania			Übrigbl. Fehler
			du_1	$e_1 \sin w_1$	$e_1 \cos w_1$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	$-du_2$	$-e_2 \sin w_2$	$-e_2 \cos w_2$	v
1901	April	11	+14″1	+47″0	−16″1	+29″6	−30″3	+61″2	+ 7″2	+0″03
		16	−39.6	+78.3	−21.7	−21.0	+32.4	+64.3	− 7.6	−0.07
		17	−28.1	+59.9	−25.8	−56.7	+22.9	+47.3	−19.7	−0.36
		26	−13.8	+49.2	+ 8.2	+14.4	+18.6	+41.5	−19.5	−0.18
		27	−31.0	+67.6	+14.9	− 1.4	− 3.7	+33.3	+ 0.2	+0.17
		28	−41.5	+84.1	+ 4.1	− 8.5	−24.2	+52.1	+10.8	−0.28
		29	−43.4	+85.6	−15.3	− 7.1	−32.7	+65.2	− 6.1	−0.21

		Oberon				Titania			Übrigbl. Fehler	
		du_1	$e_1 \sin w_1$	$e_1 \cos w_1$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	$-du_2$	$-e_2 \sin w_2$	$-e_2 \cos w_2$	v	
1901 Mai	13	−42″.1	+80″.9	−26″.5	−30″.3	+28″.0	+53″.5	−24″.1	+0″.33	
	14	−31.8	+62.2	−33.3	−62.1	+ 9.7	+33.7	−15.3	+0.14	
	15	−15.1	+46.0	−22.7	−71.8	−13.0	+39.6	+ 5.0	+0.16	
	16	+ 5.0	+44.8	− 3.2	−58.5	−29.8	+61.1	+ 1.8	−0.27	
	22	+11.2	+43.7	−20.4	+21.0	+24.9	+47.3	−26.8	−0.15	
	23	− 8.9	+46.8	− 1.4	+10.4	+ 4.8	+31.9	−11.8	−0.19	
	28	−26.5	+53.3	−34.9	− 3.4	+ 9.1	+36.6	0.0	+0.13	
Juni	4	+23.4	+49.1	−34.5	+55.5	−27.7	+50.1	−29.8	−0.27	
	9	−43.6	+81.4	−32.4	−34.8	+18.3	+36.7	−27.3	−0.15	Gew. ½
	10	−35.5	+62.9	−42.0	−58.8	− 5.3	+34.0	− 5.1	+0.42	Gew. ½
	18	+16.3	+42.2	−31.1	+10.9	+12.5	+31.7	−23.6	+0.36	
	19	− 3.7	+43.0	−11.6	+13.3	−10.6	+37.7	− 2.9	+0.47	
	23	−41.3	+72.1	−43.0	+18.2	+ 1.6	+31.5	−10.3	+0.65	
	24	−30.2	+52.5	−43.8	− 8.5	+22.7	+51.4	− 2.2	−0.20	
Juli	5	−40.5	+80.7	−18.5	− 6.1	+23.4	+38.7	−35.0	+0.12	
	9	− 5.5	+38.2	−23.4	−28.3	−29.0	+47.4	−36.6	−0.16	
	10	+14.3	+49.7	− 8.1	−10.8	−12.0	+29.0	−25.6	+0.15	
	15	+21.1	+40.5	−40.0	+ 6.1	− 1.9	+30.3	−12.5	+0.42	
	20	−42.1	+70.5	−47.3	+17.1	+16.6	+43.0	− 5.6	+0.19	
	21	−33.0	+51.6	−50.0	−17.7	+30.6	+59.4	−18.4	−0.34	
	23	+ 2.9	+40.2	−17.2	−73.2	+14.7	+28.9	−29.4	−0.71	
Aug.	2	−43.1	+76.0	−40.6	−29.3	−13.6	+39.3	− 7.1	−0.27	
	7	+29.3	+65.5	−11.4	−11.8	+25.1	+52.8	−11.0	−0.46	
	8	+40.2	+77.4	−26.3	−16.5	+32.1	+55.7	−31.8	−0.23	Gew. ½
	9	+42.7	+72.5	−45.0	−17.7	+23.3	+35.2	−37.6	−0.26	
	17	−32.8	+49.1	−51.3	−35.3	+30.9	+50.5	−36.5	−0.63	
	18	−16.6	+35.4	−37.2	−66.0	+17.7	+29.2	−33.2	−0.44	
	19	+ 2.0	+38.2	−19.0	−73.3	− 3.3	+29.6	−12.8	+0.97	
	20	+20.8	+54.9	− 9.8	−58.6	−23.3	+50.4	−10.0	+0.06	
Sept.	4	+39.5	+75.8	−26.5	−32.7	+24.9	+37.6	−37.8	+0.34	
	6	+34.6	+52.6	−50.7	− 3.9	−15.7	+40.9	− 6.8	−0.42	

Normalgleichungen.

	du_1	$e_1 \sin w_1$	$e_1 \cos w_1$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	$-du_2$	$-e_2 \sin w_2$	$-e_2 \cos w_2$	n
du_1	70003	−20323	+22491	− 2000	+ 1887	− 9845	+ 10312	− 42.20
$e_1 \sin w_1$		152747	−13920	−35163	+ 2194	+105859	− 2366	− 58.41
$e_1 \cos w_1$			197151	−10501	−36615	− 2926	+134155	−153.68
$\frac{d\Delta}{\Delta}$				106132	− 1643	− 29961	− 14057	+284.55
$-du_2$					39182	+ 851	− 30430	+ 7.40
$-e_2 \sin w_2$						89187	+ 3822	−155.73
$-e_2 \cos w_2$							106591	+ 75.49

Auflösung Oberon—Titania 1901.

Washington-Refraktor. See.

Mittlere Epoche 1901.45. Ob. $\delta u_1 = +0\overset{\circ}{.}579$ Ti. $\delta u_2 = +1\overset{\circ}{.}372$

Titania-Kreisbahn

		lg *a*	lg *b*	lg *c*			*a*	w. F.		
Ob.	sin du_1	6.4293*n*	8.6990	8.7223*n*	Ob.	du_1	$-0\overset{\circ}{.}015$	$\pm 0\overset{\circ}{.}054$	(*nn*)	9.71
"	$e_1 \sin w_1$	6.1373	9.8392	8.3971	"	$e_1 \sin w_1$	+0.00014	±0.00065		
"	$e_1 \cos w_1$	6.8161*n*	8.4164	9.8154	"	$e_1 \cos w_1$	−0.00065	±0.00061	$(vv)_x$	4.17
	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	7.4236	8.6985*n*	8.7998*n*		$\frac{d\Delta}{\Delta}$	+0.00265	±0.00077	$(vv)_y$	4.70
Ti.	sin du_2	6.4867	7.4624	9.2232*n*	Ti.	du_2	$+0\overset{\circ}{.}018$	$\pm 0\overset{\circ}{.}077$	(*vv*)	8.87

Korr. $= a + b \cdot e_2 \sin w_2 + c \cdot e_2 \cos w_2$

Korr. Newcomb Ob. du_1	+0.564	±0.054	Zahl der Mess. 38 *p*, 38 *s*
" Ti. du_2	+1.390	±0.077	w. F. einer Gl. $\pm 0\overset{''}{.}238$

Oberon—Titania.

Washington-Refraktor 26 Z. 1902. Beob.: See.

Beobachtung — Rechnung.

	Wash. M. T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O *p*	C *p*	O−C *n* *sdp*	O *s*	C *s*	O−C *n* *ds*	Zahl der Einst. *p*	*s*	
1902 April 30	$14^h 52^m.2$	$17^h 27^m.9$	36° 45′.6	36° 24′.2	+0″.25	39″.88	40″.06	−0″.18	10	10	
Mai 1	14 43.4	17 19.2	64 54.0	65 7.6	−0.13	31.01	32.04	−1.03	10	10	
4	14 37.2	17 13.2	99 56.4	104 49.3	−0.95	10.99	11.20	−0.21	10	10	
5	14 34.5	17 10.6	93 40.2	93 45.0	−0.02	14.52	13.58	+0.94	10	10	
6	14 42.4	17 18.6	107 46.2	105 3.8	+0.97	20.66	20.65	+0.01	10	10	*p* +10° korr.
8	14 23.7	17 0.0	156 25.2	156 55.0	−0.32	37.23	36.84	+0.39	10	10	
9	14 16.0	16 52.4	187 25.8	187 26.3	−0.01	44.81	44.85	−0.04	10	10	
11	14 35.7	17 12.3	250 46.8	250 59.8	−0.22	59.94	59.46	+0.48	10	10	
15	14 14.1	16 50.9	21 28.8	21 47.8	−0.42	76.70	75.52	+1.18	10	10	
28	13 26.6	16 4.0	46 53.4	49 27.9	−0.63	14.27	14.08	+0.19	10	10	
29	13 17.0	15 54.4	42 19.2	39 33.3	+0.54	11.34	11.24	+0.10	10	10	
30	13 28.5	16 6.0	29 40.8	34 48.8	(−1.40)	17.44	15.66	(+1.78)	10	10	verfehlt
Juni 1	13 17.5	15 55.0	76 3.6	76 22.9	−0.18	31.77	31.87	−0.10	10	10	
4	13 15.9	15 53.5	167 52.8	167 58.1	−0.08	54.38	54.69	−0.31	10	10	
5	13 14.5	15 52.1	200 58.8	200 24.0	+0.62	60.70	61.26	−0.56	10	10	
7	13 23.8	16 1.4	265 49.2	265 25.4	+0.50	72.30	71.60	+0.70	10	10	
8	13 2.5	15 40.1	297 43.2	297 37.4	+0.13	74.89	74.46	+0.43	10	10	
9	12 50.9	15 28.5	330 59.4	330 27.8	+0.70	76.20	76.10	+0.10	10	10	
10	12 48.2	15 25.8	3 45.6	3 44.8	+0.02	77.16	77.06	+0.10	10	10	
11	12 46.4	15 24.0	36 48.0	36 50.2	−0.05	77.38	77.14	+0.24	10	10	
24	11 30.0	14 7.3	335 58.2	336 43.1	−0.23	18.24	17.53	+0.71	10	10	
Juli 11	9 55.9	12 32.4	146 33.0	146 52.4	−0.31	55.98	55.64	+0.34	10	10	
12	10 1.5	12 37.8	180 24.0	179 4.6	+1.12	48.00	48.51	−0.51	10	10	
13	10 2.5	12 38.8	210 42.0	210 17.7	+0.29	41.59	40 97	+0.62	10	10	
14	9 54.8	12 31.0	239 30.6	239 32.6	−0.02	32.23	33.02	−0.79	10	10	
22	9 34.5	12 10.0	2 9.6	1 9.9	+0.76	44.66	43.73	+0.93	10	10	

	Wash. M. T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	O p	C p	O – C n sdp	O s	C s	O – C n ds	Zahl der Einst. p	 s
1902 Juli 31	$8^h 37^m.5$	$11^h 12^m.1$	292° 37′.2	292° 36′.4	+0″.02	75″.40	75″.11	+0″.29	10	10
Aug. 2	8 23.8	10 58.2	357 12.0	358 19.2	−1.35	69.12	68.92	+0.20	10	10
3	8 39.0	11 13.3	31 36.0	31 37.5	−0.59	64.97	64.66	+0.31	10	10
4	8 20.5	10 54.7	62 58.2	63 38.6	−0.70	59.69	59.56	+0.13	10	10:
7	8 9.0	10 42.8	157 45.6	157 18.7	+0.30	38.76	38.01	+0.75	10	10
8	8 25.5	10 59.2	187 17.4	186 41.3	+0.31	29.46	29.77	−0.31	10	10
21	7 44.0	10 16.0	110 57.6	110 20.4	+0.78	72.04	71.73	+0.31	10	10
22	8 0.4	10 32.3	143 38.4	143 33.4	+0.11	72.74	73.45	−0.71	10	10:
23	8 3.0	10 34.7	177 5.4	176 50.7	+0.32	74.52	74.13	+0.39	10	10:
24	7 42.0	10 13.6	210 22.8	209 37.9	+0.97	73.94	74.06	−0.12	10	10
25	8 11.0	10 42.5	243 6.0	243 14.0	−0.17	72.82	73.02	−0.20	10	10
28	7 43.2	10 14.3	339 51.0	340 31.1	−0.72	62.17	61.59	+0.58	10	10:
30	7 44.5	10 15.3	44 33.6	45 23.3	−0.72	49.57	49.66	−0.09	10	10
31	7 38.4	10 9.0	77 7.8	76 23.0	+0.56	43.41	42.66	+0.75	10	10:
Sept. 1	7 41.0	10 11.5	104 11.4	106 15.7	−1.26	35.12	34.83	+0.29	10	10:

Anmerkung. Wegen der geringen Genauigkeit dieser Beobachtungsreihe sind aus derselben nur die Korrektionen der Längen und der Halbachsen (bzw. $\frac{d\Delta}{\Delta}$) abgeleitet. Die Bedingungsgleichungen sind hier direkt für *sdp* und *ds* gebildet. Den Gleichungen wurde durchweg gleiches Gewicht erteilt.

Bedingungsgleichungen.

	Koeffizienten *sdp* du_1	 $-du_2$	Übrigbl. Fehler v	Koeffizienten *ds* du_1	 $\frac{d\Delta}{\Delta}$	 $-du_2$	Übrigbl. Fehler v
1902 April 30	+30″.4	− 9″.4	+0″.25	+31″.7	+40″.1	+31″.2	−0″.17
Mai 1	+29.0	− 2.6	−0.11	+32.8	+32.0	+32.8	−1.00
4	+43.3	+32.1	−0.81	+ 5.6	+11.2	+ 5.8	−0.21
5	+38.0	+24.4	+0.10	−22.3	+13.6	−22.1	+0.81
6	+30.8	+10.2	+1.04	−31.5	+20.6	−31.3	−0.18
8	+30.1	− 7.2	−0.31	−31.8	+36.8	−31.8	+0.15
9	+32.1	−13.1	−0.02	−29.7	+44.8	−30.1	−0.30
11	+36.5	−22.2	−0.26	−24.3	+59.5	−24.2	+0.21
15	+43.4	−32.1	−0.48	− 6.8	+75.5	− 7.7	+0.92
28	+37.6	+23.7	−0.51	+23.5	+14.1	+23.4	+0.24
29	+43.9	+32.7	+0.69	− 3.6	+11.2	− 3.6	+0.06
Juni 1	+29.3	− 2.2	−0.16	−33.3	+31.9	−33.3	−0.32
4	+35.6	−19.7	−0.10	−26.4	+54.7	−26.5	−0.58
5	+37.8	−23.7	+0.58	−22.8	+61.3	−23.4	−0.83
7	+41.4	−29.4	+0.45	−15.2	+71.6	−14.9	+0.41
8	+43.0	−31.4	+0.07	−11.1	+74.5	−10.2	+0.17
9	+44.1	−32.8	+0.63	− 6.0	+76.1	− 5.7	−0.17
10	+44.5	−33.2	−0.05	− 0.7	+77.1	− 1.3	−0.14
11	+44.0	−32.8	−0.12	+ 4.3	+77.1	+ 3.4	0.00

			Koeffizienten *sdp*		Übrigbl. Fehler	Koeffizienten *ds*			Übrigbl. Fehler
			du_1	$-du_2$	v	du_1	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	$-du_2$	v
1902	Juni	24	+33″.4	+15″.7	−0″.15	−29″.2	+17″.5	−29″.0	+0″.54
	Juli	11	+35.7	−20.4	−0.33	+25.5	+55.6	+26.0	+0.28
		12	+33.3	−15.7	+1.10	+28.8	+48.5	+28.7	−0.54
		13	+30.9	−10.2	+0.29	+31.5	+41.0	+31.1	+0.63
		14	+29.3	− 3.5	0.00	+32.9	+33.0	+32.7	−0.75
		22	+31.7	−12.4	+0.75	−30.0	+43.7	−30.1	+0.67
		31	+42.9	−31.8	−0.04	+ 6.0	+75.1	+ 6.5	+0.09
	Aug.	2	+40.9	−28.8	+1.30	+15.1	+68.9	+15.1	+0.06
		3	+38.9	−26.1	−0.63	+19.7	+64.7	+19.1	+0.19
		4	+36.5	−22.6	−0.73	+23.5	+59.6	+23.0	+0.03
		7	+30.0	− 8.3	+0.31	+30.9	+38.0	+31.2	+0.76
		8	+28.8	− 1.3	+0.34	+32.2	+29.8	+32.1	−0.27
		21	+41.2	−30.0	+0.72	−11.1	+71.7	−10.6	+0.05
		22	+42.3	−31.4	+0.05	− 6.6	+73.4	− 5.9	−0.97
		23	+42.8	−32.0	+0.26	− 1.6	+74.1	− 1.5	+0.16
		24	+42.7	−31.8	+0.91	+ 3.4	+74.1	+ 2.8	−0.34
		25	+41.7	−30.8	−0.23	+ 8.1	+73.0	+ 7.5	−0.40
		28	+37.5	−24.6	−0.76	+19.9	+61.6	+20.3	+0.47
		30	+32.8	−16.8	−0.74	+27.2	+49.7	+26.7	−0.13
		31	+30.4	−11.8	+0.55	+29.6	+42.7	+29.4	+0.74
	Sept.	1	+28.6	− 6.0	−1.25	+31.0	+34.8	+31.3	+0.31

Normalgleichungen.

	du_1	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	$-du_2$	n
du_1	76164	+5301	− 472	− 66.65
$\frac{d\Delta}{\Delta}$		119440	+5301	+344.07
$-du_2$			42626	−119.69

Auflösung Oberon—Titania 1902.

Washington-Refraktor. See.

Mittlere Epoche 1902.50. Ob. $\delta u_1 = +0°.600$ Ti. $\delta u_2 = +1°.425$

		lg
Ob.	sin du_1	7.0448$_n$
	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	7.4875
Ti.	sin du_2	7.5054

				w. F.
	Ob.	du_1	−0°.063	±0°.076
		$\frac{d\Delta}{\Delta}$	+0.00307	±0.00106
	Ti.	du_2	+0°.183	±0°.102
Korr. Newcomb	Ob.	du_1	+0°.537	±0°.076
" "	Ti.	du_2	+1.608	±0.102

(nn)	24.13
$(vv)_{sdp}$	13.23
$(vv)_{ds}$	9.19
(vv)	22.42

Zahl der Mess. 40 *p*, 40 *s*

w. F. einer Gl. ±0″.364

Oberon—Titania.

Lickrefraktor 36 Z. 1903—1905. Beob.: Aitken.

Beobachtung — Rechnung.

		Pacific Standard Zeit	Red. Mittl. Zt. Greenw.	p	s	O x_1-x_2	C x_1-x_2	O − C $d(x_1-x_2)$ n	O y_1-y_2	C y_1-y_2	O − C $d(y_1-y_2)$ n	Zahl der Einst. p	s
1903 Juli	10	$10^{h}49^{m}33^{s}$	$16^{h}17^{m}.7$	130°00	75″58	−21″18	−20″71	−0″47	+72″57	+72″90	−0″33	8	8
	11	10 55 56	16 23.9	164.00	74.45	+22.46	+22.52	−0.06	+70 99	+70.92	+0.07	8	8
	17	10 43 11	16 10.8	357.90	43.83	−22.22	−22.34	+0.12	−37.78	−37.77	−0.01	8	8
	25	9 56 32	15 23.4	118.90	32.19	−15.97	−16.14	+0.17	+27.95	+27.87	+0.08	8	8
	31	9 57 56	15 24.3	307.60	69.68	+25.94	+25.16	+0.78	−64.67	−65.11	+0.44	8	8
Aug.	7	8 55 39	14 21.2	178.10	65.46	+30.58	+30.79	−0.21	+57.88	+58.57	−0.69	8	8
	18	8 50 31	14 14.7	40.95	26.40	−24.77	−24.52	−0.25	− 9.11	− 9.61	+0.50	8	8
	19	8 42 42	14 6.8	67.20	34.43	−34.25	−34.33	+0.08	+ 3.61	+ 3.32	+0.29	8	8
	20	9 5 22	14 29.4	97.00	42.43	−34.43	−34.36	−0.07	+24.79	+24.61	+0.18	8	8
	21	9 4 18	14 28.2	128.20	48.75	−19.12	−19.31	+0.19	+44.84	+45.22	−0.38	8	8
		Sternzeit Mt. Ham.											
1904 Juli	13	17 38 4	15 45.5	271.05	75.73	+47.32	+47.37	−0.05	−59.15	−58.94	−0.21	8	8
	16	18 16 8	16 11.5	11.56	71.00	−62.42	−62.32	−0.10	−33.86	−33.50	−0.36	8	8
	17	18 35 22	16 26.6	43.58	67.33	−67.20	−66.75	−0.45	+ 4.03	+ 4.65	−0.62	8	8
	30	18 52 18	15 51.4	322.05	43.27	− 7.99	− 8.64	+0.65	−42.53	−42.18	−0.35	8	8
1905 Juni	8	18 46 30	19 12.2	146.66	25.00	+12.70	+12.48	+0.22	+21.53	+21.32	+0.21	8	8
	9	19 34 32	19 56.3	167.28	16.96	+13.20	+13.30	−0.10	+10.65	+10.72	−0.07	8	8
	24	18 42 1	18 5.1	173.24	74.69	+61.86	+61.78	+0.08	+41.86	+42.35	−0.49	8	8
Juli	9	18 9 34	16 33.5	158.39	36.59	+23.46	+23.13	+0.33	+28.08	+27.99	+0.09	8	8
	20	18 43 16	16 23.3	154.62	70.27	+40.59	+40.64	−0.05	+57.37	+57.78	−0.41	8	8
	28	18 50 9	15 58.1	36.18	20.69	−20.57	−20.51	−0.06	+ 2.26	+ 2.33	−0.07	8	8
	30	18 33 17	15 33.3	36.70	10.94	−10.86	−10.98	+0.12	+ 1.27	+ 1.46	−0.19	8	8
Aug.	5	18 58 2	15 33.8	169.02	52.91	+39.72	+39.99	−0.27	+34.96	+35.04	−0.08	8	8
	31	19 19 25	14 9.9	149.87	58.61	+27.97	+28.25	−0.28	+51.51	+51.87	−0.36	8	8

Bedingungsgleichungen.

Koeffizienten in $d(x_1-x_2)$.

		Oberon				Titania			Übrigbl. Fehler
		du_1	$e_1 \sin w_1$	$e_1 \cos w_1$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	$-du_2$	$-e_2 \sin w_2$	$-e_2 \cos w_2$	v
1903 Juli	10	+41″6	+55″7	−63″6	−21″2	−32″5	+39″3	−52″1	−0″41
	11	+43.7	+41.3	−77.4	+22.4	−28.3	+17.7	−56.4	−0.02
	17	−42.8	+52.3	−68.5	−22.2	− 4.4	+20.9	−26.5	−0.07
	25	+41.6	+29.7	−78.9	−16.0	+13.3	+ 8.3	−39.2	+0.05
	31	−43.6	+43.3	−75.7	+25.9	+22.4	+37.5	−34.3	+0.52
Aug.	7	+43.4	+38.6	−77.7	+30.6	−16.1	+ 6.7	−42.3	−0.21
	18	+19.2	+39.0	−38.0	−24.8	+29.0	+37.9	−46.0	−0.35
	19	+34.4	+50.7	−53.2	−34.3	+31.0	+21.1	−59.0	−0.05

			Oberon				Titania			Übrigbl. Fehler
			du_1	$e_1 \sin w_1$	$e_1 \cos w_1$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	$-du_2$	$-e_2 \sin w_2$	$-e_2 \cos w_2$	v
1903	Aug.	20	+42.″4	+45.″1	−72.″1	−34.″4	+17.″4	+ 6.″0	−43.″6	−0.″18
		21	+41.1	+26.9	−78.7	−19.1	− 4.8	+19.1	−27.1	+0.12
1904	Juli	13	−34.5	+66.5	−32.8	+47.3	+26.0	+49.9	−25.1	−0.18
		16	−32.6	+34.4	−62.8	−62.4	+ 1.8	+22.6	−24.0	−0.32
		17	−15.7	+25.8	−44.8	−67.2	−20.5	+44.1	−19.9	−0.53
		30	−25.1	+26.8	−55.4	− 8.0	+18.2	+41.0	−19.4	+0.45
1905	Juni	8	+41.6	+78.0	−32.4	+12.7	+19.1	+45.6	−10.0	+0.24
		9	+43.5	+70.5	−51.4	+13.2	+32.2	+58.2	−28.4	−0.16
		24	+30.2	+42.6	−53.6	+61.8	−14.3	+26.0	−32.0	+0.13
	Juli	9	+ 3.7	+34.7	−27.7	+23.4	−25.5	+52.8	−15.9	+0.38
		20	+41.6	+61.3	−57.8	+40.5	−18.8	+27.3	−37.3	+0.02
		28	−27.2	+37.6	−52.1	−20.6	−29.6	+41.9	−44.2	−0.13
		30	+10.7	+43.8	−17.9	−10.9	+ 9.2	+34.0	−12.9	+0.09
	Aug.	5	+ 4.2	+33.3	−28.7	+39.7	−32.3	+54.7	−34.7	−0.19
		31	+23.0	+33.1	−48.1	+28.0	−31.0	+54.4	−30.5	−0.21

Koeffizienten in $d(y_1 - y_2)$.

			Oberon				Titania			Übrigbl. Fehler
			du_1	$e_1 \sin w_1$	$e_1 \cos w_1$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	$-du_2$	$-e_2 \sin w_2$	$-e_2 \cos w_2$	v
1903	Juli	10	+14.″5	+48.″2	+13.″8	+72.″5	− 5.″9	+31.″5	+12.″8	−0.″18
		11	− 5.5	+34.7	+27.7	+71.0	+16.7	+27.4	+33.7	+0.13
		17	−10.1	+44.3	+14.9	−37.8	−32.1	+57.4	+29.1	+0.10
		25	−13.6	+34.9	+34.7	+27.9	−29.5	+45.6	+39.6	+0.24
		31	− 1.4	+38.4	+19.5	−64.7	−23.3	+50.8	+ 9.6	+0.40
	Aug.	7	− 2.5	+36.7	+22.4	+57.9	+27.8	+43.1	+38.6	−0.67
		18	+37.9	+75.7	+19.9	− 9.1	+13.8	+39.3	+ 6.3	+0.61
		19	+25.5	+60.6	+ 8.3	+ 3.6	− 8.4	+26.5	+22.7	+0.42
		20	+ 7.2	+42.1	+13.6	+24.8	−26.7	+41.6	+37.6	+0.33
		21	−12.3	+35.5	+31.4	+44.9	−31.3	+57.8	+24.4	−0.19
1904	Juli	13	−26.5	+55.7	+29.2	−59.2	+19.6	+41.4	+21.4	−0.24
		16	+28.7	+27.3	+59.7	−33.9	−31.9	+42.7	+47.5	−0.26
		17	+39.9	+44.9	+67.8	+ 4.0	−25.0	+46.9	+26.6	−0.31
		30	+34.8	+35.7	+64.5	−42.5	+26.4	+48.2	+27.8	−0.22
1905	Juni	8	+13.5	+35.2	+32.5	+21.5	+25.4	+39.9	+36.3	+0.26
		9	− 6.2	+17.3	+39.5	+10.6	+ 6.4	+22.5	+24.4	0.00
		24	−30.5	+17.1	+65.3	+41.9	+28.3	+20.5	+54.4	−0.46
	Juli	9	−41.8	+43.4	+71.6	+28.0	−19.7	+37.1	+27.9	+0.26
		20	−13.2	+15.7	+45.1	+57.4	+25.6	+17.4	+51.5	−0.36
		28	+32.7	+21.7	+66.9	+ 2.3	+13.0	+11.2	+36.8	+0.10
		30	+40.5	+54.6	+60.7	+ 1.3	+30.0	+41.3	+44.3	−0.03
	Aug.	5	−41.5	+44.6	+70.0	+35.0	− 3.1	+20.7	+23.9	+0.05
		31	−34.4	+26.1	+67.5	+51.5	− 7.3	+24.8	+22.0	−0.21

Normalgleichungen.

	du_1	$e_1 \sin w_1$	$e_1 \cos w_1$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	$-du_2$	$-e_2 \sin w_2$	$-e_2 \cos w_2$	n
du_1	42708	+18620	−17818	− 2484	− 123	+ 8763	−12169	− 51.94
$e_1 \sin w_1$		88227	−19941	+11873	+1679	+68695	− 8554	+ 51.18
$e_1 \cos w_1$			125093	+15399	+4581	− 4634	+74989	−215.15
$\frac{d\Delta}{\Delta}$				66151	−3110	+ 9566	+12517	− 81.67
$-du_2$					23843	− 2926	+ 3814	+ 57.31
$-e_2 \sin w_2$						65269	+ 1248	− 92.55
$-e_2 \cos w_2$							53889	−103.66

Auflösung Oberon—Titania 1903, 1904, 1905.

Lickrefraktor. Aitken.

Mittlere Epoche 1904.55. Ob. $\delta u_1 = +0°641$ Ti. $\delta u_2 = +1°527$

		lg a	lg b	lg c			Titania-Kreisbahn a	w. F.		
Ob.	$\sin du_1$	7.2655n	9.0925n	8.7284n	Ob.	du_1	−0°106	±0°065	(nn)	4.64
"	$e_1 \sin w_1$	6.8104n	9.9215	8.6128	"	$c_1 \sin w_1$	−0.00065	±0.00078		
"	$e_1 \cos w_1$	7.3258n	8.9583	9.7716	"	$e_1 \cos w_1$	−0.00212	±0.00069	$(vv)_x$	1.66
	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	6.7518n	8.6080n	8.6490		$\frac{d\Delta}{\Delta}$	−0.00056	±0.00090	$(vv)_y$	2.22
Ti.	$\sin du_2$	7.4429n	9.3114n	8.6903	Ti.	du_2	−0°159	±0°078	(vv)	3.88

Korr. $= a + b \cdot e_2 \sin w_2 + c \cdot e_2 \sin w_2$

Korr. Newcomb Ob. du_1 +0°535 ±0°065 Zahl der Mess. 23 p, 23 s

" Ti. du_2 +1.368 ±0.078 w. F. einer Gl. ±0″207

Oberon—Titania.

Washington-Refraktor 26 Z. 1904. Beob.: Frederick, Hammond.

Beobachtung — Rechnung.

	Wash. M. T.	Red. Mittl. Zt. Greenw.	p	s	O $x_1 - x_2$	C $x_1 - x_2$	O−C $d(x_1-x_2)$ n	O $y_1 - y_2$	C $y_1 - y_2$	O−C $d(y_1-y_2)$ n	Zahl der Einst. p	s	Beob.
1904 Juni 3	$12^h49^m28^s$	$15^h25^m.7$	329°86	29″84	−12″44	−12″55	+0″11	−27″12	−27″19	+0″07	9	8	F.
13	13 10 56	15 47.4	157.07	58.25	+29.80	+30.57	−0.77	+50.05	+50.63	−0.58	8	8	"
14	13 32 29	16 9.0	190.19	65.39	+58.66	+59.05	−0.39	+28.89	+28.89	0.00	8	8	"
15	13 23 55	16 0.4	222.18	70.27	+69.93	+70.29	−0.36	− 6.93	− 6.69	−0.24	8	8	"
17	13 8 14	15 44.7	286.60	74.07	+25.50	+25.03	+0.47	−69.53	−69.78	+0.25	8	8	"
22	13 3 55	15 40.4	91.11	67.38	−39.81	−39.80	−0.01	+54.38	+54.88	−0.50	8	8	"
Juli 3	12 2 25	14 38.6	314.52	24.02	− 2.49	− 2.79	+0.30	−23.89	−23.94	+0.05	8	8	"
11	11 14 12	13 50.1	203.65	74.30	+71.48	+71.41	+0.07	+20.27	+20.43	−0.16	8	8	"
13	10 44 40	13 20.5	267.85	75.64	+50.46	+50.79	−0.33	−56.34	−56.18	−0.16	8	8	"
20	10 15 43	12 51.0	136.30	48.04	+ 4.90	+ 4.88	+0.02	+47.79	+47.96	−0.17	8	8	H.
31	10 14 40	12 49.1	350.40	50.13	−31.49	−31.53	+0.04	−39.00	−38.54	−0.46	7	8	"
Aug. 3	8 38 19	11 12.4	84.13	66.21	−48.90	−49.35	+0.45	+44.66	+44.97	−0.31	8	8	"
12	8 34 50	11 7.9	20.88	60.17	−55.99	−55.57	−0.42	−22.06	−21.88	−0.18	8	8	"
28	8 10 55	10 42.0	35.19	67.96	−67.33	−67.02	−0.31	− 9.28	− 9.32	+0.04	8	8	"
Sept. 4	7 53 6	10 23.3	264.30	65.93	+49.61	+49.89	−0.28	−43.43	−43.56	+0.13	8	8	"

Anmerkung. 10 Messungen von Dinwiddie 1903 sind unberücksichtigt geblieben. Außerdem sind in Publ. Nav. Obs. Vol. VI noch 7 Messungen von Rice 1905 nachträglich veröffentlicht. (Vgl. S. 34.)

Bedingungsgleichungen.

Koeffizienten in $d(x_1 - x_2)$.

		Oberon				Titania			Übrigbl. Fehler v
		du_1	$e_1 \sin w_1$	$e_1 \cos w_1$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	$-du_2$	$-e_2 \sin w_2$	$-e_2 \cos w_2$	
1904 Juni	3	−40.″2	+73.″0	−38.″4	−12.″4	−12.″1	+36.″1	−15.″0	+0.″17
	13	+20.3	+29.2	−48.4	+29.8	−31.9	+54.1	−34 8	−0.64
	14	+ 0.3	+33.5	−28.8	+58.6	−29.5	+36.7	−48.6	−0.17
	15	−19.4	+51.5	−20.9	+69.9	−12.6	+21.2	−33.3	−0.12
	17	−43.4	+71.3	−50.3	+25.5	+28.5	+53.2	−26.6	+0.50
	22	+23.6	+55.9	−22.3	−39.8	−33.0	+51.2	−41.6	+0 05
Juli	3	−25.9	+29.8	−55.4	− 2.5	− 1.2	+23.7	−23.1	+0 26
	11	+ 2.8	+30.4	−32.2	+71.5	−18.2	+21.1	−40.5	+0.29
	13	−33.2	+65.3	−31.5	+50.5	+24.5	+48.5	−23.1	−0.20
	20	+36.0	+67.1	−36.0	+ 4.9	−13.3	+19.1	−35.2	+0.15
	31	− 8.9	+26.1	−38.2	−31.5	+30.6	+50.9	−35 8	−0.11
Aug.	3	+39.9	+67.9	−45.4	−48.9	− 6.2	+28.2	−19.5	+0.43
	12	−34.8	+35.2	−65.3	−56.0	−12.4	+34.1	−18.5	−0.57
	28	+ 9.7	+38.0	−25.8	−67.3	+19.3	+19.1	−42.1	−0.47
Sept.	4	−14.5	+42.7	−24.8	+49.6	+30.1	+48.6	−37.0	−0 20

Koeffizienten in $d(y_1 - y_2)$.

		Oberon				Titania			Übrigbl. Fehler v
		du_1	$e_1 \sin w_1$	$e_1 \cos w_1$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	$-du_2$	$-e_2 \sin w_2$	$-e_2 \cos w_2$	
1904 Juni	3	−17.″6	+44.″0	+28.″5	−27.″1	−29.″7	+46.″1	+39.″2	+0.″18
	13	−38.0	+36.1	+69.8	+50.0	− 8.4	+28.3	+20.9	−0.31
	14	−42.8	+55.2	+65.5	+28.9	+14.3	+15.1	+37.7	+0.20
	15	−38.5	+63.1	+47.9	− 6.9	+29.6	+30.0	+52 6	−0.17
	17	− 8.1	+34.9	+28.5	−69.5	+16.2	+36.8	+21.4	+0.15
	22	+36.3	+63.0	+42.8	+54.3	− 2.3	+23.0	+22.7	−0.17
Juli	3	+34.7	+32.7	+66.3	−23.9	+32.1	+42.2	+48.3	+0.09
	11	−42.8	+56.4	+64.4	+20.3	+26.7	+26.2	+49.8	0.00
	13	−28.0	+57.3	+30.1	−56.3	+21.4	+43.2	+22.8	−0.21
	20	+24.4	+53.7	+27.0	+47.8	+29.2	+32.1	+50.5	+0.02
	31	+41.6	+52.6	+65.0	−39.0	+10.9	+32.3	+18.0	−0.37
Aug.	3	+16.9	+45.8	+23.8	+44.7	−31.1	+48.3	+39.8	−0.02
	12	+25.1	+26.7	+54.3	−22.0	−29.2	+49.6	+33.0	−0.04
	28	+40.5	+65.0	+49.5	− 9.3	−24.8	+26.4	+46.1	+0.27
Sept.	4	−38.9	+65.5	+44.4	−43.4	+ 9.7	+31.0	+16.9	+0.16

Normalgleichungen.

	du_1	$e_1 \sin w_1$	$e_1 \cos w_1$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	$-du_2$	$-e_2 \sin w_2$	$-e_2 \cos w_2$	n
du_1	27799	−7333	+2263	−3535	−6827	− 4342	+ 147	− 9.58
$e_1 \sin w_1$		78521	+8551	+2724	+3029	+50787	+ 4642	−143.25
$e_1 \cos w_1$			60840	−1983	+5616	+ 2338	+41223	− 80.93
$\frac{d\Delta}{\Delta}$				57135	−3326	+ 259	− 4491	−140.68
$-du_2$					15623	+ 631	+ 4660	+ 32.10
$-e_2 \sin w_2$						41303	+ 409	−132.34
$-e_2 \cos w_2$							36864	− 6.58

Auflösung Oberon—Titania 1904.

Washington-Refraktor. Frederick, Hammond.

Mittlere Epoche 1904.55. Ob. $\delta u_1 = +0°.641$ Ti. $\delta u_2 = +1°.527$

Titania-Kreisbahn

		lg a	lg b	lg c			a	w. F.		
Ob.	sin du_1	6.6532*n*	7.4193*n*	8.7558*n*	Ob.	du_1	−0°.026	±0°.075	(nn)	3.02
	$e_1 \sin w_1$	7.2363*n*	9.8169	8.2782*n*	"	$e_1 \sin w_1$	−0.00172	±0.00074		
"	$e_1 \cos w_1$	7.1299*n*	8.6772*n*	9.8317	"	$e_1 \cos w_1$	−0.00135	±0.00085	$(vv)_x$	1.73
	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	7.3670*n*	8.5197*n*	8.7516*n*		$\frac{d\Delta}{\Delta}$	−0.00233	±0.00086	$(vv)_y$	0.53
Ti.	sin du_2	7.3389*n*	8.8915*n*	8.3244	Ti.	du_2	−0°.125	±0°.102	(vv)	2.26

Korr. $= a + b \cdot e_2 \sin w_2 + c \cdot e_2 \cos w_2$ Korr. Newcomb Ob. du_1 +0°.615 ±0°.075 Zahl der Mess. 15 p, 15 s

" " Ti. du_2 +1.402 ±0.102 w. F. einer Gl. ±0″.203

Oberon—Titania.

Lickrefraktor 36 Z. Yerkesrefraktor 40 Z. 1906/1907. Beob.: Aitken, Barnard.

Beobachtung — Rechnung.

	Mt. Ham. Sternzeit	Red. Mittl. Zt. Greenw.	p	s	O $x_1 - x_2$	C $x_1 - x_2$	O − C $\frac{d(x_1-x_2)}{n}$	O $y_1 - y_2$	C $y_1 - y_2$	O − C $\frac{d(y_1-y_2)}{n}$	Zahl der Einst. p	s	Beob.
1906 Juni 14	$19^h\ 5^m.9$	$19^h\ 8^m.4$	333°.05	13″.93	− 9″.58	− 9″.47	−0″.11	−10″.12	−10″.30	+0″.18	8	8	A.
22	17 22.1	16 53.5	115.01	55.08	+ 4.75	+ 4.92	−0.17	+54.88	+55.17	−0.29	8	8	"
Juli 12	17 50.4	16 3.0	272.95	22.70	+ 7.12	+ 7.10	+0.02	−21.56	−21.48	−0.08	8	8	"
21	18 45.5	16 22.1	196.24	75.25	+74.90	+75.36	−0.46	+ 7.21	+ 6.93	+0.28	8	8	"
Aug. 8	18 19.0	14 43.5	277.25	40.07	+10.63	+10.68	−0.05	−38.64	−38.62	−0.02	8	8	"
1907 Juli 9	19 28.4	17 53.1	325.52	45.26	−28.90	−29.14	+0.24	−34.78	−34.63	−0.15	8	8	"
26	19 25.1	16 42.4	11.74	75.82	−75.56	−75.60	+0.04	− 6.05	− 5.93	−0.12	8	8	"
31	19 17.8	16 15.2	176.84	63.46	+59.21	+59.78	−0.57	+21.30	+21.28	+0.02	8	8	"
	Central Standard T.												
1907 Aug. 11	9 7.8	12 32.5	28.79	29.16	−28.50	−28.36	−0.14	+ 6.03	+ 6.12	−0.09	5	8	B.
13	9 26.0	12 50.6	87.23	41.36	−13.92	−13.45	−0.47	+38.92	+39.30	−0.38	5	8 :	"
Okt. 4	6 46.5	10 4.5	47.79	57.24	−49.36	−49.82	+0.46	+28.96	+29.92	−0.96	5	8	"
6	7 12.1	10 29.8	117.68	62.14	+11.13	+10.94	+0.19	+61.11	+61.29	−0.18	6	10 :	"
8	7 38.8	10 56.2	184.24	71.85	+69.98	+69.63	+0.35	+16.26	+16.15	+0.11	5	8	
13	6 44.9	10 1.6	348.51	60.46	−53.04	−53.20	+0.16	−29.02	−29.11	+0.09	5	10	"

Bedingungsgleichungen.

Koeffizienten in $d(x_1 - x_2)$.

			Oberon				Titania			Übrigbl. Fehler v	Beob.
			du_1	$e_1 \sin w_1$	$e_1 \cos w_1$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	$-du_2$	$-e_2 \sin w_2$	$-e_2 \cos w_2$		
1906	Juni	14	−43″6	+75″7	−43″6	− 9″5	−32″4	+60″0	−25″2	−0″11	A.
		22	+34.9	+54.1	−51.5	+ 4.9	−24.6	+53.0	− 8.9	+0.03	"
	Juli	12	−37.8	+58.5	−52.7	+ 7.1	−14.8	+28.6	−30.2	0.00	"
		21	− 0.8	+38.8	−20.1	+75.4	− 8.2	+26.8	−23.5	−0.17	"
	Aug.	8	−37.6	+57.3	−53.2	+10.7	+ 3.6	+30.4	−12.8	−0.10	"
1907	Juli	9	−43.7	+81.0	−32.7	−29.1	− 5.5	+33.0	− 8.7	+0.11	"
		26	− 0.8	+39.4	−18.7	−75.6	+ 5.6	+28.3	−18.9	−0.19	"
		31	+32.3	+52.4	−47.6	+59.8	+ 8.9	+35.3	− 6.7	−0.30	"
1907	Aug.	11	+38.1	+77.3	−15.8	−28.5	+31.3	+53.7	−33.3	−0.14	B.
		13	+39.0	+64.0	−48.2	−13.9	− 4.1	+31.5	−10.1	−0.33	"
	Okt.	4	+36.7	+74.2	−16.2	−49.3	+ 4.1	+26.8	−17.1	+0.46	"
		6	+37.0	+60.4	−46.7	+11.1	−30.0	+57.4	−18.9	+0.43	"
		8	+ 6.8	+35.6	−24.1	+70.0	−10.9	+27.1	−23.9	+0.64	"
		13	−34.4	+55.3	−46.7	−53.1	− 2.5	+29.1	−10.8	−0.06	"

Bedingungsgleichungen.

Koeffizienten in $d(y_1 - y_2)$.

			Oberon				Titania			Übrigbl. Fehler v	Beob.
			du_1	$e_1 \sin w_1$	$e_1 \cos w_1$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	$-du_2$	$-e_2 \sin w_2$	$-e_2 \cos w_2$		
1906	Juni	14	+ 4″5	+14″6	+38″7	−10″3	− 4″3	+17″7	+25″7	+0″22	A.
		22	−24.8	+ 7.9	+58.6	+55.2	−20.2	+33.4	+32.1	−0.07	"
	Juli	12	+20.7	+ 8.4	+53.7	−21.5	+27.3	+14.9	+54.3	−0.12	"
		21	−40.8	+39.5	+71.5	+ 6.9	+29.6	+21.6	+55.6	+0.21	"
	Aug.	8	+20.2	+ 9.3	+52.8	−38.6	+30.2	+32.3	+51.2	−0.12	"
1907	Juli	9	− 2.6	+18.4	+35.2	−34.6	−29.1	+28.1	+51.3	−0.15	"
		26	+39.5	+32.0	+72.3	− 5.9	−29.2	+19.5	+55.2	+0.12	"
		31	−26.5	+ 5.9	+60.3	+21.3	+28.4	+30.7	+48.5	−0.01	"
1907	Aug.	11	+18.7	+35.2	+36.9	+ 6.0	− 7.2	+ 6.8	+31.3	+0.07	B.
		13	−16.9	+ 5.8	+48.8	+38.9	−29.2	+27.9	+51.5	−0.17	"
	Okt.	4	+17.5	+33.6	+35.0	+29.0	−28.1	+20.6	+52.4	−0.70	"
		6	−16.9	+ 5.6	+47.4	+61.1	− 6.9	+18.8	+24.3	+0.04	"
		8	−37.2	+26.1	+70.0	+16.3	+26.4	+14.1	+51.9	+0.08	"
		13	+20.6	+ 5.1	+51.5	−29.0	−28.0	+25.8	+49.8	+0.17	"

Anmerkung. Den Gleichungen wurde durchweg gleiches Gewicht gegeben, obwohl die Messungen am Lickrefraktor in diesem Fall etwas genauer sind.

Normalgleichungen.

	du_1	$e_1 \sin w_1$	$e_1 \cos w_1$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	$-du_2$	$-e_2 \sin w_2$	$-e_2 \cos w_2$	n
du_1	24275	+920	− 2062	−3514	−1360	+ 1153	− 893	− 53.02
$e_1 \sin w_1$		57793	−17427	−3876	−5103	+36520	− 3019	− 51.21
$e_1 \cos w_1$			62651	+4854	+4309	− 3304	+42559	− 24.09
$\frac{d\Delta}{\Delta}$				41440	−4230	+ 1121	+ 2240	−135.06
$-du_2$					12825	− 5086	+ 96	+ 53.74
$-e_2 \sin w_2$						29234	+ 4867	− 63.72
$-e_2 \cos w_2$							35882	− 70.70

Auflösung Oberon—Titania 1906, 1907.

Lickrefraktor: Aitken. Yerkesrefraktor: Barnard.

Mittlere Epoche 1907.26. Ob. $\delta u_1 = +0°695$ Ti. $\delta u_2 = +1°663$

Titania-Kreisbahn

		lg a	lg b	lg c			a	w. F.		
Ob.	$\sin du_1$	7.4011n	8.5323	7.5971	Ob.	du_1	−0°144	±0°071	(nn)	2.64
"	$e_1 \sin w_1$	7.0139n	9.8218	9.1774	"	$e_1 \sin w_1$	−0.00103	±0.00083		
"	$e_1 \cos w_1$	6.8390n	9.1428	9.8677	"	$e_1 \cos w_1$	−0.00069	±0.00081	$(vv)_x$	1.13
	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	7.5071n	8.7769	8.5748n		$\frac{d\Delta}{\Delta}$	−0.00321	±0.00098	$(vv)_y$	0.72
Ti.	$\sin du_2$	7.4289n	9.1928n	9.2842n	Ti.	du_2	−0°154	±0°102	(vv)	1.85

Korr. $= a + b \cdot e_2 \sin w_2 + c \cdot e_2 \sin w_2$

Korr. Newcomb	Ob. du_1	+0°551	±0°071	Zahl der Mess. 14 p, 14 s
" "	Ti. du_2	+1.509	±0.102	w. F. einer Gl. ±0″191

Oberon—Titania.

Washington-Refraktor 36 Z. 1907. Beob.: Frederickson.

Beobachtung — Rechnung.

		Mittl. Zeit Wash.	Red. Mittl. Zeit Greenw.	p	s	O $x_1 - x_2$	C $x_1 - x_2$	O − C $d(x_1 - x_2)$ n	O $y_1 - y_2$	C $y_1 - y_2$	O − C $d(y_1 - y_2)$ n	Zahl der Einst. p	s
1907 Mai	11	15^h 1^m9	17^h 33^m7	128°88	63″06	+27″31	+27″97	−0″66	+56″84	+57″83	−0″99	8	8
	12	14 57.8	17 29.7	162.36	70 91	+60.86	+60.89	−0.03	+36.40	+36″42	−0.02	8	8
	13	14 45.4	17 17.5	192.10	75.37	+75.36	+74.80	+0.56	+ 1.54	+ 1.45	+0.09	8	8
	14	14 41.9	17 14.1	221.81	72.73	+63.90	+63.92	−0.02	−34.72	−35.04	+0.32	8	8
	20	14 43.1	17 15.8	58.60	49.32	−34.78	−35.55	+0.77	+34.96	+34.72	+0 24	8	8
	21	14 33.9	17 6.8	90.96	40.47	− 8.77	− 8.74	−0.03	+39.51	+40.01	−0.50	8	8:
Juni	6	13 5.7	15 39.8	107.46	67.36	+ 4.06	+ 4.94	−0.88	+67.24	+66.88	+0.36	8	8
	8	12 39.7	15 13.9	175.55	75.34	+71.44	+70.94	+0.50	+23.94	+24.24	−0.30	8	8:
	15	12 23.8	14 58.4	39.13	43.20	−39.23	−39.81	+0.58	+18.09	+17.14	+0.95	8	8
	16	12 21.2	14 55.8	68.12	33.79	−20.00	−20.39	+0.39	+27.24	+26.90	+0.34	8	8
	17	13 35.4	16 10.0	100.09	24.44	− 1.86	− 2.36	+0.50	+24.36	+24.64	−0.28	8	8
	19	13 51.7	16 26.4	132.72	10.62	+ 5.01	+ 5.59	−0.58	+ 9.36	+10.27	−0.91	8	8:
	30	12 12.3	14 47.2	24.12	72.84	−71.93	−72.90	+0.97	+11.50	+11.19	+0.31	8	8
Juli	3	11 1.8	13 36.7	123.49	69.11	+21.72	+22.06	−0.34	+65.60	+65.60	0.00	8	8
	4	12 26.8	15 1.7	160.02	71.08	+58.08	+58.24	−0.16	+40.96	+41.42	−0.46	8	8
	14	11 42.6	14 17.3	63.03	11.02	− 7.47	− 7.18	−0.29	+ 8.11	+ 8.29	−0.18	8	8

	Mittl. Zeit Wash.	Red. Mittl. Zeit Greenw.	p	s	O x_1-x_2	C x_1-x_2	O — C $d(x_1-x_2)$ n	O y_1-y_2	C y_1-y_2	O — C $d(y_1-y_2)$ n	Zahl der Einst. p	s
1907 Juli 16	$11^h\,10^m.2$	$13^h\,44^m.9$	57°.74	18″.14	−13″.49	−13″.22	−0″.27	+12″.13	+12″.09	+0″.04	8	8
27	9 0.9	11 35.1	35.76	75.06	−70.74	−71.01	+0.27	+25.06	+24.88	+0.18	8	8
30	9 15.1	11 49.1	139.24	64.60	+35.04	+35.10	−0.06	+54.25	+55.02	−0.77	8	8
31	8 56.4	11 30.3	171.34	64.35	+58.28	+58.22	+0.06	+27.28	+27.71	−0.43	8	8
Aug. 7	11 15.0	13 48.4	9.03	14.32	−14.19	−14.63	+0.44	− 1.91	− 1.99	+0.08	8	8
11	9 7.2	11 40.2	28.76	28.81	−28.18	−28.20	+0.02	+ 5.95	+ 5.62	+0.33	8	8
12	8 51.0	11 24.0	53.17	35.25	−28.41	−28.12	−0.29	+20.87	+21.82	−0.95	8	8

Bedingungsgleichungen.

Koeffizienten in $d(x_1-x_2)$.

	Oberon				Titania			Übrigbl. Fehler
	du_1	$e_1 \sin w_1$	$e_1 \cos w_1$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	$-du_2$	$-e_2 \sin w_2$	$-e_2 \cos w_2$	v
1907 Mai 11	+33″.0	+55″.1	−45″.4	+27″.3	−32″.1	+59″.1	−24″.8	−0″.67
12	+17.1	+40.1	−33.5	+60.8	−23.8	+39.9	−33.6	+0.10
13	− 2.2	+40.6	−14.3	+75.3	− 3.8	+28.7	−15.9	+0.81
14	−21.2	+56.5	− 3.3	+63.9	+18.2	+44.9	− 2.3	+0.26
20	+ 7.5	+43.8	−10.2	−34.7	−31.5	+55.6	−30.3	+0.47
21	+25.7	+61.9	− 3.3	− 8.8	−19.2	+34.5	−31.0	−0.19
Juni 6	+42.5	+74.8	−41.4	+ 4.1	−32.3	+61.1	−21.0	−1.00
8	+18.2	+40.7	−35.2	+71.4	− 8.9	+28.9	−21.5	+0.74
15	−13.5	+39.0	−30.5	−39.3	−32.6	+59.3	−27.2	+0.27
16	+ 6.6	+43.6	−11.6	−20.0	−23.4	+39.0	−34.4	+0.19
17	+26.1	+62.8	− 4.1	− 1.9	− 1.3	+29.6	−14.1	+0.46
19	+43.6	+80.2	−34.7	+ 5.0	+32.3	+61.3	−20.7	−0.37
30	+16.7	+52.1	− 5.9	−71.9	+ 4.3	+28.8	−17.2	+0.70
Juli 3	+42.9	+75.3	−42.1	+21.7	−29.8	+49.9	−35.3	−0.39
4	+33.7	+55.3	−47.7	+58.1	−12.2	+29.6	−25.3	+0.05
14	+25.5	+62.0	− 4.9	− 7.5	+16.4	+43.1	− 3.7	−0.25
16	+43.7	+80.2	−34.7	−13.5	+30.3	+50.9	−35.1	−0.14
27	+14.9	+50.0	− 7.4	−70.7	−12.5	+38.8	− 4.9	−0.08
30	+42.8	+74.7	−42.5	+35.1	−17.7	+32.2	−31.0	+0.02
31	+34.8	+56.4	−48.6	+58.2	+ 4.4	+31.9	− 9.8	+0.36
Aug. 7	−29.9	+49.1	−46.4	−14.2	−27.8	+45.1	−36.5	+0.25
11	+37.7	+76.8	−15.2	−28.2	+31.5	+54.4	−32.7	+0.08
12	+43.2	+79.2	−34.4	−28.4	+19.2	+33.2	−32.4	−0.28

Koeffizienten in $d(y_1-y_2)$.

	Oberon				Titania			Übrigbl. Fehler
	du_1	$e_1 \sin w_1$	$e_1 \cos w_1$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	$-du_2$	$-e_2 \sin w_2$	$-e_2 \cos w_2$	v
1907 Mai 11	−24″.4	+ 3″.1	+56″.9	+56″.8	+ 0″.5	+10″.4	+26″.5	−0″.88
12	−35.0	+13.8	+70.3	+36.4	+19.1	+ 2.6	+43.6	+0.07
13	−38.2	+30.8	+69.9	+ 1.5	+28.4	+18.4	+53.8	+0.10

			Oberon				Titania			Übrigbl. Fehler
			du_1	$e_1 \sin w_1$	$e_1 \cos w_1$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	$-du_2$	$-e_2 \sin w_2$	$-e_2 \cos w_2$	v
1907	Mai	14	−33″.3	+40″.7	+55″.9	−34″.7	+23″.6	+30″.6	+39″.4	+0″.18
		20	+37.8	+35.0	+67.4	+35.0	+6.2	+5.9	+30.1	+0.30
		21	+30.9	+41.2	+51.4	+39.5	+23.1	+5.4	+49.0	−0.32
	Juni	6	−8.3	+8.3	+40.6	+67.2	−3.9	+15.1	+25.8	+0.51
		8	−35.4	+14.1	+71.3	+23.9	+28.0	+14.8	+54.7	−0.21
		15	+37.2	+18.7	+73.1	+18.1	+1.5	+10.1	+27.6	−0.94
		16	+38.7	+35.8	+69.0	+27.2	+20.4	+3.6	+45.8	+0.45
		17	+31.4	+42.6	+51.8	+24.4	+29.3	+22.0	+54.3	−0.12
		19	−0.3	+15.2	+36.2	+9.4	+4.7	+16.1	+25.8	−0.91
		30	+36.5	+42.0	+61.5	+11.5	−29.2	+19 9	+55.1	+0.10
	Juli	3	−7.7	+9.5	+40.6	+65.6	+12.2	+3.7	+36.1	+0.23
		4	−25.1	+4.5	+58.6	+40.9	+27.4	+12.8	+54.4	−0.27
		14	+32.1	+43.8	+52.3	+8.1	+25.6	+32.8	+42.0	−0.10
		16	+1.0	+17.0	+35.7	+12.1	−11.0	+4.4	+34.9	−0.04
		27	+37.1	+42.4	+62.6	+25.1	−27.3	+32.2	+45.6	+0.03
		30	−7.1	+10.6	+40.1	+54.2	+24.8	+8.6	+51.4	−0.52
		31	−23.7	+5.0	+56.7	+27.3	+29.3	+27.9	+51.7	−0.27
	Aug.	7	+28.5	+7.2	+62.8	−1.9	+15.2	+3.8	+39.4	+0.07
		11	+19.3	+35.7	+37.2	+5.9	−6.4	+7.3	+30.7	+0.24
		12	+2.0	+18.4	+35.0	+20.8	−23.7	+7.6	+49.9	−1.06

Normalgleichungen.

	du_1	$e_1 \sin w_1$	$e_1 \cos w_1$	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	$-du_2$	$-e_2 \sin w_2$	$-e_2 \cos w_2$	n
du_1	38980	+41206	−9898	+4728	−3710	+22151	−9195	−10.03
$e_1 \sin w_1$		101222	−6275	+16200	−991	+67115	−9053	−16.75
$e_1 \cos w_1$			94236	+20245	+19296	−8719	+69362	−36.23
$\frac{d\Delta}{\Delta}$				69781	+3631	+9094	+21512	−239.05
$-du_2$					21931	−3765	+15692	−100.20
$-e_2 \sin w_2$						51224	−9796	−23.87
$-e_2 \cos w_2$							58484	−160.73

Auflösung Oberon—Titania 1907.

Washington-Refraktor. Frederickson.

Mittlere Epoche 1907.48. Ob. $\delta u_1 = +0°.700$ Ti. $\delta u_2 = +1°.674$

Titania-Kreisbahn

		lg a	lg b	lg c			a	w. F.				
Ob.	$\sin du_1$	6.8830n	9.4283	7.4219	Ob.	du_1	−0°.044	±0°.126	(nn)	10.75		
	$e_1 \sin w_1$	6.8909	9.8867	8.8199n	»	$e_1 \sin w_1$	+0.00078	±0.00137				
	$e_1 \cos w_1$	7.1697	8.5622n	9.8379	»	$e_1 \cos w_1$	+0.00148	±0.00120	$(vv)_x$	4.46	$(vv)_{sdp}$	4.81
	$\frac{d\Delta}{\Delta}$	7.5688n	8.0812n	9.0757		$\frac{d\Delta}{\Delta}$	−0.00371	±0.00129	$(vv)_y$	4.92	$(vv)_{ds}$	4.57
Ti.	$\sin du_2$	7.7283	9.1703n	8.9427	Ti.	du_2	+0°.306	±0°.138	(vv)	9.38		

Korr. $= a + b \cdot e_2 \sin w_2 + c \cdot e_2 \cos w_2$ Korr. Newcomb Ob. du_1 +0°.656 ±0°.126 Zahl der Mess. 23 p, 23 s

» » Ti. du_2 +1.980 ±0.138 w. F. einer Gl. ±0″.323

3. Diskussion der älteren Beobachtungsreihen.

Die Beobachtungen von W. Herschel[1], welche sich über den Zeitraum von 1787 bis 1798 erstrecken, sind früher bereits wiederholt zur Vergleichung mit den neueren Beobachtungen herangezogen worden. Dessenungeachtet erschien eine neue Bearbeitung dieser Beobachtungen aus zwei Gründen erwünscht. Einmal sind die Messungen, wie es scheint, früher niemals vollständig, sondern nur mit Auswahl benutzt worden. Zweitens haben die neueren Beobachtungen eine so beträchtliche Verbesserung der mittleren Bewegung von Titania gegenüber den aus den früheren Beobachtungen gefolgerten ergeben, daß der Verdacht, es könnte hier eine reelle Veränderung vorliegen, nicht unbegründet erschien und jedenfalls einer Aufklärung bedurfte.

Herschels Beobachtungen bestanden in Schätzungen des Positionswinkels der Satelliten, welche zum Teil mit Benutzung eines Mikrometerfadens, der während des Durchganges des Planeten durch das Gesichtsfeld der Richtung des Trabanten parallel gestellt wurde, zum Teil sogar ganz ohne Faden gemacht wurden. Es versteht sich danach von selbst, daß sie nur bei der Bestimmung der Längen mitsprechen dürfen.

Im folgenden ist neben der Beobachtungszeit, ausgedrückt in Mittlerer Zeit Slough oder Greenwich M. Z. $-2\overset{m}{.}2$, der beobachtete und der nach Newcombs Tafeln berechnete Positionswinkel, ferner der Differentialquotient $\frac{dp}{du}$ gegeben.

Vergleichung der Beobachtungen von W. Herschel mit Newcombs Tafeln.

Titania—Uranus.

Datum	M. Z. Slough.	O p	C p	O − C dp	$\frac{dp}{du}$	Gew.
1787 Jan. 11	$12^h 13^m$	132°5	127°9	+ 4°6	−1.06	½
18	11 45	180.0	164.2	+15.8	−0.80	½
24	11 23	315.0	311.7	+ 3.3	−1.02	½
Febr. 4	6 21	(190.0)	211.1	(−21.1)	(−0.95)	0
5	9 3	175.0	173.0	+ 2.0	−0.78	½

---

[1] Philosophical Transactions 1815.

Datum			M. Z. Slough.	O p	C p	O − C dp	$\frac{dp}{du}$	Gew.
1787	Febr.	9	$10^h\ 39^m$	0°0	2°2	− 2°2	−0.78	½
		10	8 57	323.0	331.3	+ 2.3	−0.87	½
		13	10 0	192.5	194.8	− 2.3	−0.84	½
		16	9 38	85.0	73.6	+11.4	−1.26	1
	März	5	7 14	96.0	100.1	− 4.1	−1.23	½
		7	7 12	8.0	10.6	− 2.6	−0.82	½
		15	8 7	42.0	35.3	+ 6.7	−0.99	½
		18	8 3	275.5	281.3	− 5.8	−1.22	1
	Sept.	19	15 55	185.0	177.9	+ 7.1	−0.71	½
	Okt.	11	16 49	348.0	349.9	− 1.9	−0.73	½
		14	15 59	221.6	213.5	+ 8.1	−0.92	1
		20	15 36	342.0	342.3	− 0.3	−0.77	1
1789	Febr.	22	9 48	190.0	196.1	− 6.1	−0.73	½
	März	13	9 1	150.0	148.8	+ 1.2	−0.91	½
		14	9 22	98.0	98.7	− 0.7	−1.44	½
		16	7 33	7.0	11.9	− 4.9	−0.71	½
	Dez.	15	10 54	199.0	195.5	+ 3.5	−0.62	½
		16	10 12	173.5	171.6	+ 1.9	−0.64	1
1790	März	3	7 58	(230.0)	209.5	(+20.5)	(−0.81)	0
		8	8 39	4.9	9.9	− 5.0	−0.63	1
1791	Febr.	2	8 23	20.0	7.3	+12.7	−0.54	½
		5	11 5	(250.0)	222.0	(+28.0)	(−0.99)	0
		23	7 59	213.5	206.5	+ 7.0	0.70	1
	März	5	7 56	(195.0)	175.2	(+19.8)	(−0.60)	0
		9	9 52	3.6	1.5	+ 2.1	−0.56	1
	April	4	8 43	5.1	5.2	− 0.1	−0.56	1
1792	Febr.	12	8 28	358.3	355.2	+ 3.1	−0.55	1
		20	12 57	0.0	5.8	− 5.8	−0.47	1
		21	9 10	343.9	346.7	− 2.8	−0.68	1
		26	11 30	132.8	135.4	− 2.6	−1.50	1
		28	10 52	20.3	22.2	− 1.9	−0.58	1
	März	18	8 19	352.6	350.3	+ 2.3	−0.62	1
		19	8 20	308.1	308.1	0.0	−1.64	1
		27	11 6	350.0	338.0	+12.0	−0.88	½
1793	Febr.	7	9 38	190.4	183.2	+ 7.2	−0.42	1
	März	8	11 21	25.0	29.2	− 4.2	−0.64	½
		9	10 35	5.0	10.0	− 5.0	−0.41	½
	April	3	10 53	40.5	33.7	+ 6.3	−0.76	½
1794	Febr.	21	8 24	2.0	1.7	+ 0.3	−0.39	½
		26	8 28	160.9	167.2	− 6.3	−0.78	1
		28	9 43	27.1	26.7	+ 0.4	−0.53	1
	März	5	11 10	194.2	194.8	− 0.6	−0.34	1
		26	9 2	28.1	35.4	− 7.3	−0.61	1
		27	10 25	14.0	12.0	+ 2.0	−0.34	1
		28	9 12	358.5	357.1	+ 1.4	−0.48	1
	April	1	9 14	187.0	183.3	+ 3.7	−0.38	1

Oberon—Uranus.

Datum	M. Z. Slough.	O p	C p	O – C dp	$\frac{dp}{du}$	Gew.
1787 Jan. 11	12ʰ 13ᵐ	(315°0)	338°9	(−23°9)	(−0.82)	0
18	11 45	(135.0)	153.2	(−18.2)	(−0.85)	0
24	11 23	350.0	349.2	+ 0.8	−0.78	½
Febr. 4	6 21	60.0	52.3	+ 7.7	−1.13	½
7	6 54	335.0	341.6	− 6.6	−0.81	½
10	8 33	250.0	252.9	− 2.9	−1.26	½
13	10 0	175.0	174.2	+ 0.8	−0.78	½
16	9 38	93.0	96.3	− 3.3	−1.27	½
März 5	7 17	3.0	0.5	+ 2.5	−0.79	½
7	7 13	(300.0)	315.2	(−15.2)	(−0.98)	0
15	8 7	95.0	95.5	− 0.5	−1.25	½
18	8 3	15.0	9.7	+ 5.3	−0.80	½
Sept. 19	15 55	(120.0)	104.3	(+15.7)	(−1.37)	0
Okt. 11	16 51	230.0	220.9	+ 9.1	−1.01	½
14	16 29	156.0	158.6	− 2.6	−0.80	1
20	16 8	350.2	353.6	− 3.4	−0.71	1
Nov. 9	15 56	177.0	177.5	− 0.5	−0.71	½
1789 Febr. 22	9 48	185.0	186.8	− 1.8	−0.69	½
März 13	7 47	45.0	33.2	+11.8	−0.91	½
14	9 22	20.0	10.8	+ 9.2	−0.71	½
16	7 33	330.0	333.4	− 3.4	−0.85	½
26	10 44	45.0	42.0	+ 3.0	−1.02	½
Dez. 15	10 49	195.0	191.1	+ 3.9	−0.59	½
16	10 12	175.0	175.8	− 0.8	−0.61	½
1790 März 3	8 42	273 5	270.1	+ 3.4	−1.61	1
8	8 39	157.6	151.0	+ 6.6	−0.91	1
April 3	9 39	167.9	169.0	− 1.1	−0.76	1
1791 Jan. 31	11 5	344.5	351.0	− 6.6	−0.63	1
Febr. 4	8 13	(229.2:)	218.0	(+11.2:)	(−0.91)	0
5	10 45	205.0	197.0	+ 8.0	−0.58	½
22	7 30	126.3	127.9	− 0.4	−1.48	1
März 5	7 56	185.0	182.7	+ 2.3	−0.55	½
Dez. 19	11 45	15.0	8.7	+ 6.3	−0.45	½
1792 Jan. 27	11 58	(50.0:)	28.0	(+22.0:)	(−0.66)	0
Febr. 12	8 28	358.3	355.2	+ 3.1	−0.55	1
20	13 8	143.4	142.6	+ 0.8	−1.30	1
26	8 2	343.8	346.2	− 2.4	−0.69	1
März 15	10 3	196.6	196.1	+ 0.5	−0.52	1
18	8 37	150.3	145.5	+ 4.8	−1.19	1
23	8 21	359.4	360.0	− 0.6	−0.52	1
1793 Febr. 7	9 20	30.1	27.5	+ 2.6	−0.59	1
März 8	11 21	0.0	1.9	− 1.9	−0.44	½
9	10 35	352.0	348.0	+ 4.0	−0.68	½
April 3	10 53	10.0	12.2	− 2.2	−0.43	½
1794 Febr. 21	8 24	4.0	6.3	− 2.3	−0.34	½

Datum	M. Z. Slough.	O p	C p	O – C dp	$\frac{dp}{du}$	Gew.
1794 Febr. 26	$8^h\ 7^m$	203°1	202°4	+ 0°7	−0.43	1
28	9 26	183.3	183.3	0.0	−0.37	1
März 4	11 22	28.5	30.9	− 2.4	−0.65	1
5	10 57	17.6	18.3	− 0.7	−0.37	1
21	10 53	358.1	351.8	+ 6.3	−0.62	1
22	8 47	331.8	328.0	+ 3.8	−1.56	1
26	8 48	193.0	191.8	+ 1.2	−0.34	1
27	10 12	178.6	181.6	− 3.0	−0.41	1
28	9 1	172.1	168.2	+ 3.9	−0.72	1
April 1	9 23	19.6	18.5	+ 1.1	−0.39	1

Denjenigen Beobachtungen, die nur auf beiläufigen Richtungsschätzungen beruhen, ist halbes Gewicht, den mit Mikrometerfaden angestellten oder als genauer bezeichneten das Gewicht 1 beigelegt. Als unsicher bezeichnete Beobachtungen, oder solche, bei welchen die Abweichungen besonders groß sind, sind ausgeschlossen; endlich sind ein paar Beobachtungen, die in den Jahren 1796 und 1798 bei geringer Bahnöffnung erhalten sind und sich daher für die Bestimmung von u nicht eignen, fortgelassen. Die Auflösung der Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate führt alsdann zu folgenden Korrektionen der Newcombschen Tafeln:

für Titania — für Oberon

1. $du = -0\overset{\circ}{.}56$ w. F. $\pm 0\overset{\circ}{.}84$ — $du = -1\overset{\circ}{.}19$ w. F. $\pm 0\overset{\circ}{.}51$,

wenn nur die genaueren Beobachtungen mit Gewicht 1 berücksichtigt werden,

2. $du = -1\overset{\circ}{.}13$ w. F. $\pm 0\overset{\circ}{.}64$ — $du = -1\overset{\circ}{.}54$ w. F. $\pm 0\overset{\circ}{.}44$,

wenn alle Beobachtungen mitgenommen werden.

In den Jahren 1828—1832 hat Sir John Herschel[1] den Beobachtungen seines Vaters einige weitere hinzugefügt, die in der nämlichen Weise und mit den nämlichen primitiven Hilfsmitteln erlangt wurden und zur Ableitung der mittleren Bewegungen benutzt worden sind. Da diese Beobachtungen an Zahl viel geringer sind, dabei ebenso große Sprünge zeigen, wie die früheren von W. Herschel, so erscheint eine nochmalige Reduktion derselben zwecklos.

1837 gelang es Lamont[2] Titania und Oberon an 7 Tagen am $10\frac{1}{2}$zölligen Münchener Refraktor zu beobachten. Die erlangten Messungen von p, welche v. Asten diskutiert hat, zeigen eine befriedigende Übereinstimmung, lassen jedoch keinen Schluß auf die Längen der Trabanten zu, weil sie bei geringer Bahnöffnung ausgeführt sind.

---

[1] On the satellites of Uranus. Memoires of the Royal Astr. Soc., Vol. VIII.

[2] Memoires of the Royal Astr. Soc., Vol. XI.

Die erste größere Beobachtungsreihe der Uranustrabanten, die auf Messungen an einem Filarmikrometer beruht, rührt von O. Struve her und ist in den Jahren 1847—1849 am Pulkowaer 15 zölligen Refraktor angestellt. Eine zweite Beobachtungsreihe am selben Instrument fügte er in den Jahren 1870—1871 hinzu. Beide Beobachtungsreihen sind von v. Asten[1] bearbeitet und mit denen andrer Beobachter verglichen worden. Es stellte sich hierbei heraus, daß die Positionswinkelmessungen von O. Struve bei Oberon und Titania einer nahezu konstanten Korrektion von ungefähr $dp = +1\overset{\circ}{.}8$ bedürfen, um mit den Messungen andrer Beobachter in Einklang gebracht zu werden, welche Korrektion auch durch alle späteren Beobachtungsreihen bestätigt worden ist, und in demselben Sinne und noch größerem Betrage sich auch bei den Messungen von O. Struve am Neptunstrabanten gezeigt hat. Obwohl diese Messungen unter sich eine befriedigende Übereinstimmung zeigen, und die Herschelschen, ungeachtet der geringeren Lichtstärke des Instruments, an Genauigkeit erheblich übertreffen, so lassen sie doch aus dem genannten Grunde eine unabhängige Bestimmung der Längen nicht zu. Für die tropische mittlere tägliche Bewegung der Satelliten leitet v. Asten aus der Vergleichung der beiden mehr als 20 Jahre auseinanderliegenden Beobachtungsreihen unter Voraussetzung von Kreisbahnen die Werte

Titania	Oberon
$n = 41\overset{\circ}{.}351237$	$n = 26\overset{\circ}{.}739408$

ab, welche nur um die geringen Beträge $-0\overset{\circ}{.}000030$ bzw. $-0\overset{\circ}{.}000007$ von den später von Newcomb seinen Tafeln zugrunde gelegten Bewegungen abweichen. Auf Grund dieser Daten ließe sich aus den durch die neueren Beobachtungen bekannt gewordenen Längen der Trabanten für die zweite Beobachtungsreihe ein Schluß auf die Längen für die weiter zurückliegende erste Beobachtungsreihe ziehen, vorausgesetzt, daß die systematische Korrektion der Positionswinkelmessungen von O. Struve im Laufe der Zeit ungeändert geblieben wäre. Da aber diese Annahme bei der großen Zwischenzeit und dem verschiedenen Stande des Planeten zu Ende der vierziger und Anfang der siebziger Jahre zum mindesten sehr problematisch erscheint und außerdem die beiden Beobachtungsreihen den an den stärkeren Instrumenten erlangten Reihen von Lassell, Marth, Newcomb, Hall naheliegen, so sind diese Messungen bei der folgenden Ableitung der mittleren Bewegung ausgeschlossen worden.

---

[1] v. Asten, Memoires de l'Académie St. Pétersbourg, T. XVIII.

Auf die Bestimmung der Lage der Bahnebenen hat der konstante Einstellungsfehler in p, wie man auch aus den von v. Asten aufgestellten Bedingungsgleichungen unmittelbar ersehen kann, einen viel geringeren Einfluß als auf die Längen der Trabanten. Durch Auflösung der Normalgleichungen findet v. Asten für die Koordinaten der Bahnebenen, wenn die Auflösung alle Elemente umfaßt:

Titania	$N = 166^\circ.23 \pm 0^\circ.45$	Oberon	$N = 166^\circ.03 \pm 0.44$
	$J = 75.92 \pm 0.40$		$J = 75.61 \pm 0.47$,

während unter Annahme einer Kreisbahn:

Titania	$N = 166^\circ.15$	Oberon	$N = 166^\circ.40$
	$J = 75.96$		$J = 75.64$

folgt. Diese Werte beziehen sich auf den Äquator 1870 und auf die Epoche, die dem Mittel beider Beobachtungsreihen, beiläufig 1860, entspricht.

Führt man in die Bedingungsgleichungen die konstante Korrektion $dp = +1^\circ.8$ oder im Mittel, in runder Zahl $sdp = +1''$ ein, so zeigt eine überschlägliche Rechnung, daß N etwas kleiner, J dagegen nur wenig verändert ausfallen würde.

Für die Halbachsen der Satelliten findet v. Asten aus der Diskussion der Pulkowaer Messungen unter der Voraussetzung von elliptischen Bahnen die Werte:

für Titania $\Delta = 31''.986 \pm 0''.116$
für Oberon $\Delta = 42.201 \pm 0.149$

gültig für die mittlere Entfernung des Planeten $\rho_0 = 19.212$. Die Voraussetzung von Kreisbahnen bringt keine wesentliche Änderung in den Halbachsen hervor.

Von Lassell sind die Uranustrabanten zuerst 1851 in Starfield (Liverpool) beobachtet worden, sodann 1852 unter sehr viel günstigeren Bedingungen auf der Insel Malta. Eine zweite Beobachtungsreihe auf Malta wurde von Marth am Lassellschen Reflektor in den Jahren 1863—1865 gewonnen.

v. Asten hat diese Messungen a. a. O. mit den aus O. Struves Beobachtungen abgeleiteten Bahnelementen verglichen und die hervorragende Güte der letzten Maltaer Reihe, soweit die Positionswinkelmessungen in Betracht kommen, dargetan. Leider fehlen jedoch in der v. Astenschen Abhandlung die zur Ableitung der Längen notwendigen Angaben.

Im folgenden sind die Positionswinkelmessungen der beiden Maltaer Reihen mit den aus den neueren Beobachtungen folgenden Bahnelementen verglichen, wobei den aus den Newcombschen Tafeln entnommenen Werten von u die auf S. 11 angeführten vorläufigen Verbesserungen δu hinzugefügt sind. Bei beiden Trabanten sind Kreisbahnen, die Bahnebene nach der Hallschen Bestimmung, vorausgesetzt.

Erste Maltaer Beobachtungsreihe von Lassell.

Titania—Uranus. 1852/53.

Datum	M. Z. Gr.	Red. M. Z. Gr.	O p	C p	O − C sdp	$\lg \frac{sdp}{du}$
1852 Okt. 16	$10^h 18^m$	$7^h 42^m$	131° 55′	132° 56′	−0″.50	1.4492*n*
18	11 41	9 5	34 32	33 10	+0.68	1.4488*n*
29	9 18	6 42	317 35	317 5	+0.25	1.4393*n*
30	10 7	7 31	265 8	268 8	−1.30	1.5069*n*
31	9 50	7 14	218 27	218 35	−0.06	1.4590*n*
Nov. 1	9 50	7 14	182 54	181 59	+0.51	1.3960*n*
2	12 17	9 41	146 25	145 45	+0.35	1.4215*n*
3	9 12	6 36	108 46	108 34	+0.09	1.4898*n*
4	9 29	6 53	57 58	55 29	+1.12	1.4877*n*
5	8 46	6 10	17 5	15 11	+1.02	1.4124*n*
6	9 14	6 38	342 14	342 7	+0.07	1.3958*n*
10	9 11	6 35	172 7	173 23	−0 71	1.3894*n*
11	9 31	6 55	138 39	139 8	−0.25	1.4321*n*
12	8 51	6 15	93 51	94 11	−0.14	1.5031*n*
15	8 51	6 15	332 29	332 54	−0.23	1.4048*n*
16	9 0	6 24	291 47	292 0	−0.10	1.4830*n*
18	9 2	6 25	195 45	196 36	−0.45	1.4116*n*
19	8 51	6 14	163 45	164 29	−0.40	1.3893*n*
20	8 47	6 10	129 19	128 35	+0.35	1.4518*n*
Dez. 6	8 5	5 27	178 17	178 18	−0.01	1.3811*n*
7	8 22	5 44	144 29	145 31	−0.53	1.4100*n*
8	8 36	5 58	102 48	101 9	+0.71	1.4919*n*
9	8 38	6 0	50 2	48 8	+0.85	1.4699*n*
13	9 0	6 21	245 21	245 8	+0.09	1.4925*n*
1853 Jan. 7	6 40	3 58	306 43	307 48	−0.50	1.4364*n*

Auflösung.

Epoche 1852.9.

Normalgleichung: $19469 \cdot du = -28.98$

$du = -0^\circ.09 \quad \pm 0^\circ.16$

oder wegen $\delta u = -1^\circ.06$,

die Verbesserung der Newcombschen Tafel

$du = -1^\circ.15 \quad \pm 0^\circ.16$

w. F. einer Gleichung $\pm 0''.39$.

Oberon—Uranus. 1852/53.

Datum		M. Z. Gr.	Red. M. Z. Gr.	O p	C p	O – C sdp	$\lg \frac{sdp}{du}$
1852 Okt.	16	$10^h 10^m$	$7^h 35^m$	305° 17′	306° 39″.3	$-0''.88$	$1.5873n$
	18	11 34	8 58	239 0	239 28.6	−0.29	$1.6189n$
	29	9 10	6 34	321 52	320 6.3	+1.21	$1.5594n$
	30	9 56	7 20	289 10	291 8.5	−1.19	$1.6128n$
	31	9 41	7 5	256 26	257 37.3	−0.69	$1.6331n$
Nov.	1	9 43	7 7	224 39	224 58.9	−0.21	$1.5972n$
	2	12 12	9 36	206 40	196 26.2	+0.16	$1.5414n$
	3	9 2	6 26	178 26	177 47.6	+0.48	$1.5189n$
	4	9 18	6 42	157 19	156 48.5	+0.37	$1.5289n$
	5	8 38	6 2	134 48	133 54.2	+0.60	$1.5706n$
	6	9 6	6 30	104 43	103 38.5	+0.63	$1.6217n$
	10	9 1	6 25	353 50	352 14.8	+1.19	$1.5155n$
	11	9 25	6 49	330 23	330 49.4	−0.31	$1.5359n$
	12	8 43	6 7	306 19	306 37.6	−0.20	$1.5838n$
	15	8 42	6 6	211 50	210 58.0	+0.57	$1.5676n$
	16	8 46	6 10	187 26	187 30.8	−0.06	$1.5237n$
	18	9 3	6 26	145 10	145 4.0	+0.07	$1.5442n$
	19	8 42	6 5	118 59	118 57.2	+0.02	$1.5970n$
	20	8 36	5 59	88 20	85 59.0	+1.33	$1.6318n$
Dez.	6	7 54	5 16	14 22	12 13.3	+1.53	$1.5239n$
	7	8 13	5 35	350 37	351 15.4	−0.47	$1.5048n$
	8	8 24	5 46	328 54	330 14.4	−0.94	$1.5266n$
	9	8 37	5 59	304 2	304 59.4	−0.60	$1.5795n$
	13	8 57	6 18	184 14	185 29.1	−0.91	$1.5109n$
1853 Jan.	7	6 30	3 48	238 8	238 22.5	−0.14	$1.6026n$

Auflösung.

Epoche 1852.9.

Normalgleichung: $34405 \cdot du = -40.44$

$du = -0^\circ.07 \quad \pm 0^\circ.16$

oder wegen $\delta u = -0^\circ.39$,

die Verbesserung der Newcombschen Tafel

$du = -0^\circ.46 \quad \pm 0^\circ.16$

w. F. einer Gleichung $\pm 0''.51$.

Aus den während der ersten Maltaer Reihe gemessenen Distanzen der Trabanten findet man für die Halbachsen:

aus den Messungen von Titania $a = 31''.69$ ±0″.07 24 Mess.
» » » » Oberon $a = 43.17$ ±0.09 23 »

Der zufällige Fehler einer Distanzmessung — im Mittel ±0″.35 — erweist sich sogar etwas geringer als bei den Messungen der Positionswinkel. Die Resultate für *a* sind jedoch erheblich zu groß und lassen — wie das auch andere Beobachtungen von Lassell dargetan haben — sehr beträchtliche systematische Fehler in den Einstellungen der Distanzen vermuten.

Zweite Maltaer Beobachtungsreihe von Marth.

Titania—Uranus. 1863—1865.

Datum	M. Z. Gr.	Red. M. Z. Gr.	O p	C p	O – C sdp	lg $\frac{sdp}{du}$	Zahl der Mess.	Gew.
1863 Dez. 14	$10^{h}34^{m}.4$	$8^{h}\ 4^{m}.1$	71° 6′.6	69° 38′.5	+0″.84	1.5217n	2	½
16	10 38.1	8 7.8	345 38.4	345 50.1	−0.11	1.5189n	2	½
1864 Jan. 22	7 58.9	5 26.9	262 13.2	260 52.7	+0.77	1.5147n	4	1
27	8 4.5	5 32.0	53 10.2	53 48.9	−0.37	1.5162n	2	½
28	7 46.3	5 13.7	12 16.2	12 24.8	−0.08	1.5164n	4	1
29	9 56.0	7 23.3	328 38.4	327 13.4	+0.81	1.5116n	4	1
Febr. 5	6 43.8	4 10.4	45 15.0	43 48.8	+0.81	1.5141n	2	½
6	6 29.3	3 55.7	3 25.2	2 19.4	+0.62	1.5129n	4	1
26	8 36.1	5 59.9	254 16.8	252 25.7	+1.03	1.5039n	4	1
27	8 34.3	5 58.0	210 7.8	210 44.3	−0.34	1.5067n	4	1
März 2	7 36.0	4 59.2	49 31.2	47 14.4	+1.26	1.5045n	2	½
3	8 25.3	5 48.3	3 20.4	3 54.6	−0.31	1.5036n	2	½
7	7 47.0	5 9.5	200 51.0	199 48.8	+0.57	1.5030n	4	1
8	8 34.4	5 56.8	157 17.4	156 49.6	+0.26	1.4989n	2	½
10	7 9.0	4 31.0	77 15.6	77 25.0	−0.09	1.4985n	4	1
Sept. 17	15 48.5	13 10.0	88 10.2	87 55.8	+0.13	1.4968n	3	½
30	14 53.4	12 16.8	269 45.0	272 0.9	−1.23	1.5008n	2	½
Okt. 1	15 27.1	12 50.6	228 39.6	228 17.1	+0.20	1.5058n	4	1
5	15 28.9	12 53.0	63 50.4	63 23.1	+0.25	1.5078n	4	1
18	14 34.6	12 0.4	247 21.0	247 27.9	−0.06	1.5124n	6	1
22	14 20.0	11 46.3	82 36.0	82 54.9	−0.17	1.5113n	4	1
31	13 42.4	11 9.8	71 19.2	71 24.0	−0.04	1.5162n	4	1
Nov. 1	13 38.0	11 5.5	29 3.0	28 45.3	+0.16	1.5139n	6	1
7	13 22.7	10 50.8	143 23.4	142 6.1	+0.74	1.5033n	4	1
8	13 21.9	10 50.1	102 16.8	101 37.8	+0.37	1.5117n	4	1
9	13 15.0	10 43.3	59 1.2	59 29.7	−0.26	1.5197n	6	1
14	12 44.1	10 12.8	212 28.2	212 43.0	−0.14	1.5186n	6	1
23	12 1.3	9 30.7	201 22.2	201 29.3	−0.07	1.5182n	2	½

Datum	M. Z. Gr.	Red. M. Z. Gr.	O p	C p	O – C sdp	lg $\frac{sdp}{du}$	Zahl der Mess.	Gew.
1864 Dez. 9	$13^{h}22^{m}.6$	$10^{h}52^{m}.7$	259° 23'.4	258° 54'.3	+0".28	1.5226n	4	1
10	10 56.5	8 26.7	221 20.4	220 36.7	+0.41	1.5244n	8	1
12	10 48.0	8 18.2	138 39.6	138 41.5	–0.02	1.5113n	8	1
16	10 28.1	7 58.3	331 55.2	333 19.3	–0.82	1.5120n	6	1
17	11 32.9	9 3.2	291 37.8	291 12.9	+0.24	1.5157n	6	1
31	12 44.0	10 14.1	70 0.6	69 44.1	+0.16	1.5238n	4	1
1865 Jan. 5	11 33.0	9 2.9	225 3.6	224 16.3	+0.45	1.5242n	2	½
13	8 5.8	5 35.3	260 27.0	260 11.0	+0.15	1.5202n	6	1
14	8 43.7	6 13.1	216 34.8	216 43.4	–0.08	1.5223n	4	1
18	11 38.5	9 7.7	46 31.2	46 30.6	+0.01	1.5221n	4	1
21	11 19.3	8 48.2	284 33.0	283 46.3	+0.45	1.5137n	4	1
26	7 52.6	5 21.1	82 30.0	82 53.9	–0.23	1.5167n	6	1
28	10 20.4	7 48.7	355 4.2	354 30.0	+0.33	1.5124n	6	1
30	10 16.9	7 45.0	274 15.6	273 20.9	+0.52	1.5135n	4	1
Febr. 13	8 49.9	6 16.5	58 2.4	56 19.5	+0.96	1.5145n	3	½
16	6 45.8	4 12.0	295 52.2	296 6.1	–0.13	1.5043n	4	1
März 1	8 47.8	6 12.3	114 21.0	115 3.3	–0.40	1.4998n	4	1
20	7 55.4	5 17.3	51 46.2	50 35.2	+0.64	1.5016n	4	1

Auflösung.

Epoche 1864.7.
Normalgleichung: $42350 \cdot du = -231.98$
$du = -0°.314 \quad \pm 0°.079$
oder wegen $\delta u = -0°.465$,
die Verbesserung der Newcombschen Tafel
$du = -0°.779 \quad \pm 0°.079$
w. F. einer Gleichung $\pm 0''.284$.

Oberon—Uranus. 1863—1865.

Datum	M. Z. Gr.	Red. M. Z. Gr.	O p	C p	O – C sdp	lg $\frac{sdp}{du}$	Zahl der Mess.	Gew.
1863 Dez. 14	$10^{h}38^{m}.5$	$8^{h}\ 8^{m}.2$	41° 8'.4	41° 22'.8	–0".18	1.6499n	2	½
16	10 37.2	8 6.9	347 27.6	347 19.4	+0.11	1.6454n	2	½
1864 Jan. 22	7 58.6	5 26.6	82 3.6	81 23.0	+0.52	1.6408n	4	1
27	8 4.6	5 32.1	307 26.4	306 59.5	+0.34	1.6370n	2	½
28	7 46.6	5 14.0	281 35.4	280 57.8	+0.48	1.6373n	4	1
29	10 2.7	7 30.0	253 8.4	251 50.0	+0.99	1.6400n	6	1
Febr. 5	6 49.9	4 16.5	66 48.6	68 12.0	–1.05	1.6382n	2	½
6	6 28.7	3 55.1	41 12.0	41 35.4	–0.29	1.6401n	4	1
26	8 35.6	5 59.4	226 7.2	224 29.2	+1.21	1.6327n	4	1
27	8 33.3	5 57.0	196 48.6	197 25.1	–0.45	1.6327n	4	1

Datum	M. Z. Gr.	Red. M. Z. Gr.	O p	C p	O − C sdp	lg $\frac{sdp}{du}$	Zahl der Mess.	Gew.
1864 März 2	$7^h 26^m.6$	$4^h 49^m.8$	$93^\circ\ 2'.4$	$92^\circ\ 11'.0$	$+0''.64$	1.6263n	3	½
3	8 17.5	5 40.5	65 5.4	64 34.7	+0.38	1.6288n	2	½
7	7 51.8	5 14.3	318 16.8	317 27.4	+0.61	1.6238n	4	1
8	8 26.2	5 48.6	291 22.2	290 27.2	+0.68	1.6228n	2	½
10	7 9.6	4 31.6	239 48.6	238 39.6	+0.84	1.6268n	5	1
Sept. 17	15 50.4	13 11.9	163 48.6	163 48.1	+0.01	1.6114n	3	½
30	15 20.3	12 43.7	178 3.6	176 24.2	+1.23	1.6190n	2	½
Okt. 1	15 29.5	12 53.0	151 48.6	150 20.8	+1.10	1.6155n	4	1
5	15 27.1	12 51.2	42 34.8	42 56.3	−0.26	1.6330n	4	1
18	14 34.9	12 0.7	56 59.4	56 45.9	+0.16	1.6390n	6	1
22	14 19.2	11 45.5	311 8.4	310 44.7	+0.30	1.6252n	4	1
31	13 42.9	11 10.3	69 53.4	70 31.2	−0.47	1.6425n	4	1
Nov. 1	13 40.6	11 8.1	42 47.4	42 49.5	−0.03	1.6427n	6	1
7	13 22.1	10 50.2	243 54.6	243 24.3	+0.38	1.6453n	4	1
8	13 22.5	10 50.7	216 57.0	215 42.3	+0.93	1.6436n	4	1
9	13 14.2	10 42.5	188 50.4	188 46.6	+0.05	1.6371n	6	1
14	12 45.8	10 14.5	56 49.8	56 35.7	+0.18	1.6473n	6	1
23	11 56.3	9 25.7	175 52.2	175 51.0	+0.02	1.6379n	2	½
Dez. 9	13 23.4	10 53.5	108 6.0	107 56.3	+0.12	1.6422n	4	1
10	10 56.1	8 26.3	83 34.2	83 49.2	−0.19	1.6479n	8	1
12	10 45.3	8 15.5	29 46.2	29 1.3	+0.57	1.6490n	8	1
16	10 24.6	7 54.8	283 1.8	283 57.5	−0.72	1.6434n	6	1
17	11 29.8	9 0.1	255 31.8	255 43.6	−0.15	1.6496n	6	1
31	12 43.0	10 13.1	239 58.2	239 24.4	+0.43	1.6509n	4	1
1865 Jan. 13	8 7.9	5 37.4	257 46.8	257 9.0	+0.48	1.6469n	6	1
14	8 44.0	6 13.4	228 18.6	229 4.4	−0.58	1.6491n	4	1
18	11 37.4	9 6.6	118 30.0	119 21.1	−0.66	1.6380n	4	1
21	11 22.3	8 51.2	38 52.2	38 36.8	+0.19	1.6472n	4	1
26	7 53.2	5 21.7	269 57.6	269 46.4	+0.14	1.6415n	6	1
28	10 18.2	7 46.5	212 47.4	212 27.0	+0.26	1.6450n	4	1
30	10 19.7	7 47.8	158 26.4	158 49.6	−0.30	1.6355n	4	1
Febr. 13	9 4.6	6 31.2	146 4.2	146 3.1	+0.01	1.6304n	3	½
16	6 43.5	4 9.7	70 30.6	69 9.3	+1.01	1.6384n	4	1
März 1	8 47.6	6 12.1	79 16.8	79 22.8	−0.07	1.6320n	4	1
20	7 56.4	5 18.3	292 3.0	292 17.3	−0.18	1.6190n	4	1

Auflösung.

Epoche 1864.7.

Normalgleichung: $74590 \cdot du = -329.74$

$du = -0^\circ.253 \quad \pm 0^\circ.070$

oder wegen $\delta u = -0^\circ.156$,

die Verbesserung der Newcombschen Tafel

$du = -0^\circ.409 \quad \pm 0^\circ.070$

w. F. einer Gleichung $\pm 0''.334$.

Während dieser Reihe sind nur einige wenige Distanzmessungen von Marth gemacht worden, die, wie die früheren von Lassell, die Halbachsen erheblich zu groß ergeben.

Auf die Maltaer Beobachtungen folgen, von den schon erwähnten Beobachtungen in Pulkowa und einigen anderen vereinzelten Messungen abgesehen, die nach der Aufstellung des 26 zölligen Refraktors in Washington in den Jahren 1874/1875 von Newcomb, 1875/1876 und 1881—1884 von A. Hall, 1876—1880 von Holden ausgeführten großen Beobachtungsreihen. Die Reihe von Holden, etwa 60 Messungen von Oberon und Titania enthaltend, scheint bisher noch keine Bearbeitung gefunden zu haben; die anderen Reihen sind von den Beobachtern selbst bearbeitet und in den Annalen des Naval Observatory veröffentlicht worden[1].

Wir stellen zunächst die Resultate aus Newcombs Beobachtungen 1874/1875 zusammen.

Mittlere Epoche 1874.5.
Epoche von u: 1871 Dez. 31.0 red. M. Z. Washington.

		Titania		Oberon	
	u	229°93	±0°094	154°97	±0°087
	$e \sin w$	+0.00105	±0.00062	+0.00157	±0.00161
	$e \cos w$	−0.00017	±0.00106	−0.00349	±0.00097
	a	31″46	±0″037	42″17	±0″034
	N	165°15	±0°124	146°91	±0°119
Äquator 1850.0	J	75.06	±0.116	75.21	±0.104
	Zahl der Mess.	29 *p*	34 *s*	29 *p*	31 *s*

Die Annahme einer Kreisbahn bringt in den Elementen von Titania keine merkliche Änderung hervor, während für Oberon bei dieser Annahme:

Oberon
u 154°83 N 165°03
a 42″15 J 75.21

sich ergibt.

Den Tafeln von Newcomb liegen als Mittelwerte die Epochenlängen:

Titania $u = 229°93$
Oberon $u = 154.90$

und für beide Trabanten die gleiche Bahnebene:

---

[1] Newcomb, Washington Observations 1873, App. I: The Uranian and Neptunian Systems. A. Hall, Washington Observations 1881, App. I: The orbits of Oberon and Titania.

$$N = 165^\circ\!.10 + 0^\circ\!.0143\,(T - 1850.0)$$
$$J = 75.14 - 0.0014\,(T - 1850.0)$$

zugrunde. In der Einleitung zu Newcombs Tafeln auf S. 65 a. a. O. ist bei den Angaben von J für verschiedene Epochen ein Versehen im Vorzeichen begangen. Die Tafeln für die Äquatorkonstanten f, F, g, G sind indes mit den richtigen Werten von J gerechnet.

Die mittleren Bewegungen wurden von Newcomb durch Vergleichung mit den Resultaten aus W. Herschels und O. Struves Beobachtungen abgeleitet und sind bereits oben S. 10 angeführt.

Als Ausgangspunkt für die Vergleichung der Beobachtungen von Hall, auf welche sich die weiter unten folgenden Korrektionen beziehen, dienten die Kreisbahnelemente:

Halbachsen: Titania $a = 31''\!.46$
Oberon $a = 42''\!.15$, für $\lg \rho_0 = 1.28310$

Längen und mittlere Bewegungen nach den Tafeln von Newcomb.

Bahnebene: $N = 165^\circ\!.10 + 0^\circ\!.0143\,(T - 1850.0)$
$J = 75.14 + 0.0014\,(T - 1850.0)$

Die Werte von N und J für 1850.0 sind, wie man sieht, die von Newcomb abgeleiteten. Die jährliche Änderung von J ist jedoch hier mit verkehrtem Zeichen angebracht, welches Versehen offenbar auf den obigen Fehler in der Einleitung zu Newcombs Tafeln zurückzuführen ist.

Da N und J für jede einzelne Beobachtungsreihe als konstant angesehen werden können und die Äquatorkonstanten f, F, g, G streng nach den obigen Werten und nicht nach den Newcombschen Tafeln gerechnet sind, so hat das Versehen im Vorzeichen von J keine weitere Bedeutung. Als Ausgangswerte von N, J für die drei Beobachtungsreihen, wie sie auch Hall für die beiden letzten Reihen auf S. 31 seiner Abhandlung richtig angegeben hat, sind demnach die folgenden anzunehmen:

	Erste Reihe	Zweite Reihe	Dritte Reihe
Mittlere Epoche:	1875.7	1881.8	1883.8
N	165°.465	165°.549	165°.580
J	75.176	75.184	75.186

Die Resultate der Hallschen Beobachtungsreihen sind im folgenden zusammengestellt:

Erste Beobachtungsreihe von Hall 1875—1876.

Mittlere Epoche 1875.7.

		Titania		Oberon	
Korr. Newcomb	*du*	+0°.307	±0°.152	−0°.138	±0°.104
	dN	+0.321	±0.184	+0.375	±0.131
	dJ	−0.799	±0.186	−0.398	±0.121
	a	31″.350	±0″.062	42″.088	±0″.058
	$e \sin w$	+0.00100	±0.00116	+0.00140	±0.00079
	$e \cos w$	+0.00045	±0.00210	+0.00430	±0.00142
Zahl der Mess.		27 *p*	27 *s*	26 *p*	25 *s*

Zweite Beobachtungsreihe von Hall 1881—1882.

Mittlere Epoche 1881.8.

		Titania		Oberon	
Korr. Newcomb	*du*	+0°.276	±0°.098	+0°.209	±0°.074
	dN	+0.304	±0.134	+0.138	±0.093
	dJ	+0.105	±0.087	+0.194	±0.059
	a	31″.339	±0″.035	42″.136	±0″.030
	$e \sin w$	+0.00332	±0.00126	+0.00149	±0.00083
	$e \cos w$	−0.00138	±0.00247	+0.00249	±0.00186
Zahl der Mess.		31 *p*	31 *s*	34 *p*	32 *s*

Dritte Beobachtungsreihe von Hall 1883—1884.

Mittlere Epoche 1883.8.

		Titania		Oberon[1]	
Korr. Newcomb	*du*	+0°.283	±0°.087	+0°.170	±0°.074
	dN	+0.409	±0.115	+0.246	±0.093
	dJ	+0.024	±0.072	+0.052	±0.059
	a	31″.439	±0″.031	42″.109	±0″.035
	$e \sin w$	+0.00312	±0.00098	+0.00505	±0.00093
	$e \cos w$	−0.00319	±0.00215	−0.00033	±0.00200
Zahl der Mess.		39 *p*	39 *s*	39 *p*	39 *s*

An diese Beobachtungsreihen, welche bei geringen Bahnöffnungen gemacht sind und daher besonders für die Bestimmung der Bahnebenen in Betracht kommen, schließen sich nach einem Intervall von 10 Jahren die oben diskutierten neueren Reihen 1894—1911 an.

---

[1] Die w. F. der Korrektionen von *u*, *N*, *J* für die dritte Beobachtungsreihe von Oberon sind in der Abhandlung von Hall (a. a. O. S. 30) fehlerhaft angegeben, nämlich fast doppelt so groß, als sie, nach der Zahl und Genauigkeit der Messungen zu schließen, sein dürften. Näherungsweise sind hier die Resultate der zweiten und dritten Reihe für *u*, *N*, *J* als gleich sicher angenommen worden.

4. Zusammenstellung der Längen.

Ableitung der mittleren Bewegungen.

In den folgenden Tabellen sind die Ergebnisse sämtlicher größeren Beobachtungsreihen seit W. Herschel zusammengestellt. Ausgeschlossen ist nur die große Beobachtungsreihe von O. Struve aus dem bereits früher angegebenen Grunde. In der Kolumne Δu ist die Abweichung der Länge u von der zugrunde gelegten Newcombschen Tafel im Sinne »Beobachtung-Tafel« gegeben, daneben die mittlere Epoche der Beobachtungsreihe, der w. F. von Δu und die Zahl der Messungen. Die Resultate aus den gegenseitigen Verbindungen sind getrennt aufgeführt.

Titania.

Beobachter		Mittl. Ep. T.	Δu Korr. Newcomb	w. F.	Zahl d. Mess. p	s	O — C	Verbindung mit
W. Herschel	Slough	1790.5	−1°13	±0°64	47	—	+3°63	Uranus
Lassell	Malta	1852.9	−1.147	±0.16	25	—	+0.160	»
Marth	»	1864.7	−0.779	±0.079	46	—	−0.125	»
Newcomb	Washington	1874.5	0.000	±0.094	29	34	+0.111	»
A. Hall	»	1875.7	+0.307	±0.152	27	27	+0.351	»
»	»	1881.8	+0.276	±0.098	31	31	−0.018	»
»	»	1883.8	+0.283	±0.087	39	39	−0.122	»
Barnard, Schaeberle	Lick	1895.0	+1.028	±0.040	57	57	+0.003	»
Hussey, Schaeberle, Aitken	»	1897.7	+1.222	±0.057	30	28	+0.047	»
Aitken	»	1900.4	+1.366	±0.058	33	33	+0.042	»
See	Washington	1900.5	+1.360	±0.070	34	34	+0.030	»
»	»	1901.5	+1.381	±0.065	40	40	−0.054	»
»	»	1901.5	+1.390	±0.077	38	38	+0.005	Oberon
»	»	1902.5	+1.375	±0.090	45	44	−0.065	Uranus
»	»	1902.5	+1.608	±0.102	40	40	+0.168	Oberon
Aitken	Lick	1904.2	+1.433	±0.051	32	32	−0.102	Uranus
»	»	1904.5	+1.368	±0.078	23	23	−0.183	Oberon
Frederick, Hammond	Washington	1904.5	+1.535	+0.073	20	20	−0.016	Uranus
»	»	1904.5	+1.402	±0.102	15	15	−0.149	Oberon
Aitken	Lick	1907.0	+1.805	±0.107	11	11	+0.115	Uranus
Aitken, Barnard	Lick u. Yerkes	1907.3	+1.509	±0.102	14	14	−0.197	Oberon
Frederickson	Washington	1907.5	+1.838	±0.100	22	22	+0.121	Uranus
»	»	1907.5	+1.980	±0.138	23	23	+0.263	Oberon
Barnard	Yerkes	1908.5	+1.965	±0.064	27	27	+0.192	Uranus
Barnard, Aitken	Yerkes u. Lick	1910.9	+1.850	±0.058	32	32	−0.058	

Oberon.

Beobachter		Mittl. Ep. T.	Δu Korr. Newcomb	w. F.	Zahl d. Mess. p	s	O − C	Verbindung mit
W. Herschel	Slough	1790.5	−1°54	±0°44	49	—	+0°58	Uranus
Lassell	Malta	1852.9	−0.463	±0.16	25	—	+0.145	„
Marth	„	1864.7	−0.409	±0.070	45	—	−0.088	„
Newcomb	Washington	1874.5	−0.070	±0.087	29	31	+0.013	„
A. Hall	„	1875.7	−0.138	±0.104	26	25	−0.085	
„	„	1881.8	+0.209	±0.074	34	32	+0.114	„
„	„	1883.8	+0.170	±0.074	39	39	+0.027	„
Barnard, Schaeberle	Lick	1895.0	+0.414	±0.033	51	50	−0.002	„
Hussey, Schaeberle, Aitken	„	1897.7	+0.392	±0.057	31	30	−0.089	„
Aitken	„	1900.3	+0.669	±0.047	30	30	+0.125	„
See	Washington	1900.5	+0.613	±0.066	28	27	+0.064	„
„	„	1901.5	+0.719	±0.052	37	37	+0.146	„
„	„	1901.5	+0.564	±0.054	38	38	−0.009	Titania
„	„	1902.5	+0.583	±0.065	40	40	−0.015	Uranus
„	„	1902.5	+0.537	±0.076	40	40	−0.061	Titania
Aitken	Lick	1903.4	+0.506	±0.056	9	9	−0.114	Uranus
„	„	1904.5	+0.535	±0.065	23	23	−0.111	Titania
Frederick, Hammond	Washington	1904.5	+0.615	±0.075	15	15	−0.031	„
Aitken, Barnard	Lick u. Yerkes	1907.3	+0.551	±0.071	14	14	−0.163	„
Frederickson	Washington	1907.5	+0.656	±0.126	23	23	−0.063	„
Barnard	Yerkes	1908.6	+0.632	±0.047	22	22	−0.114	Uranus
Barnard, Aitken	Yerkes u. Lick	1911.0	+1.030	±0.055	28	28	+0.227	„

Setzt man

$$\Delta u = x + y \cdot (T - 1900.0)$$

worin x die Korrektion der Länge von 1900.0, y die Korrektion der jährlichen mittleren Bewegung nach Newcombs Tafel bedeutet, so erhält man durch Ausgleichung mit Rücksicht auf die Gewichte der einzelnen Bestimmungen:

für Titania $x = +1^\circ\!.302 \quad \pm 0^\circ\!.016$

$y = +0.0554 \quad \pm 0.0014$

für Oberon $x = +0.537 \quad \pm 0.015$

$y = +0.0243 \quad \pm 0.0013$

Es ergeben sich damit die mittleren Längen der Trabanten für die Epoche 1900 Januar 0.0 red. M. Z. Greenwich:

Titania $u = 121^\circ\!.773$ w. F. $\pm 0^\circ\!.016$

Oberon $u = 13.606$ w. F. ± 0.015

die mittleren Bewegungen in 4 julianischen Jahren:

Titania	167 Rev. + $294^{\circ}.4216$	= $60414^{\circ}.4216$	w. F. ±$0^{\circ}.0056$
Oberon	108 Rev. + 186.3672	= 39066.3672	w. F. ±0.0052

die mittleren täglichen Bewegungen:

Titania	$41^{\circ}.3514179$	±$0^{\circ}.0000038$
Oberon	26.7394710	±0.0000036

die Umlaufszeiten:

Titania	$8^{d}.7058683$	±$0^{d}.0000008$
Oberon	13.4632432	±0.0000018

Diese Größen beziehen sich auf den beweglichen Äquator.

Die siderischen mittleren täglichen Bewegungen inbezug auf den festen Äquator sind um $0^{\circ}.0000152$ größer, d. h.

Titania	$41^{\circ}.3514331$ (sid.)
Oberon	26.7394862 (sid.)

und die entsprechenden siderischen Umlaufszeiten:

Titania	$8^{d}.7058651$ (sid.)
Oberon	13.4632356 (sid.).

Die Darstellung der einzelnen Längen durch die obigen Werte geht aus den übrigbleibenden Abweichungen, im Sinne O—C, hervor. Wird die Gewichtseinheit einer Bedingungsgleichung in Δu entsprechend dem w. F. ±$0^{\circ}.100$ angenommen, so erhält man nach der Auflösung für die Summe der Fehlerquadrate und den w. F. einer Gleichung

für Titania	$(vv) = 0.51$	w. F. = ±$0^{\circ}.103$
für Oberon	= 0.59	= ±0.119

während der durchschnittliche w. F. einer Bestimmung der Länge, abgeleitet aus den Reihen seit 1874,

für Titania	±$0^{\circ}.086$
für Oberon	±0.068

sich ergibt.

Auf zwei Punkte muß bei einer späteren Untersuchung besonders geachtet werden.

Auffallend groß ist die Abweichung der aus den zahlreichen Beobachtungen W. **Herschels** abgeleiteten Länge von Titania, welche fast 6mal ihren w. F. übertrifft, während **Herschels** Länge von Oberon sich befriedigend mit den späteren Bestimmungen vereinigen läßt. Es ist daher schwierig, die Abweichung der Länge von Titania auf einen konstanten

Fehler in Herschels Positionswinkelbestimmungen zurückzuführen. Anderseits geben aber die neueren Beobachtungen noch keinen Anhalt für die Annahme einer langperiodischen Veränderung in der mittleren Bewegung von Titania. Ferner wäre darauf aufmerksam zu machen, daß in den Abweichungen O — C bei beiden Trabanten ein systematischer Verlauf angedeutet ist, dessen Realität jedoch erst weitere Beobachtungen erweisen können.

5. Abweichungen von der Kreisbahn.

Titania.

Beobachter	Mittlere Epoche	*e* sin *w*	w. F.	*e* cos *w*	w. F.
Newcomb	1874.5	+0.00105	±0.00062	−0.00017	±0.00106
A. Hall	1875.7	+0.00100	±0.00116	+0.00045	±0.00210
»	1881.8	+0.00332	±0.00126	−0.00138	±0.00247
»	1883.8	+0.00312	±0.00098	−0.00319	±0.00215
Barnard, Schaeberle	1895.0	+0.00069	±0.00041	+0.00452	±0.00049
Hussey, Schaeberle, Aitken	1897.7	+0.00269	±0.00062	−0.00031	±0.00062
Aitken	1900.4	+0.00354	±0.00067	+0.00179	±0.00061
See	1900.5	−0.00077	±0.00080	+0.00235	±0.00076
»	1901.5	+0.00059	±0.00076	+0.00163	±0.00072
Aitken	1904.2	+0.00308	±0.00055	−0.00037	±0.00059
Frederick, Hammond	1904.5	−0.00095	±0.00080	+0.00317	±0.00081
Aitken	1907.0	+0.00215	±0.00132	+0.00043	±0.00108
Frederickson	1907.5	−0.00071	±0.00111	−0.00014	±0.00107
Barnard	1908.5	−0.00059	±0.00075	+0.00482	±0.00077
Barnard, Aitken	1910.9	−0.00126	±0.00071	+0.00381	±0.00090

Oberon.

Beobachter	Mittlere Epoche	*e* sin *w*	w. F.	*e* cos *w*	w. F.
Newcomb	1874.5	+0.00157	±0.00061	−0.00349	±0.00097
A. Hall	1875.7	+0.00140	±0.00079	+0.00430	±0.00142
»	1881.8	+0.00149	±0.00083	+0.00249	±0.00186
»	1883.8	+0.00505	±0.00093	−0.00033	±0.00200
Barnard, Schaeberle	1895.0	+0.00090	±0.00033	+0.00069	±0.00043
Hussey, Schaeberle, Aitken	1897.7	+0.00205	±0.00065	−0.00265	±0.00062
Aitken	1900.3	+0.00293	±0.00053	−0.00285	±0.00052
See	1900.5	+0.00021	±0.00070	−0.00060	±0.00066
»	1901.5	+0.00241	±0.00061	+0.00030	±0.00054
Aitken	1903.4	+0.00286	±0.00052	−0.00003	±0.00066
Barnard	1908.6	−0.00242	±0.00053	+0.00296	±0.00057
Barnard, Aitken	1911.0	−0.00070	±0.00058	+0.00244	±0.00070

Die Unsicherheit der älteren Washingtoner Bestimmungen, die auf zahlreichen Messungen beruhen, erklärt sich durch die geringe Öffnung der Bahnen in den siebziger und achtziger Jahren. Beschränkt man sich daher auf die neuen Bestimmungen seit 1895, die alle bei weit geöffneten Bahnen erlangt sind, und vereinigt sie zu Mittelwerten, entsprechend ihren Gewichten, indem man zunächst die Bestimmungen für 1895—1901 und für 1903—1911 voneinander trennt, so erhält man

für Titania:

	$e \sin w$	w. F.	$e \cos w$	w. F.	
1895—1901	+0.00133	±0.00026	+0.00229	±0.00028	5 Beob.-Reihen
1904—1911	+0.00058	±0.00032	+0.00186	±0.00033	6 »

für Oberon:

	$e \sin w$	w. F.	$e \cos w$	w. F.	
1895—1901	+0.00154	±0.00023	−0.00079	±0.00024	5 Beob.-Reihen
1903—1911	+0.00001	±0.00031	+0.00189	±0.00033	3 »

und im Mittel aus allen neueren Beobachtungen 1895—1911:

	$e \sin w$	w. F.	$e \cos w$	w. F.	
für Titania	+0.00102	±0.00020	+0.00212	±0.00021	(11)
für Oberon	+0.00101	±0.00018	+0.00001	±0.00020	(8)

Ohne Rücksicht auf die Gewichte würde man erhalten:

	$e \sin w$	w. F.	$e \cos w$	w. F.
für Titania	+0.00077	±0.00036	+0.00197	±0.00039
für Oberon	+0.00103	±0.00045	+0.00003	±0.00051,

also sehr nahe dieselben Werte. Die Mitnahme der älteren Washingtoner Bestimmungen 1874—1884 würde die Mittelwerte auch nur unbedeutend abändern.

Als Endresultat aus den neueren Bestimmungen kann man daher in runden Zahlen

für Titania $e \sin w = +0.0010$ $e \cos w = +0.0020$
für Oberon $e \sin w = +0.0010$ $e \cos w = 0.0000$

annehmen, für die mittlere Epoche 1903 geltend.

Die Abweichungen von der Kreisbahn sind demnach bei beiden Bahnen sehr gering, scheinen jedoch wenigstens bei Titania reell zu sein.

Eine unabhängige Kontrolle obiger Werte gewähren die Verbindungen der beiden Trabanten untereinander.

In den Jahren 1901—1907 sind fünf solcher Beobachtungsreihen ausgeführt, welche die Abweichungen von der Kreisbahn $h = e \sin w$, $k = e \cos w$ für Oberon durch die entsprechenden Abweichungen für Titania ausdrücken lassen. Aus den Normalgleichungen ergeben sich nämlich die folgenden Relationen, vgl. S. 69 f.:

See 1901	$h_{Ob} = +0.00014 + 0.691\, h_{Ti} + 0.025\, k_{Ti}$	$p = 2.37$
	$k_{Ob} = -0.00065 + 0.026\, h_{Ti} + 0.654\, k_{Ti}$	$p = 2.69$
Aitken 1903, 1904, 1905	$h_{Ob} = -0.00065 + 0.834\, h_{Ti} + 0.041\, k_{Ti}$	$p = 1.64$
	$k_{Ob} = -0.00212 + 0.091\, h_{Ti} + 0.591\, k_{Ti}$	$p = 2.10$
Frederick u. Hammond 1904	$h_{Ob} = -0.00172 + 0.655\, h_{Ti} - 0.019\, k_{Ti}$	$p = 1.82$
	$k_{Ob} = -0.00135 - 0.048\, h_{Ti} + 0.679\, k_{Ti}$	$p = 1.38$
Aitken u. Barnard 1906, 1907	$h_{Ob} = -0.00103 + 0.663\, h_{Ti} + 0.151\, k_{Ti}$	$p = 1.45$
	$k_{Ob} = -0.00069 + 0.139\, h_{Ti} + 0.737\, k_{Ti}$	$p = 1.52$
Frederickson 1907	$h_{Ob} = +0.00078 + 0.770\, h_{Ti} - 0.066\, k_{Ti}$	$p = 0.53$
	$k_{Ob} = +0.00148 - 0.036\, h_{Ti} + 0.688\, k_{Ti}$	$p = 0.69$

Bildet man daraus die Abweichungen für Oberon, unter zwei Voraussetzungen, indem man bei der ersten I die Bahn von Titania als Kreisbahn annimmt, bei der zweiten II die aus den direkten Beobachtungen folgenden Werte $h_{Ti} = +0.0010$, $k_{Ti} = +0.0020$ einsetzt, so erhält man im Mittel:

	I	II	w. F.
h_{Ob}	-0.00064	$+0.00015$	± 0.00036
k_{Ob}	-0.00097	$+0.00040$	± 0.00035

Die Voraussetzung II bringt demnach die direkten und indirekten Bestimmungen in der Tat in entschieden bessere Übereinstimmung untereinander.

Eine Bewegung der Apsidenlinie läßt sich aus den vorhandenen Bestimmungen weder für Oberon noch auch für Titania nachweisen. Da diese Bewegung, nach den Resultaten für Ariel und Umbriel zu schließen, höchstens 1° im Jahre für Titania betragen kann, so war bei der geringen Exzentrizität der Bahn auch nicht zu erwarten, daß sie sich in dem verhältnismäßig kurzen Zeitraum, den die neueren Beobachtungen umfassen, bemerkbar machen würde.

6. Lage der Bahnebenen.

Zur Bestimmung der Lage der Bahnebenen steht folgendes Material zu Gebote:

Titania.

Beobachter	Mittlere Epoche	1900.0 N	w. F.	1900.0 J	w. F.
O. Struve[1]	c 1860	166°66	±0°45	75°88	±0°40
Newcomb	1874.5	165.86	±0.13	74.99	±0.12
A. Hall	1875.7	166.13	±0.18	74.34	±0.19
»	1881.8	166.11	±0.13	75.26	±0.09
»	1883.8	166.22	±0.11	75.19	±0.07
Barnard, Schaeberle	1895.0	165.79	±0.13	74.99	±0 13
Barnard	1908.5	166.89	±0.24	74.08	±0.23
Barnard, Aitken	1910.9	166.42	±0.19	75.11	±0.19

Oberon.

Beobachter	Mittlere Epoche	1900.0 N	w. F.	1900.0 J	w. F.
O. Struve[1]	c. 1860	166°46	±0°44	75°57	±0°47
Newcomb	1874.5	165.74	±0.13	75.14	±0.12
A. Hall	1875.7	166.18	±0.13	74.74	±0.12
»	1881.8	165.95	±0.09	75.35	±0.06
»	1883.8	166.06	±0.09	75.22	±0.06
Barnard, Schaeberle	1895.0	166.01	±0.11	74.86	±0.12
Barnard	1908.6	166.16	±0.20	75.28	±0.20
Barnard, Aitken	1911.0	166.16	±0.15	75.27	±0.15

N und J sind hier auf den Äquator und das Äquinoktium 1900.0 bezogen. Außerdem existieren noch zwei frühere Bestimmungen für die Bahnebenen, welche hier im Zusammenhange ebenfalls erwähnt sein mögen, obwohl sie weiterhin ausgeschlossen worden sind. Die erste, welche W. Herschel aus seinen Beobachtungen ableitete, ergibt, auf den Äquator 1900 bezogen, für die gemeinsame Bahnebene:

$$N = 167°02 \qquad J = 78°11$$

und gilt beiläufig für die Epoche 1700. Die zweite hat Hind[3] aus der ersten

---

[1] Nach v. Asten, s. S. 86.

[2] Philosophical Transactions 1815.

[3] Monthly Notices Vol. XV.

Maltaer Beobachtungsreihe von Lassell 1852—1853 abgeleitet. Aus den von Hind veröffentlichten Resultaten findet man nahe übereinstimmend

für Titania $N = 166^\circ\!.01$ $J = 77^\circ\!.78$
für Oberon $ = 166.06$ $ = 77.77$

bezogen auf den Äquator 1900.0. Über die Genauigkeit dieser Werte und deren Ableitung fehlen nähere Angaben. Es unterliegt aber nach der obigen Diskussion der Herschelschen und Lassellschen Beobachtungen kaum einem Zweifel, daß sie ungeachtet ihrer guten Übereinstimmung auf keine große Sicherheit Anspruch machen können; es läßt sich jedenfalls die Neigung mit den späteren Beobachtungen nicht in Einklang bringen.

Wie man sieht, zeigen die neuen Beobachtungen seit 1874 weder bei Titania noch auch bei Oberon nachweisbare Änderungen in der Lage der Bahnebenen, wie solche infolge einer Abplattung des Planeten bei ansehnlicheren Neigungen der Bahnen gegen den Planetenäquator zu erwarten gewesen wären.

Vereinigt man die obigen Bestimmungen seit 1874 ihren Gewichten entsprechend zu Mittelwerten, so erhält man in naher Übereinstimmung:

für Titania $N = 166^\circ\!.106 \pm 0^\circ\!.055$ $J = 75^\circ\!.070 \pm 0^\circ\!.043$
für Oberon $N = 166.015 \pm 0.044$ $J = 75.191 \pm 0.035$

bezogen auf den Äquator 1900.0, oder im Mittel für die gemeinsame Bahnebene, bezogen auf den Äquator der Epoche T:

$$N = 166^\circ\!.051 + 0^\circ\!.0142\,(T - 1900.0) \quad \pm 0^\circ\!.034$$
$$J = 75.145 - 0.0013\,(T - 1900.0) \quad \pm 0.027$$

Nach den geringfügigen Abweichungen der einzelnen Bestimmungen von diesem Mittelwerte muß man schließen, daß die Bahnen beider Trabanten fast genau in derselben Ebene, derjenigen des Planetenäquators, liegen.

7. Halbachsen der Trabanten.

Masse des Planeten.

In der folgenden Zusammenstellung sind zunächst die Korrektionen der Halbachsen $\lg \frac{d\Delta}{\Delta}$ von Oberon und Titania nach den Ergebnissen der oben diskutierten Beobachtungsreihen in Washington, Lick und Yerkes gegeben. Die Korrektionen $d\Delta$ beziehen sich auf die weiter unten angeführten Ausgangswerte für die Halbachsen, welche sehr genähert der reziproken Planetenmasse $\mu = 22600$ entsprechen. Die aus den gegenseitigen Verbindungen von Oberon und Titania ermittelten Korrektionen, für welche demgemäß $\frac{d\Delta_{Ti}}{\Delta_{Ti}} = \frac{d\Delta_{Ob}}{\Delta_{Ob}}$ angenommen ist, sind unter die Resultate von Oberon gesetzt worden. Bei den älteren Washingtoner Reihen von Newcomb und Hall ist die nachträglich gefundene Verbesserung des Schraubenwerts des damals angewandten Mikrometers I (vgl. S. 9) berücksichtigt.

Weiterhin sind in diese Zusammenstellung aufgenommen die hier noch nicht veröffentlichten Resultate, die sich aus den Messungen der inneren Trabanten ergeben haben, nämlich die Korrektionen der Halbachse von Titania, abgeleitet aus den Verbindungen von Titania mit Ariel und Umbriel während der Jahre 1903 bis 1907, und die Korrektionen der Halbachsen von Ariel und Umbriel aus deren Verbindungen mit dem Planeten 1894 bis 1911. Die Messungen, aus denen diese Korrektionen folgen, sind größtenteils am Lickrefraktor erhalten, einige vereinzelte Messungen auch am Yerkesrefraktor. Obwohl diese Bestimmungen nur mit geringem Gewicht bei der Ableitung der Planetenmasse mitsprechen können, so sind sie gleichwohl von Wert für die Beurteilung der systematischen Fehler, mit denen die Distanzmessungen behaftet sind.

Die reziproke Planetenmasse μ ergibt sich aus dem Ausdruck:

$$\frac{1}{\mu} = \left(\frac{n}{\varkappa}\right)^2 \rho_0^3 \cdot \sin^3\Delta \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)$$

wo die Gravitationskonstante $\varkappa$ in derselben Einheit wie n auszudrücken ist, ρ_0 die mittlere Entfernung, für welche Δ gilt, und σ einen von den Störungen abhängigen sehr kleinen Bruch bedeutet. Beschränkt man sich auf den Anteil von σ, der von der Abplattung des Planeten herrührt, so hat man:

$$\frac{\sigma}{2} = \left(\frac{a_0}{\Delta}\right)^2 \left(\chi - \frac{\phi}{2}\right),$$

wo $a_0 = 1''.9$ der scheinbare Radius des Planeten in der mittleren Entfernung, χ die Abplattung und ϕ das Verhältnis der Zentrifugalkraft zur Schwere am Äquator bedeutet. Beiläufig wird man $\chi - \frac{\phi}{2} = 0.02$ setzen können, welcher Wert ungefähr dem Jupiter- und Saturnsystem entspricht und voraussichtlich auch für das Uranussystem genähert zutreffen wird. Man erhält alsdann für σ und die daraus folgende Korrektion der reziproken Masse $\mu = 22600$:

		σ	Korrektion
für	Oberon	0.000081	+0.9
»	Titania	0.000146	+1.6
»	Umbriel	0.000392	+4.4
»	Ariel	0.000761	+8.6

Da ein Fehler von 0″.01 in der Halbachse von Oberon bereits 16 Einheiten in μ ausmacht, so liegen diese Korrektionen weit unterhalb der erreichbaren Genauigkeitsgrenzen. Noch kleiner ist der Anteil, den die Trabantenmassen und die beim Uranussystem geringfügigen Sonnenstörungen an σ haben, und kann daher ganz vernachlässigt werden.

Für die Halbachsen der Trabantenbahnen in der mittleren Entfernung $\lg \rho_0 = 1.28310$ sind die folgenden Ausgangswerte benutzt worden:

	Δ	n (sid.)	μ_0
Oberon	42″.102	26°.739486	22604
Titania	31.485	41.351433	22600
Umbriel	19.200	86.86892	22597
Ariel	13.780	142.83563	22600

Daneben sind die mittleren täglichen Bewegungen n (siderisch) angegeben, und zwar für Titania und Oberon die oben S. 97 ermittelten Werte, für Ariel und Umbriel die aus der Diskussion der neueren Beobachtungen folgenden.

Den Werten von Δ und n entsprechen die reziproken Massenwerte μ_0, auf welche sich demnach die folgenden Korrektionen $d\mu = -3\mu\frac{d\Delta}{\Delta}$ beziehen. Die Gewichte dieser Korrektionen sind so angenommen, daß der Gewichtseinheit ein w. F. von 68 Einheiten in μ entspricht.

Nr.	Verbindung	Beobachter		Epoche	Zahl der Mess. in s	$\lg\frac{d\Delta}{\Delta}$	Δ	w. F.	$d\mu$	Gew.
				Oberon.						
1	Ob.—Ur.	Newcomb	Wash. Mikr. I	1874, 1875	31	5.8528n	42″.099	±0″.034	+ 5	1.53
2	»	Hall	»	1875, 1876	25	7.1875n	42.037	±0.058	+104	0.53
3	»	»	»	1881, 1882	32	6.6010n	42.085	±0.030	+ 27	1.97
4	»	»	»	1883, 1884	39	7.0174n	42.058	±0.035	+ 71	1.45

Nr.	Verbindung	Beobachter		Epoche	Zahl der Mess. in s	$\lg \frac{d\Delta}{\Delta}$	Δ	w. F.	du	Gew.
5	Ob.—Ur.	See	Wash. Mikr. II	1900	27	7.3762	42ʺ202	±0ʺ042	—161	1.02
6	»	»	»	1901	37	5.8783	42.105	±0.038	— 5	1.22
7	»	»	»	1902	40	7.4395	42.218	±0.040	—186	1.09
8	Ob.—Ti.	»	»	1901	38	7.4236	42.214	±0.032	—180	1.70
9	»	»	»	1902	40	7.4875	42.231	±0.045	—208	0.89
10	»	Frederick, Hammond	»	1904	15	7.3670n	42.004	±0.036	+158	1.34
11	»	Frederickson	»	1907	23	7.5688n	41.946	±0.054	+251	0.60
12	Ob.—Ur.	Barnard, Schaeberle	Lick	1894, 1895	50	5.4289n	42.101	±0.025	+ 2	2.73
13	»	Aitken, Hussey, Schaeberle	»	1896—1898	30	7.5029n	41.968	±0.042	+216	0.99
14	»	Aitken	»	1899—1901	30	7.1765n	42.039	±0.035	+102	1.46
15	»	»	»	1903	9	7.0442	42.149	±0.037	— 75	1.35
16	Ob.—Ti.	»	»	1903—1905	23	6.7518n	42.080	±0.038	+ 38	1.22
17	»	Aitken, Barnard	Lick u. Yerkes	1906, 1907	14	7.5071n	41.967	±0.041	+218	1.05
18	Ob.—Ur.	Barnard	Yerkes	1907—1909	22	6.7060n	42.081	±0.035	+ 34	1.45
19	»	Barnard, Aitken	Yerkes u. Lick	1910, 1911	28	7.6178n	41.927	±0.042	+281	1.00

Titania.

Nr.	Verbindung	Beobachter		Epoche	Zahl der Mess. in s	$\lg \frac{d\Delta}{\Delta}$	Δ	w. F.	du	Gew.
20	Ti.—Ur.	Newcomb	Wash. Mikr. I	1874, 1875	34	7.3012n	31ʺ422	±0ʺ037	+136	0.72
21	»	Hall	»	1875, 1876	27	7.7398n	31.312	±0.062	+372	0.28
22	»	»	»	1881, 1882	31	7.7667n	31.301	±0.035	+396	0.81
23	»	»	»	1883, 1884	39	7.4262n	31.401	±0.031	+181	1.03
24	»	See	Wash. Mikr. II	1900	34	7.1468	31.529	±0.039	— 95	0.67
25	»	»	»	1901	40	6.9393	31.512	±0.034	— 59	0.87
26	»	»	»	1902	44	7.6899	31.639	±0.036	—332	1.19
27	»	Frederick, Hammond	»	1904	20	6.7956	31.505	±0.040	— 42	0.62
28	»	Frederickson	»	1907	22	7.5182	31.589	±0.051	—224	0.38
29	»	Barnard, Schaeberle	Lick	1894, 1895	57	7.6931n	31.330	±0.022	+334	2.05
30	»	Aitken, Hussey, Schaeberle	»	1897, 1898	28	7.3889n	31.408	±0.030	+166	1.08
31	»	Aitken	»	1899—1901	33	7.4187n	31.402	±0.032	+178	0.98
32	»	»	»	1903—1905	32	7.5022n	31.385	±0.028	+216	1.24
33	»	»	»	1906, 1907	11	7.4726n	31.392	±0.057	+201	0.31
34	»	Barnard	Yerkes	1907—1909	27	7.6408n	31.347	±0.037	+296	0.73
35	»	Barnard, Aitken	Yerkes u. Lick	1910, 1911	32	6.4811n	31.475	±0.041	+ 21	0.60
36	Ti.—Ariel	Aitken	Lick	1903, 1904	16	7.2568n	31.428	±0.065	+123	0.23
37	»	»	»	1905—1907	16	7.6001n	31.360	±0.057	+270	0.31
38	Ti.—Umb.	»	»	1903, 1904	13	7.4713n	31.392	±0.083	+201	0.14
39	»	»	»	1905—1907	17	7.4481n	31.397	±0.072	+190	0.19

Umbriel.

Nr.	Verbindung	Beobachter		Epoche	Zahl der Mess. in s	$\lg \frac{d\Delta}{\Delta}$	Δ	w. F.	du	Gew.
40	Umb.—Ur.	Barnard	Lick	1894, 1895	13	8.2966n	18ʺ820	±0ʺ080	+1342	0.06
41	»	Schaeberle, Hussey	»	1897	11	7.4617	19.256	±0.067	—196	0.08
42	»	Aitken	»	1898, 1899	20	7.9818n	19.016	±0.056	+650	0.12
43	»	»	»	1900, 1901	13	7.7619n	19.089	±0.067	+392	0.08
44	»	»	»	1910, 1911	14	6.6399n	19.192	±0.085	+ 30	0.05

Nr.	Verbindung	Beobachter		Epoche	Zahl der Mess. in s	$\lg \frac{d\Delta}{\Delta}$	Δ	w. F.	$d\mu$	Gew.
				Ariel.						
45	Ar.—Ur.	Barnard	Lick	1894	9	7.8875n	13".674	±0".051	+ 523	0.07
46	"	"	"	1895	12	7.4680	13.820	±0.055	− 199	0.07
47	"	Schaeberle, Hussey	"	1897	12	7.3953n	13.746	±0.047	+ 168	0.09
48	"	Aitken, Hussey	"	1898	9	8.1503n	13.585	±0.070	+ 958	0.04
49	"	Aitken	"	1899	13	7.5396n	13.732	±0.036	+ 235	0.14
50	"	"	"	1900, 1901	12	8.2306n	13.546	±0.056	+1153	0.06
51	"	Aitken, Barnard	Lick u. Yerkes	1910, 1911	15	7.7660n	13.700	±0.071	+ 396	0.04

Die aus obigen Korrektionen folgenden Werte von μ zeigen nicht unbeträchtliche systematische Unterschiede, einesteils zwischen den verschiedenen Beobachtern, andernteils aber auch bei denselben Beobachtern zwischen den aus den Halbachsen verschiedener Trabanten abgeleiteten Resultaten. Um dies deutlicher hervortreten zu lassen, bilden wir die folgenden Mittelwerte, entsprechend ihren Gewichten, wobei zu bemerken ist, daß eine strenge Scheidung nach den verschiedenen Beobachtern nicht möglich ist, weil bei einzelnen Reihen mehrere Beobachter mitgewirkt haben. Die Reihen Oberon Nr. 12. 18. 19, Titania Nr. 29. 34. 35, Umbriel und Ariel Nr. 40. 45. 46 beruhen hauptsächlich auf Messungen von Barnard, die teils am Lick-, teils am Yerkesrefraktor erhalten sind. Da keine merklichen Unterschiede zwischen den Messungen von Barnard am Lick- und Yerkesrefraktor zu erkennen sind, so sind dieselben vereinigt. Die übrigen Reihen am Lickrefraktor sind zum weitaus überwiegenden Teile von Aitken gemacht. Bezüglich der Washingtoner Reihen sind Mittelwerte gebildet für die älteren Reihen Newcomb, Hall, für die Reihen von See und für die neueren Beobachtungen von Frederick, Hammond und Frederickson.

		Zahl der Reihen	Gewicht	μ
Washington (Newcomb, Hall)	Oberon	4	5.48	22644
	Titania	4	2.84	22846
	im Mittel	8	8.32	22712
Washington (See)	Oberon	3	3.33	22492
	Oberon—Titania	2	2.59	22412
	Titania	3	2.73	22416
	im Mittel	8	8.65	22444

		Zahl der Reihen	Gewicht	μ
Washington (Frederick, Hammond, Frederickson)	Oberon—Titania	2	1.94	22789
	Titania	2	1.00	22489
	im Mittel	4	2.94	22689
Lick (Aitken)	Oberon—Uranus	3	3.80	22670
	Oberon—Titania	2	2.27	22721
	Titania—Uranus	4	3.61	22789
	Titania—Ariel u. Umbriel	4	0.87	22803
	Ariel u. Umbriel—Uranus	7	0.53	23104
	im Mittel	20	11.08	22752
Lick—Yerkes (Barnard)	Oberon—Uranus	3	5.18	22669
	Titania—Uranus	3	3.38	22871
	Ariel u. Umbriel—Uranus	3	0.20	23110
	im Mittel	9	8.76	22756

Die erheblichen Differenzen in den Washingtoner Bestimmungen verschiedener Beobachter, namentlich zwischen den Resultaten von See und Newcomb, Hall, können nicht etwa daran liegen, daß seit 1900 ein anderes Mikrometer in Anwendung gekommen ist als früher. Die Schraubenwerte sind für beide Mikrometer wiederholt bestimmt worden, auch ist das Verhältnis beider Schrauben durch direkte Vergleichung kontrolliert. Andererseits stehen die Reihen von Aitken und Barnard in befriedigender Übereinstimmung untereinander, lassen aber einen deutlichen Gang nach den Halbachsen erkennen, indem die beiden inneren Trabanten sehr viel größere Werte für μ liefern, als die beiden äußeren und in demselben Sinne auch die Resultate für Titania und Oberon voneinander abweichen. Man sieht ferner, daß die Verbindungen der Satelliten untereinander näherungsweise dieselben Resultate ergeben wie die Verbindungen mit dem Planeten.

Die einfachste Erklärung für obige Unterschiede bietet die Annahme konstanter persönlicher Einstellungsfehler in der Messung der Distanzen, wie solche bereits früher von mir sowohl bei meinen eigenen Distanzmessungen am 30zölligen Refraktor in Pulkowa, wie auch bei gleichzeitigen Messungen von Herrn Renz nachgewiesen worden sind[1]. Nimmt man an, daß Aitken und Barnard alle Distanzen durchschnittlich um 0".10 zu klein gemessen haben — in Wirklichkeit könnte der Einstellungsfehler bei Anwendung von Fadenbeleuchtung sogar größer sein — so resultieren daraus näherungsweise die folgenden Verbesserungen von μ

---

[1] Beobachtungen der Saturnstrabanten. Publications de Poulcova Vol. XI, S. 8 und 64.

für Oberon $d\mu = -161$ für Umbriel $d\mu = -354$
Titania -215 Ariel -492,

welche sowohl die Reihen von Aitken, wie auch diejenigen von Barnard in erheblich bessere Übereinstimmung bringen. Im Mittel erhält man damit aus allen Reihen von Aitken und Barnard am Lick- und Yerkesrefraktor:

		Zahl der Reihen	Gewicht	μ
Lick u. Yerkes	Oberon	8	11.25	22521
	Titania	11	7.86	22611
	Ariel u. Umbriel	10	0.73	22668
	im Mittel	29	19.84	22562

Es ist hiernach wahrscheinlich, daß auch die systematischen Unterschiede in den Washingtoner Beobachtungen hauptsächlich auf diese Fehlerquelle zurückzuführen sind, daß insbesondere die Distanzmessungen von A. Hall ebenfalls einer kleinen positiven Korrektion, diejenigen von See einer negativen Korrektion bedürfen. Ein sicherer Schluß auf die Größe dieser Einstellungsfehler läßt sich indes blos aus der Vergleichung der Resultate für Oberon und Titania nicht ziehen, während die inneren Trabanten am Washingtoner Refraktor nur selten und zu ungenau beobachtet worden sind. Unter solchen Umständen erscheint es am richtigsten bei den Washingtoner Reihen von einer systematischen Korrektion — welche nur willkürlich angesetzt werden könnte und sich im Mittel aus den Messungen von Hall und See herausheben dürfte — ganz abzusehen und sie entsprechend ihren Gewichten zu vereinigen.

Man erhält alsdann:

		Zahl der Reihen	Gewicht	μ
Washington	Oberon	11	13.34	22583
	Titania	9	6.57	22612
	im Mittel	20	19.91	22593

in befriedigender Übereinstimmung mit dem obigen Resultate aus den Messungen in Lick und Yerkes. Damit ergibt sich schließlich als Gesamtmittel aus allen Messungen am Washingtoner, Lick- und Yerkesrefraktor

die reziproke Uranusmasse = 22577.

Ohne Rücksicht auf die systematische Korrektion der Distanzen von Aitken und Barnard würde man zu dem Mittelwerte $\mu = 22674$ gelangen, welcher sich noch weiter vergrößern würde, wenn man die am stärksten abweichenden Bestimmungen, die aus den Messungen von See abgeleitet sind, ausschließen wollte. Da jedoch für die Ausschließung der letzteren kein genügender Grund vorliegt und der Gang in den Resultaten für Aitken und Barnard die angenommene positive Korrektion sehr wahrscheinlich macht, so wird man dem oben abgeleiteten kleineren Werte von μ jedenfalls den Vorzug zu geben haben.

Wie man daraus ersieht, bilden diese systematischen Einstellungsfehler in den Distanzmessungen den Hauptteil der Unsicherheit in der Bestimmung der Planetenmasse. Ein wesentlicher Fortschritt wird sich daher nur erreichen lassen, wenn diese Fehler durch besondere Messungen von den einzelnen Beobachtern untersucht werden, entweder in ähnlicher Weise, wie ich es bei meinen Messungen am 30zölligen Refraktor in Pulkowa getan habe, oder vielleicht noch zweckmäßiger durch Verbindungen von Oberon mit Titania in großen und kleinen Entfernungen. Die Verbindungen von Oberon mit Titania haben außerdem den Vorteil, daß die Einstellungen der Mikrometerfäden auf beide Objekte in der nämlichen Weise erfolgen, während bei den Verbindungen eines Satelliten mit dem Planeten der Mikrometerfaden sich als dunkles Linienelement auf dem Planeten abhebt, was bei Anwendung heller Fäden zu einer weiteren Fehlerquelle Anlaß geben kann.

Der reziproken Uranusmasse = 22577 entsprechen die Halbachsen der Trabanten in der mittleren Entfernung $\lg \rho_0 = 1.28310$

Oberon	$\Delta = 42''118$	Umbriel	$\Delta = 19''201$
Titania	$= 31.495$	Ariel	$= 13.783$

ANHANG

ABHANDLUNGEN NICHT ZUR AKADEMIE GEHÖRIGER GELEHRTER

Über den Grenzfall, in welchem ein ebenes Fachwerk von n Knotenpunkten und $2n-3$ Stäben oder ein räumliches Fachwerk von n Knotenpunkten und $3n-6$ Stäben nicht mehr statisch bestimmt ist.

Von

Prof. Dr. ERNST KÖTTER
in Aachen.

Vorgelegt von Hrn. Müller-Breslau in der Gesamtsitzung am 23. November 1911.
Zum Druck eingereicht am gleichen Tage, ausgegeben am 18. April 1913.

In einer Ebene mögen n Knotenpunkte und $2n-3$ Stäbe vorliegen. Jeder Stab werde durch zwei Knotenpunkte begrenzt und wirke auf sie vermöge seiner Spannkraft mit zwei entgegengesetzt gleichen Kräften. In jedem Knotenpunkt bringe man eine äußere Kraft an, welche den auf ihn wirkenden Stabkräften das Gleichgewicht hält. Fordert man die Ermittlung von $2n-3$ Spannkräften, die zu einem gegebenen System äußerer Kräfte in der beschriebenen Beziehung stehen, so kann diese Aufgabe immer — und zwar auf genau eine Art — lösbar sein, sobald die äußeren Kräfte nur unter sich im Gleichgewicht stehen. Bekanntlich bezeichnet man dann das aus den n Knotenpunkten und $2n-3$ Stäben bestehende Fachwerk als statisch bestimmt.

Die gestellte Aufgabe kann aber auch erst dann lösbar werden, wenn man die äußeren Kräfte noch weiteren Bedingungen unterwirft außer der schon genannten, einander das Gleichgewicht zu halten. Zu jedem zulässigen System äußerer Kräfte gehören alsdann anstatt eines Systems von Spannkräften deren unzählig viele. Ein solches statisch nicht mehr bestimmtes Fachwerk von n Knotenpunkten und $2n-3$ Stäben ist daher immer in sich einspannbar. Man kann seinen Stäben solche Spannkräfte erteilen, daß auf jeden Knotenpunkt im Gleichgewicht stehende Stabkräfte wirken.

Ist ein Fachwerk bei allgemeiner Lage seiner Knotenpunkte statisch bestimmt, so kann es bei besonderer Lage derselben diese Eigenschaft verlieren. Hält man an einem im allgemeinen statisch bestimmten Fachwerk alle Knotenpunkte fest bis auf einen, der drei Stäbe entsendet, so entsteht ein solches statisch nicht mehr bestimmtes »Grenzfachwerk« nach einem bekannten Satz von Henneberg, wenn der Knotenpunkt auf einen gewissen Kegelschnitt, den »Grenzkegelschnitt«, verlegt wird.

Zu einem Knotenpunkte, der $k+1$ Stäbe entsendet, gehört in derselben Weise als Grenzkurve eine Kurve k^{ter} Ordnung. Im ersten Teile der vorliegenden Arbeit werden diese Grenzkurven ausführlich untersucht. Im ersten Abschnitt stütze ich mich auf die Diskussion von $2n-3$ Determinanten $(2n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, die alle von Null verschiedene Werte oder alle den Wert Null besitzen, je nachdem das Fachwerk statisch bestimmt ist oder nicht. Im zweiten Abschnitt bildet dagegen ein Ersatzstabverfahren den Ausgangspunkt der Entwickelung. Im dritten Abschnitt wird die Kurve dritter Ordnung als Grenzkurve eines Fachwerks hinsichtlich eines vierstäbigen Knotenpunktes untersucht. Endlich werden im vierten Abschnitt gewisse in sich einspannbare Stabwerke konstruiert, die bei n Knotenpunkten viel weniger als $2n-3$ Stäbe besitzen.

In den fünf letzten Abschnitten der Arbeit werden die analogen Fragen für Raumfachwerke behandelt. Hält man an einem statisch bestimmten Raumfachwerk von n Knotenpunkten und $3n-6$ Stäben alle Knotenpunkte fest bis auf einen, der $k+2$ Stäbe entsendet, so erhält man an Stelle eines statisch bestimmten ein in sich einspannbares Fachwerk, wenn der $(k+2)$-stäbige Knotenpunkt auf eine gewisse Grenzfläche, eine Fläche k^{ter} Ordnung verlegt wird. Für den Fall $k=2$ hat Henneberg die Gleichung der Grenzfläche aufgestellt. Der allgemeine Fall wird zunächst, im fünften Abschnitt, ausführlich mittels eines Systems von $(3n-6)^2$ Determinanten $(3n-7)^{\text{ter}}$ Ordnung behandelt; im sechsten Abschnitt führt ein Ersatzstabverfahren zu einer einfacheren Form für die Gleichung der Grenzfläche.

Die Ausdeutung der Oberfläche zweiter Ordnung als Grenzfläche eines Fachwerks bezüglich eines vierstäbigen Knotenpunktes liefert im siebenten Abschnitt zahlreiche Ergebnisse. Im achten Abschnitt erfahren die Doppelpyramiden eine gesonderte Behandlung. Sehr einfache Regeln dienen zur Konstruktion in sich eingespannter vierseitiger und fünfseitiger Doppelpyramiden.

Bei der Diskussion der Grenzfläche dritter Ordnung eines Fachwerks bezüglich eines fünfstäbigen Knotenpunktes tritt eine Gerade der Fläche in die Erscheinung. Eine gegebene Oberfläche dritter Ordnung kann deshalb unter Bevorzugung einer ihrer 27 Geraden als Grenzfläche eines Fachwerks von 13 Knotenpunkten und 33 Stäben ausgedeutet werden. Auf der allgemeinen Grenzfläche k^{ter} Ordnung liegt analog eine Raumkurve $\frac{1}{2}(k-1)(k-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, durch welche unzählig viele Oberflächen $(k-2)^{\text{ter}}$ Ordnung hindurchgehen.

I.

1. In einer Ebene sei ein Fachwerk von $m+1$ $(=n)$ Knotenpunkten $A_0, A_1, \cdots, A_m$ und $2m-1$ $(=2n-3)$ Stäben gegeben, die wir in irgendeine Reihenfolge bringen. In einem rechtwinkeligen Koordinatensystem besitze A_α die Koordinaten a_α, b_α; es bedeute ferner σ_β die Spannkraft des β^{ten} Stabes, dividiert durch die Entfernung seiner beiden Endpunkte A_λ und A_μ, auf welche er mit zwei entgegengesetzt gleichen Kräften wirkt. Die Kraft Q_α, welche allen in A_α angreifenden Stabkräften das Gleichgewicht hält, zerlegen wir in zwei Komponenten X_α und Y_α, die parallel zu den Koordinatenachsen auf A_α wirken. Alsdann bestehen bekanntlich die $2m+2$ Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{\alpha,1}\sigma_1 + a_{\alpha,2}\sigma_2 + \cdots + a_{\alpha,2m-1}\sigma_{2m-1} &= X_\alpha, \\ b_{\alpha,1}\sigma_1 + b_{\alpha,2}\sigma_2 + \cdots + b_{\alpha,2m-1}\sigma_{2m-1} &= Y_\alpha. \end{aligned} \quad (\alpha=0,1,2,\cdots,m). \quad (1.)$$

σ_β tritt nur in vier Gleichungen auf, welche zu den beiden Endpunkten A_λ, A_μ des β^{ten} Stabes gehören. Es ist nämlich

$$a_{\lambda,\beta} = a_\mu - a_\lambda, \; b_{\lambda,\beta} = b_\mu - b_\lambda; \qquad a_{\mu,\beta} = a_\lambda - a_\mu, \; b_{\mu,\beta} = b_\lambda - b_\mu.$$

Sobald aber α von λ und μ verschieden ist, verschwinden $a_{\alpha,\beta}$ und $b_{\alpha,\beta}$. Eine Zugkraft soll als positiv, eine Druckkraft als negativ bezeichnet werden. Alsdann ist X_α als positiv zu bezeichnen, wenn diese Komponente der positiven Richtung der x-Achse entgegenwirkt, im anderen Falle als negativ. Ähnliches gilt für Y_α.

Es bestehen die Identitäten

$$X_0 + X_1 + \cdots + X_m = 0, \quad Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_m = 0, \qquad (2.)$$

$$b_0 X_0 - a_0 Y_0 + b_1 X_1 - a_1 Y_1 + \cdots + b_m X_m - a_m Y_m = 0, \qquad (2\text{a}.)$$

welche letztere wir auf die Form bringen:

$$(b_1 - b_0)X_1 - (a_1 - a_0)Y_1 + (b_2 - b_0)X_2 - (a_2 - a_0)Y_2 + \cdots + (b_m - b_0)X_m - (a_m - a_0)Y_m = 0. \; (3.)$$

Sie drücken aus, daß $Q_0, Q_1, \cdots, Q_m$ einander das Gleichgewicht halten. Bei Erfüllung dieser selbstverständlichen Bedingung sind drei der Gleichungen (1.) Folgen der $2m-1$ übrigen. Das Fachwerk ist statisch bestimmt, wenn die Determinante dieser Gleichungen einen von Null verschiedenen Wert besitzt, statisch nicht mehr bestimmt, wenn sie den Wert Null hat[1].

---

[1] Man vergleiche hierzu: Henneberg, Statik der starren Systeme, Darmstadt 1886, § 40. S. 222; Föppl, Vorlesungen über Technische Mechanik, Bd. 2, 1. Aufl., Leipzig 1900, § 37, S. 237 und Müller-Breslau, Die Graphische Statik der Baukonstruktionen, Bd. 1, 2. Aufl., Leipzig

2. Von diesem bekannten Satz will ich eine sehr naheliegende Umformung geben. Besonders mit Rücksicht auf spätere Anwendungen schreibe ich das Koeffizientenrechteck der Gleichungen (1.) für ein Fachwerk aus 7 Knotenpunkten $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ und 11 Stäben $A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3, A_0A_4, A_5A_1, A_5A_2, A_5A_3, A_6A_1, A_6A_2, A_6A_4, A_3A_4$ oder 1, 2, ⋯, 11 (Fig. 1.) in voller Ausführlichkeit nieder.

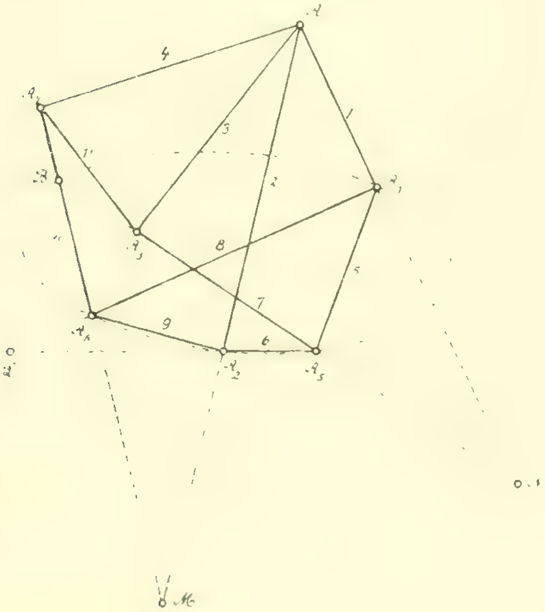
$$\begin{array}{cccccccccccc}
\sigma_1, & \sigma_2, & \sigma_3, & \sigma_4, & \sigma_5, & \sigma_6, & \sigma_7, & \sigma_8, & \sigma_9, & \sigma_{10}, & \sigma_{11} & \\
a_1-a_0, & a_2-a_0, & a_3-a_0, & a_4-a_0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & X_0 \\
b_1-b_0, & b_2-b_0, & b_3-b_0, & b_4-b_0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & Y_0 \\
a_0-a_1, & 0, & 0, & 0, & a_5-a_1, & 0, & 0, & a_6-a_1, & 0, & 0, & 0, & X_1 \\
b_0-b_1, & 0, & 0, & 0, & b_5-b_1, & 0, & 0, & b_6-b_1, & 0, & 0, & 0, & Y_1 \\
0, & a_0-a_2, & 0, & 0, & 0, & a_5-a_2, & 0, & 0, & a_6-a_2, & 0, & 0, & X_2 \\
0, & b_0-b_2, & 0, & 0, & 0, & b_5-b_2, & 0, & 0, & b_6-b_2, & 0, & 0, & Y_2 \\
0, & 0, & a_0-a_3, & 0, & 0, & 0, & a_5-a_3, & 0, & 0, & 0, & a_4-a_3, & X_3 \\
0, & 0, & b_0-b_3, & 0, & 0, & 0, & b_5-b_3, & 0, & 0, & 0, & b_4-b_3, & Y_3 \\
0, & 0, & 0, & a_0-a_4, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & a_6-a_4, & a_3-a_4, & X_4 \\
0, & 0, & 0, & b_0-b_4, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & b_6-b_4, & b_3-b_4, & Y_4 \\
0, & 0, & 0, & 0, & a_1-a_5, & a_2-a_5, & a_3-a_5, & 0, & 0, & 0, & 0, & X_5 \\
0, & 0, & 0, & 0, & b_1-b_5, & b_2-b_5, & b_3-b_5, & 0, & 0, & 0, & 0, & Y_5 \\
0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & a_1-a_6, & a_2-a_6, & a_4-a_6, & 0, & X_6 \\
0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & b_1-b_6, & b_2-b_6, & b_4-b_6, & 0, & Y_6
\end{array}$$

Jede Unbekannte kommt in genau vier Gleichungen vor, σ_1 z. B. nur in den vier ersten. Daneben bestehen zehn Gleichungen für die zehn Unbekannten $\sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_{11}$ allein. Zunächst besitze die Determinante dieser Gleichungen einen von Null verschiedenen Wert D_1. Sie können nun auf genau eine Weise nach $\sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_{11}$ aufgelöst werden, welche Werte wir auch $X_2, X_3, \cdots, X_6, Y_2, Y_3, \cdots, Y_6$ beilegen. Verschwinden diese Werte sämtlich, so gilt das gleiche von $\sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_{11}$. Wir bilden mit den 14 Komponenten von 7 einander das Gleichgewicht haltenden Kräften $Q_0, Q_1, \cdots, Q_6$ und 11 vorerst ganz beliebigen Werten $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{11}$ die Ausdrücke

$$X'_\alpha \equiv X_\alpha - a_{\alpha,1}\sigma_1 - a_{\alpha,2}\sigma_2 - \cdots - a_{\alpha,11}\sigma_{11}, \; Y'_\alpha \equiv Y_\alpha - b_{\alpha,1}\sigma_1 - b_{\alpha,2}\sigma_2 - \cdots - b_{\alpha,11}\sigma_{11}. \; (\alpha = 0, 1, \cdots, 6).$$

1887, Art. 143, S. 214. Nach Henneberg (Die graphische Statik der starren Körper, Enzyklopädie der Mathematik, Bd. IV, 5, Leipzig 1903, S. 391) gehen die $2n$ Gleichgewichtsbedingungen in der oben angeführten Form auf Castigliano zurück: A. Castigliano, Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques, Turin 1879, S. 15.

Fig. 1.



Alsdann bestehen die Identitäten

$$X_0'+X_1'+\cdots+X_6'=0\,,\qquad Y_0'+Y_1'+\cdots+Y_6'=0\,,\tag{4.}$$
$$(b_1-b_0)X_1'-(a_1-a_0)Y_1'+(b_2-b_0)X_2'-(a_2-a_0)Y_2'+\cdots+(b_6-b_0)X_6'-(a_6-a_0)Y_6'=0\,,$$

denn die Größen $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{11}$ fallen einzeln heraus, und wir gelangen zu den Identitäten (2.) und (3.) zurück. Erfüllen wir nun die zehn letzten Gleichungen unseres Systems (1.), setzen also

$$X_2'=Y_2'=\cdots=X_6'=Y_6'=0\,,$$

so nehmen die Identitäten (4.) die Form an

$$X_0'+X_1'=0\,,\ \ Y_0'+Y_1'=0\,,\ \ (b_1-b_0)X_1'-(a_1-a_0)Y_1'=0\,.\tag{5.}$$

Da $A_0, A_1, \cdots, A_6$ voneinander verschiedene Punkte sind, ist von den Größen a_0-a_1 und b_0-b_1 sicher eine, sagen wir für den Augenblick b_0-b_1, von Null verschieden. Die Gleichung

$$Y_1'=0 \quad \text{oder} \quad Y_1-(b_0-b_1)\sigma_1-b_{1.2}\,\sigma_2-\cdots-b_{1.11}\,\sigma_{11}=0$$

kann dann durch Verfügung über σ_1 befriedigt werden, welchen Wert wir auch Y_1 erteilen, und zwar wird σ_1 mit Y_1 zugleich den Wert Null annehmen.

wenn dies schon vorher für $\sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_{11}$ erkannt war. Die letzte der drei Identitäten (5.) hat nunmehr die Form

$$(b_1 - b_0) X_1' = 0 \text{ oder } (b_1 - b_0)(X_1 - (a_0 - a_1)\sigma_1 - a_{1,2}\sigma_2 - \cdots - a_{1,11}\sigma_{11}) = 0 .$$

Sie zeigt uns, daß die dritte Gleichung des Systems (1.) von selbst erfüllt ist, die beiden ersten Identitäten (5.) zeigen dasselbe für die beiden ersten Gleichungen unseres Systems. Ist $a_0 - a_1$ von Null verschieden, so kann man aus einem beliebigen Wert von X_1 denjenigen von σ_1 mittels der dritten Gleichung unseres Systems (1.) berechnen, die erste, zweite und vierte Gleichung sind dann von selbst erfüllt. Ist also D_1 von Null verschieden, so nimmt das Fachwerk jedes System im Gleichgewicht stehender Kräfte $Q_0, Q_1, \cdots, Q_6$ mit einem ganz bestimmten System innerer Spannkräfte auf. Es kann aber nicht in sich eingespannt werden, da mit $X_0, X_1, \cdots, X_6$ und $Y_0, Y_1, \cdots, Y_6$ zugleich auch $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{11}$ verschwinden. Das Fachwerk ist also statisch bestimmt.

3. Verschwindet hingegen der Wert D_1 der Determinante, so sind $k\,(\geqq 1)$ von den Größen $X_2', X_3', \cdots, X_6', Y_2', Y_3', \cdots, Y_6'$ lineare Funktionen der $10 - k$ übrigen mit konstanten Koeffizienten, welche Werte $\sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_{11}$ auch annehmen; verschwinden dieselben, so zeigt sich, daß die zehn betrachteten Gleichungen einander widersprechen, wenn man nicht für k von den Größen $X_2, X_3, \cdots, X_6, Y_2, Y_3, \cdots, Y_6$ ganz bestimmte lineare homogene Funktionen der $10 - k$ übrigen einsetzt. Hat man diesen k Bedingungen genügt, so bestehen alle zehn Gleichungen

$$X_2' = 0, \quad X_3' = 0, \cdots, X_6' = 0, \quad Y_2' = 0, \quad Y_3' = 0, \cdots, Y_6' = 0,$$

nachdem man $10 - k$ von ihnen erfüllt hat. Hierbei können noch k passende von den Größen $\sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_{11}$ beliebige Werte erhalten. Nach der obigen Betrachtung sind nun wieder die vier ersten Gleichungen (1.) mit den zehn letzten verträglich, wenn X_0, Y_0, X_1, Y_1 die Identitäten (2.) und (3.) befriedigen. Einer der Größen X_1 und Y_1 kann man sicher durch Verfügung über σ_1 einen beliebigen Wert erteilen.

Verschwindet D_1, so können die Gleichungen

$$X_2 = 0, \quad X_3 = 0, \cdots, X_6 = 0, \quad Y_2 = 0, \quad Y_3 = 0, \cdots, Y_6 = 0$$

durch Werte von $\sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_{11}$ befriedigt werden, die nicht alle verschwinden. Bei der Einsetzung in die vier ersten Gleichungen des Systems (1.) entstehen Werte, die den Relationen genügen

$$X_0 + X_1 = 0, \qquad Y_0 + Y_1 = 0, \qquad (b_1 - b_0) X_1 - (a_1 - a_0) Y_1 = 0.$$

Durch Verfügung über σ_1 kann man Y_1 den Wert Null erteilen, wenn $b_0 - b_1$ nicht verschwindet; alsdann erhalten augenscheinlich auch Y_0, X_1, X_0 der Reihe nach den Wert Null. Sollte aber $b_0 - b_1$ verschwinden, so ist sicher $a_0 - a_1$ von Null verschieden, und es verschwinden alle vier Größen X_1, Y_1, X_0, Y_0, wenn man der ersten durch Verfügung über σ_1 den Wert Null erteilt hat.

Verschwindet also D_1, so kann das Fachwerk nur noch spezielle Systeme äußerer Kräfte mit endlichen Spannkräften aufnehmen. Zu jedem zulässigen Kräftesystem gehören aber unzählig viele Systeme von Spannkräften. Das Fachwerk ist also nicht mehr statisch bestimmt, zugleich in sich einspannbar; seinen Stäben können solche Spannkräfte erteilt werden, daß auf jeden Knotenpunkt im Gleichgewicht stehende Stabkräfte wirken.

Zu jedem anderen Stabe des Fachwerks gehört, gerade so wie zu dem ersten, eine Determinante zehnter Ordnung. Überträgt man die Schlüsse auf ein Fachwerk von n Knotenpunkten und $2n-3$ Stäben, so folgt:

I. *Man spanne alle Stäbe eines Fachwerks von n Knotenpunkten und $2n-3$ Stäben willkürlich ein und ermittele für jeden Knotenpunkt die Komponenten X_α, Y_α der äußeren Kraft, welche den auf ihn wirkenden Stabkräften das Gleichgewicht hält. Aus dem Koeffizientenrechteck dieser $2n$ Gleichungen (1.) entferne man die auf einen Stab bezügliche Vertikalreihe und die vier Horizontalreihen, die sich auf seine beiden Endpunkte beziehen, und bilde aus dem verbliebenen Größenquadrat die Determinante. Die $2n-3$ so entstandenen Determinanten $(2n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, von denen jede zu einem Stabe des Fachwerks gehört, haben entweder alle von Null verschiedene Werte, oder alle den Wert Null. Im ersten Falle ist das Fachwerk statisch bestimmt, dagegen im zweiten Falle, in welchem es zugleich in sich einspannbar ist, nicht mehr statisch bestimmt*[1].

---

[1] Das aufgestellte Theorem kann auch so gefaßt werden: Liegt ein freies Fachwerk von n Knotenpunkten und $2n-3$ Stäben vor, so bilden irgend $2n-4$ dieser Stäbe ein gestütztes Fachwerk von $n-2$ Knotenpunkten und $2n-4$ (Fachwerk- und Stütz-) Stäben, wobei der letzte Stab als Hilfsfachwerk dient. Alle diese gestützten Fachwerke sind gleichzeitig mit dem freien Fachwerk statisch bestimmt oder nicht. Müller-Breslau hat (vergl. die Arbeit: Zur Frage der Kennzeichen statisch bestimmter, stabiler Fachwerke, Schweizerische Bauzeitung, Bd. 5, Zürich 1885, S. 19) hervorgehoben, daß ein gestütztes Fachwerk von n Knotenpunkten und $2n$ Fachwerk- und Stütz-Stäben dann und nur dann statisch bestimmt ist, wenn die Determinante von $2n$ linearen Gleichungen für $2n$ Spannkräfte in jenen Stäben einen von Null verschiedenen Wert hat (vergl. auch: Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, Leipzig 1886, S. 2). Während ein freies Fachwerk — und solche werden in meiner Arbeit allein betrachtet — eine starre Verbindung seiner Knoten-

4. Bekanntlich ist ein statisch nicht mehr bestimmtes Fachwerk von n Knotenpunkten und $2n-3$ Stäben zugleich instabil, es gestattet solche unendlich kleinen Verschiebungen der Knotenpunkte gegeneinander, bei denen alle Stäbe bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung ihre Länge bewahren. Dies ist aber nur dann möglich, wenn $2n-3$ lineare homogene Gleichungen für $2n$ unendlich kleine Unbekannte bestehen. Jede von ihnen enthält die Zuwachse, welche die Koordinaten der Endpunkte eines Stabes bei einer unendlich kleinen Deformation des Fachwerks erfahren und drückt aus, daß der Stab hierbei seine Länge nicht verändert. Man kann nun das deformierte Fachwerk so drehen, daß irgendein Stab in seine Anfangslage zurückkehrt. Die zu ihm gehörige Gleichung wird nun selbstverständlich, da die Koordinaten seiner Endpunkte keine Zuwachse erhalten. Man hat also $2n-4$ Gleichungen für die $2n-4$ unendlich kleinen Zuwachse vor sich, um welche die Koordinaten der $n-2$ anderen Knotenpunkte des deformierten Fachwerks sich jetzt noch von denen des gegebenen Fachwerks unterscheiden. Einige von ihnen müssen, falls eine Deformation möglich ist, von Null verschieden sein; die Determinante des Gleichungssystems verschwindet alsdann. Man kann das so ausdrücken:

II. *Man erteile den Koordinaten der Knotenpunkte eines Fachwerks von n Knotenpunkten und $2n-3$ Stäben unendlich kleine Zuwachse und drücke aus, daß hierbei alle Stäbe des Fachwerks ihre Länge bewahren. Das Koeffizienten-*

---

punkte herbeiführt, wenn man von allen Auflagerungen absieht, tritt dies bei einem gestützten Fachwerk erst dann ein, wenn feste und bewegliche Auflager, die starr miteinander verbunden sind, hinzutreten. Stützt man jedes Gleitlager durch eine zu ihm senkrechte Pendelstütze, jedes Auflagergelenk durch zwei Stützstäbe ab, so hat man nach einer Formel von Mohr (Beitrag zur Theorie des Fachwerks, Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, Bd. 20, Jahrg. 1874, S. 509) gerade doppelt soviel — $2n$ — Fachwerk- und Stützstäbe vor sich als Knotenpunkte — n —, wenn es sich um ein einfaches (statisch bestimmtes) Fachwerk handelt. Wenn man daher die Stützstäbe in Knotenpunkten eines passend gewählten, statisch bestimmten »Erdfachwerks« von m Knotenpunkten und $2m-3$ Stäben angreifen läßt, so hat man ein freies Fachwerk von $m+n$ Knotenpunkten und $2(m+n)-3$ Stäben vor sich, das gleichzeitig mit dem gestützten Fachwerk statisch bestimmt ist. Auf diesen Zusammenhang hat Müller-Breslau 1891, auch für räumliche Fachwerke, ganz kurz hingedeutet (Centralblatt der Bauverwaltung, Jahrg. 11, Berlin 1891, S. 440). Henneberg und Schlink haben bekanntlich von der Einführung richtig gewählter Erdfachwerke fruchtbare Anwendungen gemacht: Henneberg und Schlink, Die Theorie der statisch bestimmten Fachwerksträger, Zeitschrift für Architektur- und Ingenieurwesen, Bd. 58, Jahrg. 1903, Wiesbaden, S. 157 und Schlink, Stabilitäts- und Spannungs-Untersuchungen von speziellen Fachwerksträgern mittels des erweiterten Systems, ebenda, S. 397.

rechteck dieser Gleichungen besteht aus $2n-3$ Horizontal- und $2n$ Vertikal-Reihen. Man unterdrücke außer der zu einem Stabe gehörigen Horizontalreihe die vier auf seine Endpunkte bezüglichen Vertikalreihen und bilde aus dem verbliebenen Größenquadrat die Determinante. Die Werte dieser Determinanten, von denen jede zu einem Stabe des Fachwerks gehört, sind entweder alle von Null verschieden oder alle gleich Null. In letzterem Falle ist das Fachwerk instabil.

5. Daß die nach den Theoremen I. und II. einem Fachwerkstabe zugeordneten Determinanten beide von Null verschiedene Werte oder beide den Wert Null haben, kann man nach dem Vorgange von Föppl sehr leicht zeigen, wenn man das Quadrat der Länge eines Fachwerkstabes als Funktion der Koordinaten sämtlicher Knotenpunkte ansieht. Zu den partiellen Differentialquotienten der β^{ten} Funktion nach allen Veränderlichen sind in dem Koeffizientenrechteck des Theorems I. die Koeffizienten der β^{ten} Vertikalreihe proportional, hingegen in dem Koeffizientenrechteck des Theorems II. die Koeffizienten der β^{ten} Horizontalreihe. Hieraus wird evident, daß beide Determinanten, die zu einem Stabe gehören, gleichzeitig den Wert Null annehmen. Legt man den betreffenden Stab ganz fest, so sind die Quadrate der Längen der $2n-4$ anderen Stäbe nur noch Funktionen von $2n-4$ Veränderlichen. Mit der Funktionaldeterminante dieser Funktionen deckt sich — das ist eine leichte Umschreibung des Föpplschen Theorems — die einem Stabe zugeordnete Determinante in ihrer zweiten Bedeutung[1].

---

[1] Die oben angedeutete Entwicklung unterscheidet sich von der Föpplschen nur darin, daß ein allgemeines Koordinatensystem beibehalten wird, während Föppl den ersten Knotenpunkt im Anfangspunkt der Koordinaten festhält, den zweiten auf der x-Achse verschiebt. Bei der Untersuchung auf Stabilität erhält man somit sogleich $2n-3$ homogene lineare Gleichungen für $2n-3$ unendlich kleine Unbekannte. Auch die Bestimmung der Spannkräfte bei Einwirkung äußerer Kräfte führt, da naturgemäß von den vier ersten Gleichungen des Systems (1.) nur die dritte beibehalten wird, zu $2n-3$ Gleichungen für $2n-3$ Unbekannte. Daß die Determinanten beider Gleichungssysteme nur gleichzeitig verschwinden können, wird nach der oben angedeuteten Methode gezeigt, wobei die erste Determinante als Funktionaldeterminante erscheint, wenn man die Quadrate der Stablängen als Funktionen der $2n-3$ veränderlichen Koordinaten betrachtet. Wenn die beiden ersten Knotenpunkte durch einen Fachwerkstab verbunden sind, so erkennt man sehr leicht, daß jede der beiden Determinanten in das Produkt zweier Determinanten erster und $(2n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung übergeht. Wir würden so die Reihe unserer Determinanten wieder erhalten, eine jede auf ein spezielles Koordinatensystem bezogen. Man vergleiche die Arbeiten: Föppl, Zur Fachwerkstheorie, Schweizerische Bauzeitung, Bd. 9, Zürich 1887, S. 42 und Föppl, Vorlesungen über Technische Mechanik, Bd. 2, 1. Aufl., Leipzig 1900, § 37, S. 237. Ganz kurz hatte Föppl schon 1880

überhaupt für Alkaligesteine und findet sich nie in der Alkalikalkreihe Rosenbuschs.

Als Durchschnittsfeldspat ergibt sich für 1., wenn man die 2.5 Mol.-Prozent Alkali, die im Überschuß über Al_2O_3 und daher an das Fe des Arfvedsonits zu binden sind, als Na_2O annimmt, was durch den geringen K_2O-Gehalt des Arfvedsonits (1.60 Prozent gegenüber 10.50 Prozent Na_2O) gerechtfertigt wird, 22.5 Mol.-Prozent Orthoklas + 77.5 Mol.-Prozent Albit, was mit der oben mitgeteilten Feldspatanalyse Bertolios gut übereinstimmt; doch hat Bertolio vielleicht bei dieser Gesteinsanalyse ebenso wie bei jener Feldspatanalyse den Na_2O-Betrag auf Kosten des K_2O-Betrages zu hoch bestimmt, wofür außer unsern obigen Feldspatuntersuchungen auch Rosenbuschs Comenditanalyse (2) spricht. Aus letzterer ergibt sich als Durchschnittsfeldspat

47.5	Mol.-Prozent	Orthoklas
52.0	»	Albit
0.5	»	Anorthit
100.0	Mol.-Prozent	Summa

Da Herzenbergs obige Analyse der Feldspateinsprenglinge dieses Comendits von Comende

38.5	Mol.-Prozent	Orthoklas
59.5	»	Albit
2.0	»	Anorthit
100.0	Mol.-Prozent	Summa

ergab, so scheinen die Feldspäte der Grundmasse etwas ärmer an Albit und vor allem an Anorthit zu sein als die Einsprenglinge, was ja der bekannten Erfahrung entspricht. Schätzt man die Masse der Grundmassefeldspäte auf das Doppelte derjenigen des Einsprenglingsfeldspats, so erhält man als Zusammensetzung der ersteren:

52.0	Mol.-Prozent	Orthoklas
48.0	»	Albit
0.0	»	Anorthit
100.0	Mol.-Prozent	Summa

Aus obigen Oxydmolekülprozenten erhält man folgende Mineralmolekülprozente:

		1	2
Orthoklas $K_2Al_2Si_6O_{16}$		16.8	27.44
Albit $Na_2Al_2Si_6O_{16}$		58.4	31.52
Anorthit $CaAl_2Si_2O_8$		—	0.32
Quarz SiO_2		11.1	33.33
Arfvedsonit	$\overset{''}{Fe}\overset{'''}{Fe}_2SiO_6$	1.2	1.74
	$(Fe, Mg, Na_2)_2Si_3O_8$	10.0	4.52
	Summa	97.5[1]	98.87

---

[1] Die Differenzen gegenüber 100 erklären sich daraus, daß die eine Arfvedsonitkomponente in ihrer Formel den Ausdruck $(FeO, MgO, Na_2O)_2$ führt, während die zur Berechnung verwendeten Oxydmolekülprozente die nicht verdoppelten Molekeln FeO, MgO Na_2O betreffen.

Nach Bertolios Arfvedsonitanalyse würden die beiden Arfvedsonitkomponenten $\overset{''}{Fe}\overset{'''}{Fe}_2SiO_6$ und $(\overset{''}{Fe}, Mg, Na_2)_2Si_3O_8$ in dem Molekularverhältnis 1.74 : 5.00 statt 1.74 : 4.52 stehen, welch letzteres wir soeben aus Rosenbuschs Comenditanalyse (2.) berechneten, was eine gute Übereinstimmung bedeutet, während Bertolios Comenditanalyse (1.) für jene Proportion den stark abweichenden Wert 1.2 : 10.0 ergibt.

Daß das CaO der Comenditanalyse (2.), wie oben geschehen, auf Anorthit zu verrechnen ist, beweist Herzenbergs Analyse der Feldspateinsprenglinge dieses Gesteins, welche 0.4 Prozent CaO gegenüber den 0.1 Prozent CaO des Arfvedsonits ergab, der ja überdies in viel geringerer Menge auftritt. Daher müßte man eigentlich auch bei der Berechnung der Osannparameter dieser (und ähnlicher) Gesteine außer dem K_2O auch das ganze (oder doch das meiste) CaO an Al_2O_3 binden, so daß dem Na_2O noch etwas mehr Al_2O_3 entzogen wird als bereits ohnedies, wodurch die Arfvedsonitmenge ein wenig steigt. Anderseits hat man das K_2O insgesamt an Al_2O_3 zu binden, da der Arfvedsonit nur 1.6 Prozent K_2O gegenüber 10.5 Prozent Na_2O führt. Bei obiger Berechnung der Osannparameter habe ich jedoch (im Gegensatz zur Berechnung der Mineralmolekularprozente) in Anlehnung an Osann das CaO nicht zu C, sondern zu F gefügt, damit die Bedeutung der Ziffern von C und F keine andere als die übliche und ein direkter Vergleich mit den Parametern andrer Gesteine möglich würde.

Das Fe_2O_3 wurde vollständig auf Arfvedsonit verrechnet, wodurch die berechnete Arfvedsonitmenge ein klein wenig zu hoch ausfällt, da der Fe_2O_3-Gehalt dieses Minerals 4.20 Prozent, derjenige der drei analysierten Feldspäte aber immerhin 1.44, 1.69 und 2.16 Prozent beträgt und die Feldspatmenge über die Arfvedsonitmenge stark überwiegt.

Schließlich erhält man folgende Gewichtsprozente:

	1	2
Orthoklas	22.5	44.0
Albit	73.7	47.6
Anorthit	—	0.2
Quarz	1.6	5.8
Arfvedsonit	2.2	2.4
Summa	100.0	100.0

Anhangsweise seien der Vollständigkeit wegen noch zwei Comenditanalysen Bertolios mitgeteilt, in denen Al und Fe nicht getrennt wurden (Atti R. Accad. Linc. Rendic. [5] **5**, 2. Sem., Roma 1896):

	1	2
SiO_2	74.6	75.1
Al_2O_3 Fe_2O_3	14.8	16.8
MgO	0.2	0.1
Na_2O	7.4	6.8
K_2O	2.5	2.0
Summa	99.5	100.8

Jeder Summand der Determinante enthält aus jeder der drei Vertikalreihen einen Faktor, und zwar müssen sie aus drei voneinander verschiedenen Horizontalreihen entnommen werden. Für die dritte Vertikalreihe kommen nur die erste und die zweite Horizontalreihe in Betracht. Wenigstens aus einer der beiden ersten Vertikalreihen müssen wir also ein Glied entnehmen, das in der dritten bis sechsten Horizontalreihe steht. Da jeder Summand der Determinante sicher einen der Faktoren $a_0 - a_5$ und $b_0 - b_5$ enthält, wird die Gleichung

$$D_7(x, y) = 0$$

durch die Annahmen $x = a_5$ und $y = b_5$ befriedigt.

Ebenso wie A_5 ist auch A_6 ein Punkt der Grenzkurve, weil $A_6 A_1$, $A_6 A_2$, $A_6 A_4$ Fachwerkstäbe sind. Ich behaupte vorgreifend, daß der Schnittpunkt B von $A_6 A_4$ und $A_5 A_3$ der Grenzkurve angehört (15. u. 25.). Sie zerfällt in die Gerade $A_3 A_4$ und einen Kegelschnitt, den A_1, A_2, A_5, A_6, B festlegen. Das Fachwerk (Fig. 1., S. 7) könnte also in sich einspannbar sein, wenn A_0 der Geraden $A_3 A_4$ angehörte, alsdann wären nur $A_3 A_4$, $A_0 A_3$, $A_0 A_4$ beansprucht, oder, wenn $A_1 A_6 B A_5 A_2 A_0$ ein Pascalsches Sechseck wäre. Es müßten also die Punkte $(A_1 A_6, A_5 A_2) = L$, $(A_6 B, A_2 A_0) = M$, $(B A_5, A_0 A_1) = N$ oder

$$L = (8{,}6), \qquad M = (10{,}2), \qquad N = (7{,}1),$$

in einer Geraden liegen.

9. Aus der Verallgemeinerung der angewendeten Schlüsse folgt:

III. *Hält man an einem Fachwerk von* n *Knotenpunkten und* $2n - 3$ *Stäben alle Knotenpunkte fest bis auf einen, der die Stäbe* $0 A_1, 0 A_2, \cdots, 0 A_{k+1}$ *aussendet, so ist das Fachwerk entweder für jede Lage des Punktes* 0 *in sich einspannbar oder dann, wenn* 0 *einer gewissen Kurve* k^{ter} *Ordnung, der Grenzkurve des Fachwerks bezüglich* 0 *angehört. Sie enthält* $A_1, A_2, \cdots, A_{k+1}$. *Gehören* $(r > k+1)$ *drei, vier, fünf,* $\cdots$ *der Stäbe* $A_r A_1, A_r A_2, \cdots, A_r A_{k+1}$ *dem Fachwerk an, so ist* A_r *ein einfacher, zweifacher, dreifacher,* $\cdots$ *Punkt der Grenzkurve.*

Ein Fachwerkstab gehört der Grenzkurve ganz an, sobald er zwei der Punkte $A_1, A_2, \cdots, A_{k+1}$ *miteinander verbindet.*

Der letzte Teil des Theorems läßt sich offenbar verallgemeinern. Bilden nämlich $2r - 3$ Stäbe des Fachwerks, unter denen von den Stäben $0 A_1, 0 A_2, \cdots, 0 A_{k+1}$ etwa $0 A_1, 0 A_2, \cdots, 0 A_{l+1}$ sich befinden mögen, ein

Fachwerk von r Knotenpunkten, so ist das Hauptfachwerk nicht mehr statisch bestimmt, sobald diese Scheibe in sich eingespannt ist. Ihre Grenzkurve l^{ter} Ordnung löst sich also als Bestandteil von der Grenzkurve des Hauptfachwerks ab, so daß nur noch eine Restkurve $(k-l)^{\text{ter}}$ Ordnung zu bestimmen bleibt. Ein Fachwerkstab A_1A_2 ist als Grenzkurve der aus den drei Stäben $0A_1$, $0A_2$, A_1A_2 bestehenden Scheibe anzusehen. Dieselbe Bedeutung hat A_1A_2, wenn die Scheibe nur die beiden Stäbe $0A_1$ und $0A_2$ enthält und also auch nach Beseitigung von $0A_1, 0A_2, \cdots, 0A_{k+1}$ die beiden Punkte A_1, A_2 durch Fachwerkstäbe starr miteinander verbunden sind.

Geht von A_1 außer $A_1 0$ nur noch ein Fachwerkstab A_1A_r aus $(r > k+1)$, so ist er der eine Bestandteil der Grenzkurve. Nach Beseitigung von $A_1 0$ und A_1A_r bleibt ein Fachwerk von $2n-5$ Stäben und $n-2$ Knotenpunkten zurück, welches den wesentlichen Bestandteil der Grenzkurve liefert. Ist das Hauptfachwerk nicht mehr statisch bestimmt, so ist nämlich diese Scheibe entweder in sich eingespannt oder durch die Kräfte, mit denen $A_1 0$ und A_1A_r auf 0 und A_r wirken, nur muß dann auch in A_1 Gleichgewicht hergestellt werden, 0 auf der Geraden A_1A_r liegen.

10. Hennebergs Satz vom Grenzkegelschnitt[1] bildet einen Spezialfall des Theorems III. Man kann ihn $(k=2)$ in folgender Weise formulieren:

Ist an einem Fachwerk von n Knotenpunkten und $2n-3$ Stäben allein der Punkt 0 *beweglich, welcher drei Stäbe $0A_1, 0A_2, 0A_3$ in das Fachwerk entsendet, so kann es für jede Lage von* 0 *in sich einspannbar sein, oder, wenn* 0 *einem Kegelschnitt angehört, welcher die drei Punkte A_1, A_2, A_3 enthält.*

Er kann in folgender Weise ergänzt werden:

Sind A_rA_1, A_rA_2, A_rA_3 feste Stäbe des Fachwerks $(r > 3)$, so gehört A_r dem Grenzkegelschnitte an. Ist A_1A_2 ein Stab des Fachwerks, oder sind A_1, A_2 auch nach Beseitigung von $0A_1, 0A_2, 0A_3$ durch Fachwerkstäbe fest miteinander

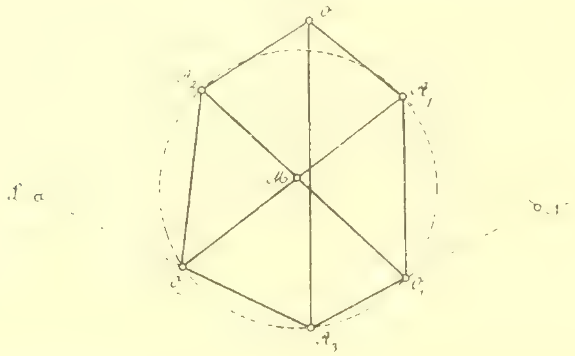
---

[1] Henneberg, Statik der starren Systeme, Darmstadt 1886, S. 219 und 233. Henneberg deformiert ein Fachwerk von n Knotenpunkten und $2n-3$ Stäben, von dessen Knotenpunkt 0 nur die drei Stäbe $0A, 0B, 0C$ ausgehen, in der Art unendlich wenig, daß alle anderen Stäbe ihre Länge bewahren. Er untersucht, ob 0 der Bewegung von A, B, C so folgen kann, daß die drei Stäbe ihre Länge bewahren, und zweitens, ob im Gleichgewicht stehende in den Stäben $0A, 0B, 0C$ wirkende Kräfte das Prinzip der virtuellen Verrückungen für die betrachteten Verschiebungen der Punkte A, B, C erfüllen. Beide Male kommt er auf denselben Kegelschnitt. Die Bezeichnung »Grenzkegelschnitt« wendet Henneberg, in seinem Referat an: Encyclopädie der Mathematik Bd. IV, 5, S. 402 (Fußnote 154).

verbunden, so besteht der Grenzkegelschnitt aus $A_1 A_2$ *und aus einer von* A_3 *ausgehenden Geraden.*

Verbindet z. B. jeder der neun Stäbe eines Fachwerks einen der Punkte 0, 0_1, 0_2 mit einem der Punkte A_1, A_2, A_3, so enthält sein Grenzkegelschnitt bezüglich 0 nach **Hennebergs** Satz die Punkte A_1, A_2, A_3, nach dem von mir begründeten Zusatz aber auch die Punkte 0_1 und 0_2 ($= A_4$ und A_5). Das Fachwerk ist also dann und nur dann in sich einspannbar, wenn alle seine sechs Knotenpunkte einem Kegelschnitte angehören (Fig. 2.). Wir erhalten, anders ausgedrückt, ein Theorem, welches **Grübler**, **Müller-Breslau** und **Land** unabhängig voneinander 1887 entwickelt haben[1]:

Fig. 2.



IV. *Das aus den Seiten eines Sechsecks* $(0 A_2 0_1 A_3 0_2 A_1)$ *und seinen drei Hauptdiagonalen* $(0 A_3, 0_1 A_1, 0_2 A_2)$ *bestehende Fachwerk ist dann und nur dann nicht mehr statisch bestimmt, wenn es aus einem* ***Pascalschen*** *Sechseck entstanden ist, also in einer Geraden die drei Punkte* (L, M, N) *liegen, in deren jedem sich zwei gegenüberliegende Seiten des Sechsecks schneiden.*

---

[1] **Müller-Breslau**, Die Graphische Statik der Baukonstruktionen Bd. 1, 2. Aufl., Leipzig 1887, Art. 138—140, S. 204. Legt man den Stab $A_2 0_2$ fest, so beschreibt A_1, falls man nur $0_2 A_1$ einzieht, einen Kreis mit dem Mittelpunkt 0_2, wenn man dagegen die sieben noch übrigen Stäbe einzieht, eine Kurve, deren Anfangsnormale den Schnittpunkt von $A_2 0_1$ und LN enthält. Diese Bahn berührt den Kreis in ihrem Anfangspunkt A_1, d. h. das Fachwerk ist von unendlich kleiner Verschieblichkeit in sich, dann und nur dann, wenn (Art. 139) L, M, N in einer Geraden liegen. Aus den grundlegenden Entwickelungen von Art. 138 folgt nun, daß das Fachwerk auch in sich einspannbar ist (S. 207). Die allgemeine Theorie führt ferner auf Hilfssechsecke, deren Seiten und Hauptdiagonalen zu denen des gegebenen Sechsecks parallel sind, die aber nicht zu ihm ähnlich sind. Jede Ecke eines solchen Hilfssechsecks ist der Endpunkt der um 90° gedrehten Geschwindigkeit, mit der

II.

11. Ich will jetzt ein Ersatzstabverfahren zur Behandlung der Frage heranziehen. Das Fachwerk besitze die $n (= r + k + 2)$ Knotenpunkte

$$0\,, A_1\,, A_2\,, \cdots, \; A_{k+1}\,, B_1\,, B_2\,, \cdots, \; B_r\,.$$

Außer $0A_1\,, 0A_2\,, \cdots, \; 0A_{k+1}\,,$ den Stäben erster Art, enthalte das Fachwerk $k - l$ Stäbe zweiter Art, deren jeder von zwei Punkten aus der Reihe $A_1\, A_2 \cdots A_{k+1}$ begrenzt wird und $2r + l$ Stäbe dritter Art, von denen jeder einen der Punkte $B_1\,, B_2\,, \cdots, B_r$ mit einem der Punkte $B_1\,, B_2\,, \cdots, B_r\,,$ $A_1, A_2\,, \cdots, A_{k+1}$ verbindet. Die Anzahl der Stäbe ist

$$2n - 3 = k + 1 + k - l + 2r + l = 2k + 2r + 1 = 2(r + k + 2) - 3\,.$$

Das Fachwerk sei nicht für jede Lage von 0 in sich einspannbar. l darf dann nicht negativ sein, weil sonst ein Fachwerk mit $k + 2$ Knotenpunkten

---

sich die entsprechende Ecke des gegebenen Fachwerks bei einer unendlich kleinen Verschiebung in sich bewegt. Aus einem Pascalschen Sechseck kann man durch sehr einfache Ähnlichkeitsbetrachtungen solche Hilfssechsecke ableiten und so die Instabilität des speziellen Fachwerkes nachweisen. Land hat dies in der Arbeit ausgeführt: Land, Über die statische und geometrische Bestimmtheit der Träger, insbesondere der Fachwerkträger. Centralblatt der Bauverwaltung, Jahrgang 7, Berlin 1887, S. 363 (vergl. S. 367). Machen die Dreiecke $L A_2 0_2$ und $L 0 A_3$ unendliche kleine Drehungen um L, so bleiben alle Seiten des Vierecks $A_2 0 A_3 0_2$ der Länge nach ungeändert, in der gleichen Beziehung stehen M und N zu den beiden Vierecken $A_2 0_2 A_1 0_1$ und $0 A_3 0_1 A_1$. Verschiebungen der drei Gelenkvierecke $A_2 0_2 A_3 0$, $A_3 0 A_1 0_1$, $A_1 0_1 A_2 0_2$ in sich sind aber nach einem Hauptsatze der Kinematik dann und nur dann miteinander verträglich, wenn L, M und N in einer Geraden liegen. Grübler hat auf diese Weise die Instabilität des Fachwerks in der Abhandlung bewiesen: Beitrag zur Theorie des ebenen einfachen Fachwerks, Rigaer Industrie-Zeitung, Jahrgang 1887, Nr. 4 und 5 (vergl. Fig. 19).

Müller-Breslau hat die oben angedeutete Entwicklung auch in der Arbeit gegeben: Beitrag zur Theorie des ebenen Fachwerks, Schweizerische Bauzeitung, Bd. 9, Zürich 1887, S. 121. In einer Schlußbemerkung (S. 123) weist hier Müller-Breslau auf zwei Methoden hin, welche die Spannkräfte in den Stäben des Fachwerks zu berechnen gestatten, wenn gegebene äußere Kräfte auf dasselbe wirken. Nach der einen erhält man in Erweiterung des Ritterschen Verfahrens zwei Momentengleichungen für die Spannkräfte der beiden in M sich schneidenden Stäbe; bei der andern Methode wird, unter Benutzung eines von Föppl eingeführten Kunstgriffs, das Fachwerk als ein Dreigelenkträger mit den »imaginären« Gelenken L, M, N aufgefaßt. Beide Male wird das Fachwerk als unbrauchbar, nicht mehr statisch bestimmt, erkannt, wenn L, M, N in einer Geraden liegen.

Bekanntlich hat Henneberg seine Methode der Stabvertauschung an dem Beispiel eines Sechsecks mit drei Diagonalen vollständig durchgeführt, aber das hierbei sich ergebende Kriterium für statische Unbestimmtheit nicht auf eine geometrische Form gebracht: Statik der starren Systeme, S. 234, Tafel X.

$0, A_1, \cdots, A_{k+1}$ und mehr als $2k+1$ Stäben zum Fachwerk gehören würde, das für jede Lage von 0 in sich einspannbar wäre. Wir drücken nun der Reihe nach aus, daß das Fachwerk in den Punkten

$$0, A_1, A_2, \cdots, A_{k+1}, B_1, B_2, \cdots, B_r$$

in sich eingespannt ist. Die $2r$ letzten Gleichungen dieser Art enthalten nur die Spannkräfte der Stäbe dritter Art. $\varkappa(\geqq 1)$ von den Determinanten, die sich aus $2r$ Vertikalreihen des zugehörigen Koeffizientenrechtecks bilden lassen, haben von Null verschiedene Werte. Von allen ihren Werten ist nämlich der Wert D_1 der nach Theorem I. zu $0A_1$ gehörigen Determinante $(2n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung eine lineare homogene Funktion, er verschwindet aber nur für Punkte der Grenzkurve. Unter den $2r+l$ Stäben dritter Art können wir auf $\varkappa$ Weisen, also auf wenigstens eine Weise, l Hauptstäbe auswählen, denen wir ganz beliebige Spannkräfte erteilen können, wenn das Fachwerk in den Punkten $B_1, B_2, \cdots, B_r$ in sich eingespannt sein soll[1]. Sie mögen sich zur Einheit der Spannkraft verhalten, wie

$$u_1 : u_2 : \cdots : u_l : 1\,. \tag{7.}$$

Von den $2r$ anderen Stäben dritter Art erhält der ρ^{te} die Spannkraft

$$S_\rho = S_{\rho,1} u_1 + S_{\rho,2} u_2 + \cdots + S_{\rho,l} u_l\,, \qquad (\rho = 1, 2, \cdots, 2r) \tag{7a.}$$

wenn in den Punkten $B_1, B_2, \cdots, B_r$ Gleichgewicht hergestellt ist. Die $S_{\rho,\beta}$ sind bekannte Spannkräfte. Wir betrachten jetzt alle Stäbe zweiter Art ebenfalls als Hauptstäbe und erteilen ihnen willkürliche Spannkräfte, die sich zur Einheit der Spannkraft verhalten, wie

$$u_{l+1} : u_{l+2} : \cdots : u_k : 1\,. \tag{7b.}$$

Anstatt nun für die willkürlich eingespannten Hauptstäbe Ersatzstäbe einzuführen, beseitigen wir $0A_1, 0A_2, \cdots, 0A_{k+1}$ und stellen in jedem der Punkte $A_1, A_2, \cdots, A_{k+1}$ durch Anbringung je einer äußeren Kraft $P_1, P_2, \cdots, P_{k+1}$ Gleichgewicht her. Diese Kräfte lassen sich in der Form darstellen

$$P_\alpha = u_1 P_{\alpha,1} + u_2 P_{\alpha,2} + \cdots + u_k P_{\alpha,k}\,. \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, k+1) \tag{7c.}$$

das heißt P_α ist die Resultante der Kräfte $u_1 P_{\alpha,1}, u_2 P_{\alpha,2}, \cdots, u_k P_{\alpha,k}$.

---

[1] In dem Koeffizienten-Rechteck auf Seite 6 ($A_0 = 0$) ist $k = 3$, $l = 2$, $r = 2$. Da einer der beiden Hauptstäbe von A_5, der andere von A_6 ausgeht, ist $\varkappa = 9$.

12. $P_1, P_2, \cdots, P_{k+1}$ stehen augenscheinlich miteinander im Gleichgewicht. Die Kräfte $P_{1,\beta}, P_{2,\beta}, \cdots, P_{k+1,\beta}$ der β^{ten} Hauptgruppe stellen das Gleichgewicht her, wenn von allen Hauptstäben allein der β^{te}, und zwar mit der Einheit der Spannkraft, eingespannt ist. Verbindet der β^{te} Hauptstab $(\beta > l)$ die Punkte A_λ und A_μ, so sind $P_{\lambda,\beta}$ und $P_{\mu,\beta}$ die einzigen von Null verschiedenen Kräfte der Hauptgruppe $P_{1,\beta} P_{2,\beta} \cdots P_{k+1,\beta}$ und spannen $A_\lambda A_\mu$ mit der Einheit der Spannkraft ein.

Werden $u_1, u_2, \cdots, u_k$ derart gewählt, daß alle von Null verschiedenen Kräfte der Gruppe $P_1 P_2 \cdots P_{k+1}$ auf einen Punkt 0 wirken, so liegt ein in sich einspannbares Fachwerk mit den Knotenpunkten

$$0, A_1, A_2, \cdots, A_{k+1}, B_1, B_2, \cdots, B_r,$$

vor; 0 ist also ein Punkt der Grenzkurve. Bei der Einspannung wirkt $0A_\alpha$ mit der Kraft P_α auf A_α, mit der entgegengesetzten Kraft auf 0. Die Spannkräfte der Hauptstäbe verhalten sich zur Einheit der Spannkraft, wie

$$u_1 : u_2 : \cdots : u_l : 1 .$$

Von den $2r$ Stäben dritter Art, die nicht Hauptstäbe sind, hat der ρ^{te} gemäß (7a.) die Spannkraft

$$S_\rho = u_1 S_{\rho,1} + u_2 S_{\rho,2} + \cdots + u_l S_{\rho,l} .$$

In allen Punkten $0, A_1, A_2, \cdots, A_{k+1}, B_1, B_2, \cdots, B_r$ ist nun Gleichgewicht hergestellt.

13. Bekanntlich kann man das Moment einer Kraft $P_{\alpha,\beta}$ in bezug auf einen Punkt mit den Koordinaten x, y in der Form ausdrücken

$$p_{\alpha,\beta}(x, y) \equiv a_{\alpha,\beta}(x - a_\alpha) + b_{\alpha,\beta}(y - b_\alpha),$$

wo wieder a_α und b_α die Koordinaten von A_α sein mögen. Das Verhältnis $a_{\alpha,\beta} : b_{\alpha,\beta}$ ist ohne weiteres festgelegt, da

$$a_{\alpha,\beta}(x - a_\alpha) + b_{\alpha,\beta}(y - b_\alpha) = 0$$

die Gleichung der von A_α ausgehenden Wirkungslinie von $P_{\alpha,\beta}$ ist. Nachdem man für irgendeinen Punkt x_0, y_0 das Moment von $P_{\alpha,\beta}$ festgestellt hat, ergeben sich die absoluten Werte von $a_{\alpha,\beta}$ und $b_{\alpha,\beta}$.

Wirken die Kräfte $P_1, P_2, \cdots, P_{k+1}$ auf den Punkt 0 mit den Koordinaten x, y, so hat jede von ihnen bezüglich 0 das Moment Null. Für jeden Punkt der Grenzkurve bestehen also mit Werten von $u_1, u_2, \cdots, u_k$, die nicht alle verschwinden, die $k+1$ Gleichungen nebeneinander

$$u_1 p_{\alpha,1}(x, y) + u_2 p_{\alpha,2}(x, y) + \cdots + u_k p_{\alpha,k}(x, y) = 0. \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, k+1) \quad (8.)$$

Anderseits gelten aber, weil $P_{1,\beta}, P_{2,\beta}, \cdots, P_{k+1,\beta}$ einander das Gleichgewicht halten, die Identitäten

$$p_{1,\beta}(x, y) + p_{2,\beta}(x, y) + \cdots + p_{k+1,\beta}(x, y) \equiv 0. \qquad (\beta = 1, 2, \cdots, k) \quad (9.)$$

Die letzte der Bedingungsgleichungen (8.) ist also eine Folge der k ersten. Die Grenzkurve wird mithin durch die Determinantengleichung dargestellt:

$$\begin{vmatrix} p_{1,1}(x, y), & p_{1,2}(x, y), & \cdots, & p_{1,k}(x, y) \\ p_{2,1}(x, y), & p_{2,2}(x, y), & \cdots, & p_{2,k}(x, y) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{k,1}(x, y), & p_{k,2}(x, y), & \cdots, & p_{k,k}(x, y) \end{vmatrix} = 0. \qquad (10.)$$

Im allgemeinen stellt diese Hauptgleichung eine Kurve k^{ter} Ordnung dar, welche $A_1, A_2, \cdots, A_k, A_{k+1}$ enthält: für $x = a_\alpha, y = b_\alpha$ $(\alpha \leqq k)$ verschwinden nämlich alle Glieder der α^{ten} Horizontalreihe, für $x = a_{k+1}, y = b_{k+1}$ verschwindet die Summe aller Glieder einer jeden Vertikalreihe.

Die Hauptgleichung ist offenbar für jeden Punkt der Ebene erfüllt, wenn Werte $u_1', u_2', \cdots, u_k'$, die nicht alle verschwinden, derart sich bestimmen lassen, daß

$$u_1' P_{\alpha,1}, u_2' P_{\alpha,2}, \cdots, u_k' P_{\alpha,k} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, k) \quad (11.)$$

einander das Gleichgewicht halten. Wegen der Identitäten (9.) stehen nun auch $u_1' P_{k+1,1}, u_2' P_{k+1,2}, \cdots, u_k' P_{k+1,k}$ im Gleichgewicht. Alsdann ist für jeden Punkt 0 der Ebene das Fachwerk in sich einspannnbar. Hierbei sind indes die Stäbe $0A_1, 0A_2, \cdots, 0A_{k+1}$ im allgemeinen entspannt. Die Stäbe zweiter und dritter Art bilden dagegen ein in allen seinen Knotenpunkten $A_1, A_2, \cdots, A_{k+1}, B_1, B_2, \cdots, B_r$ in sich eingespanntes Stabwerk. Für einzelne Punkte 0 der Ebene gibt es daneben aber noch eine andere Einspannung, bei der $0A_1, 0A_2, \cdots, 0A_{k+1}$ beansprucht sind. Durch passende Zusammensetzung dieser Einspannung mit der ersten kann man zwei Stäben des Fachwerks beliebige Spannkräfte erteilen. Im allgemeinen kommen $\frac{1}{2}k(k-1)$ Punkte der Ebene hierbei in Betracht, in sehr speziellen Fällen alle Punkte einer Kurve.

Hätten sich mehr als k, nämlich k' Hauptstäbe ergeben, so lassen sich von den Gleichungen

$$v_1 p_{\alpha,1}(x, y) + v_2 p_{\alpha,2}(x, y) + \cdots + v_{k'} p_{\alpha,k'}(x, y) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, k+1)$$

die k ersten, wie immer wir x, y annehmen, durch Werte $v_1, v_2, \cdots, v_{k'}$ erfüllen, die nicht alle verschwinden. Die letzte ist dann von selbst befriedigt; das Fachwerk ist für jeden Punkt der Ebene in sich eingespannt.

14. Alle Hauptstäbe zweiter Art gehören der Grenzkurve an. Verbindet der β^{te} Hauptstab $(\beta > l)$ A_λ und A_μ, so verschwinden $p_{\lambda,\beta}(x, y)$ und $p_{\mu,\beta}(x, y)$ für jeden Punkt 0 von $A_\lambda A_\mu$, während alle anderen Größen $p_{\alpha,\beta}(x, y)$ der β^{ten} Vertikalreihe identisch verschwinden. Die Hauptgleichung ist also für jeden Punkt 0 von $A_\lambda A_\mu$ erfüllt.

Ein aus Stäben zweiter und dritter Art zusammengesetztes Stabwerk sei in allen den Knotenpunkten in sich eingespannt, welche der Reihe $B_1, B_2, \cdots, B_r$ angehören; dann bilden eine spezielle Gruppe $P_1 P_2 \cdots P_{k+1}$ diejenigen Kräfte, deren jede zur Herstellung des Gleichgewichtes in einem der übrigen Knotenpunkte des Stabwerks anzubringen ist. Diese Kräftegruppe entspringt nach (7c.) aus Parameterwerten, bei denen jeder außerhalb des Stabwerks liegender Stab zweiter oder dritter Art nach (7.) — (7b.) die Spannkraft Null erhält. Enthält die Gruppe nur zwei Kräfte, so gehört die Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte der Grenzkurve an. Enthält sie nur drei Kräfte, so wirken sie stets auf einen Punkt der Grenzkurve. Die Stäbe $B_1A_1, B_1A_2, \cdots, B_1A_q, B_1A_k, B_1A_{k+1}$ $(q \geqq 1)$ bilden ein derartiges Stabwerk, wenn sie dem Fachwerk angehören. $B_1A_1, B_1A_2, \cdots, B_1A_q$ können als die q ersten Hauptstäbe bezeichnet werden, da man ihnen beliebige Spannkräfte erteilen und durch Einspannung von B_1A_k und B_1A_{k+1} in B_1 Gleichgewicht herstellen kann. B_1A_k und B_1A_{k+1} sind alsdann die einzigen Stäbe dritter Art, welche nach (7a.) von Null verschiedene Spannkräfte erhalten, wenn $u_{q+1}, u_{q+2}, \cdots, u_l$ verschwinden. Jede der q ersten Hauptgruppen besteht nur aus drei auf B_1 wirkenden Kräften

$$P_{\beta,\beta}(x, y), \qquad P_{k,\beta}(x, y), \qquad P_{k+1,\beta}(x, y). \qquad (\beta = 1, 2, \cdots, q)$$

Man hat also, wenn x_1, y_1 die Koordinaten von B_1 sind,

$$p_{\alpha,\beta}(x, y) \equiv a_{\alpha,\beta}(x - x_1) + b_{\alpha,\beta}(y - y_1), \qquad (\beta = 1, 2, \cdots, q)$$

wobei $a_{\alpha,\beta}$ und $b_{\alpha,\beta}$ verschwinden, wenn α nicht einen der Werte $\beta, k, k+1$ annimmt. Die Entwicklung der Gleichung (10.) nach steigenden Potenzen von $x - x_1$ und $y - y_1$ beginnt also mit Gliedern q^{ter} Dimension. B_1 ist ein q-facher Punkt 0_1 der Grenzkurve $(q \leqq l)$.

Das Theorem III. ist hiermit von neuem erwiesen.

15. Sind $B_1A_1, B_1A_k, B_1A_{k+1}$; $B_2A_2, B_2A_k, B_2A_{k+1}$ Stäbe des Fachwerks und bezeichnet man B_1A_1 als den ersten, B_2A_2 als den zweiten Hauptstab, so sind in der ersten Vertikalreihe der Hauptgleichung (10.) nur $p_{1,1}(x, y)$ und $p_{1,k}(x, y)$, in der zweiten nur $p_{2,2}(x, y)$ und $p_{2,k}(x, y)$ nicht identisch

gleich Null. Jeder bei der Berechnung der Determinante entstehende Term enthält daher entweder den Faktor $p_{1,1}(x,y)$ oder den Faktor $p_{2,2}(x,y)$; der Schnittpunkt der beiden Geraden

$$p_{1,1}(x,y) = 0, \; p_{2,2}(x,y) = 0$$

oder A_1B_1, A_2B_2 gehört also der Grenzkurve an. Nach dieser Regel war in dem oben (8.) behandelten Beispiel der Schnittpunkt B von A_5A_3 und A_6A_4 ein Punkt der Grenzkurve.

In vier Stäben dritter Art, die von Punkten der Reihe $A_1A_2 \cdots A_{k+1}$ ausgehen, kann man Kräfte anbringen, die einander das Gleichgewicht halten. Sie sind die einzigen von Null verschiedenen Kräfte einer speziellen Gruppe $P_1P_2 \cdots P_{k+1}$, wenn die Stäbe in Knotenpunkten einer Scheibe endigen, die aus Stäben zweiter und dritter Art gebildet ist. Alle die bezeichneten Stäbe bilden offenbar ein Stabwerk der betrachteten Art, das allein durch die vier erwähnten Kräfte in der oben beschriebenen Art eingespannt werden kann. Sie werden nämlich durch die Verbindungsstäbe an die Scheibe übertragen und bewirken eine Einspannung derselben.

Wirken die beiden ersten der vier Kräfte in den Stäben B_1A_1, B_2A_2, die beiden anderen aber in zwei von A_{k+1} ausgehenden Stäben dritter Art, so sind jetzt A_{k+1}, B_1, B_2 durch eine Scheibe aus Stäben zweiter und dritter Art starr miteinander verbunden. Mit ihr bilden A_1B_1 und A_2B_2 ein Stabwerk, das in der beschriebenen Art durch drei in A_1, A_2, A_{k+1} angreifende Kräfte eingespannt werden kann. Sie wirken auf den Schnittpunkt 0_0 der beiden Geraden A_1B_1, A_2B_2, der deshalb ein Punkt der Grenzkurve ist.

Enthält das Fachwerk neben den Stäben A_1B_1, A_2B_2, $0A_{k+1}$ noch zwei Scheiben, deren eine die Punkte $B_1, B_2, \cdots, B_s, A_{k+1}$, deren andere die Punkte $0, A_1, A_2, \cdots, A_k, B_{s+1}, \cdots, B_r$ starr miteinander verbindet, so bildet die Grenzkurve der letzteren Scheibe den einen, 0_0A_{k+1} aber den anderen Bestandteil der Grenzkurve des Hauptfachwerks bezüglich 0. Man erhält einen wohlbekannten Satz, den man sofort bei Durchschneidung der Stäbe $0A_{k+1}$, A_1B_1, A_2B_2 aus dem Ritterschen Verfahren folgern kann: Nur, wenn eine der beiden Scheiben in sich einspannbar ist oder alle drei Verbindungsstäbe einen Punkt miteinander gemein haben, ist das Hauptfachwerk nicht mehr statisch bestimmt. Den einfachsten Fall zweier Dreiecke (A_1A_20 und $B_1B_2A_3$) und dreier Verbindungsstäbe (A_1B_1, A_2B_2, $0A_3$)

hat Mohr 1885 hervorgehoben[1], das allgemeine Theorem findet sich bei Henneberg[2]. Daß man aus zwei Scheiben und drei Verbindungsstäben ein Fachwerk von n Knotenpunkten und $2n-3$ Stäben bilden kann, hat Föppl 1880 entwickelt[3]. Macht, wenn die drei Stäbe den Punkt 0_0 miteinander gemein haben, die eine Scheibe eine unendlich kleine Drehung um 0_0, indes die andere fest bleibt, so bewahren auch die drei Verbindungsstäbe ihre Länge, das Fachwerk ist also, wie Föppl folgert, instabil. Sind die drei Stäbe gleich und gleichgerichtet, so kann man eine endliche Verschiebung der Scheiben gegeneinander vornehmen, bei der alle Stäbe ihre Länge bewahren und man erhält[4] einen sehr bekannten übergeschlossenen Mechanismus.

16. Gelingt es, durch die oben geschilderten einfachen Betrachtungen k voneinander unabhängige Gruppen $P_1 P_2 \cdots P_{k+1}$ zu finden — für die nicht Beziehungen von der Form (11.) bestehen —, so kann man sie wie die Hauptgruppen behandeln und aus ihnen die Hauptgleichung (10.) für die Grenzkurve ableiten. In jedem Falle führt folgendes Verfahren zur Ermittlung der l ersten Hauptgruppen. Man spannt das Fachwerk auf die allgemeinste Art in den Punkten $B_1, B_2, \cdots, B_r$ in sich ein. Den Index 0 gibt man jedem Stab dritter Art, der hierbei ohne Spannkraft bleibt. Sendet also einer der Punkte $B_1, B_2, \cdots, B_r$ entweder von Hause aus oder nach Beseitigung nichteingespannter Stäbe nur zwei voneinander verschiedene Stäbe aus, so erhalten sie den Index 0. Gehören alle Stäbe $0A_1, 0A_2, \cdots, 0A_{k+1}$ einer im Fachwerk enthaltenen Scheibe an, so sind alle außerhalb

---

[1] Mohr, Beitrag zur Theorie des Fachwerks, Der Civilingenieur Bd. 31, Leipzig 1885 S. 289. (Vergl. Fig. 3, S. 297.) Maxwell hat bereits hervorgehoben, daß zu der Figur des Fachwerks dann und nur dann eine reziproke Figur besteht, wenn das Fachwerk als Projektion einer abgestumpften dreiseitigen Pyramide angesehen werden kann, also die drei Verbindungslinien homologer Dreieckspunkte durch einen Punkt gehen. Die reziproke Figur ist dann die Projektion einer dreiseitigen Doppelpyramide. Vergl. Maxwell, On reciprocal figures and diagrams of forces. Philosophical Magazine Bd. 27, Serie 4, London 1864, S. 250. (Vergl. die Figuren IV und 4, S. 255.) Auf die statische Bedeutung reziproker Figuren weist Maxwell in der Einleitung (S. 251) hin.

[2] Henneberg, Statik der starren Systeme, Darmstadt 1886, S. 225.

[3] Föppl, Theorie des Fachwerks, Leipzig 1880, §§ 7 und 8 (S. 10).

[4] Vergl. Fig. 13. der oben (S. 16[1]) angeführten Arbeit von Grübler (Rigaische Industrie-Zeitung, Jahrgang 1887). Auf ein ähnlich gebildetes Fachwerk, das trotz eines überzähligen Stabes endlich verschiebbar ist, hat Land in der oben erwähnten Abhandlung hingewiesen: Centralblatt der Bauverwaltung Bd. 7, Berlin 1887, S. 368. (Vergl. Fig. 16.)

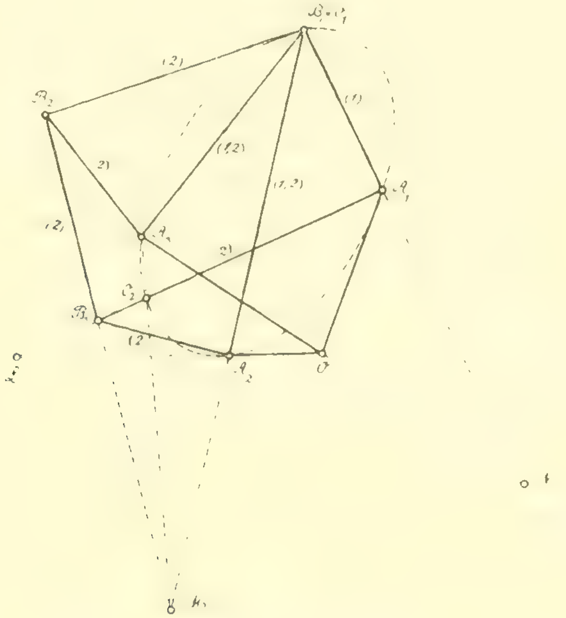
derselben liegenden Stäbe dritter Art ohne Spannkraft, wenn das Fachwerk bezüglich 0 eine Grenzkurve besitzt. Könnte man ein Stabwerk aus solchen Stäben so einspannen, daß in allen seinen außerhalb der Scheibe liegenden Knotenpunkten Gleichgewicht besteht, so würde es in Punkten der Scheibe mit Stabkräften angreifen, die einander das Gleichgewicht halten. Gegen die Voraussetzung würde also für jeden Punkt der Ebene das Hauptfachwerk in sich eingespannt sein, indem entweder das Stabwerk eine Einspannung der Scheibe bewirkt, oder eines von diesen Gebilden in sich eingespannt ist. Nach Beseitigung aller Stäbe der Gruppe (0) wählen wir aus dem Überrest der noch eingespannten Stäbe dritter Art einen beliebigen als ersten Hauptstab aus und erteilen die Bezeichnung (1) allen Stäben, die mit ihm zugleich die Spannkraft Null erhalten. Die Stäbe eines dreistäbigen Knotenpunktes gehören stets in eine solche Gruppe. Aus dem Überrest der Stäbe greifen wir den zweiten Hauptstab beliebig heraus und geben die Bezeichnung (2) allen Stäben, die mit ihm zugleich die Spannkraft Null erhalten, die Bezeichnung (1, 2) aber allen Stäben, welche dann die Spannkraft Null erhalten, wenn dies von beiden Hauptstäben zugleich gilt. Aus dem Überrest der noch eingespannten Stäbe wählen wir den dritten Hauptstab beliebig aus, bilden nach der soeben angegebenen Regel die Gruppen (3), (1, 3) und (2, 3) und bringen in eine neue Gruppe (1, 2, 3) alle die Stäbe, welche sicher die Spannkraft Null erhalten, wenn dies von den drei ersten Hauptstäben zugleich gilt; wir fahren nach dieser Regel fort, bis mit genau l Hauptstäben der gesamte Vorrat der $2r+l$ Stäbe dritter Art erschöpft ist.

17. Das Stabwerk aller der Stäbe, welche in ihrer Bezeichnung die Kennziffer β besitzen, kann genau auf eine Art in seinen der Reihe $B_1 B_2 \cdots B_r$ angehörenden Knotenpunkten in sich eingespannt werden, wenn der β^{te} Hauptstab selbst mit der Einheit der Spannkraft wirkt. Die Kräfte, welche in den Punkten $A_1, A_2, \cdots, A_{k+1}$ zur Herstellung des Gleichgewichts anzubringen sind, bilden die β^{te} Hauptgruppe. Spannt man l_1 Hauptstäbe ein, so erhalten nur die Stäbe von Null verschiedene Spannkräfte, in deren Bezeichnung eine der l_1 Kennziffern vorkommt. Gehören r_1 Knotenpunkte dieses Stabwerks in die Reihe $B_1 B_2 \cdots B_r$, so enthält es höchstens $2r_1+l_1$ Stäbe. Enthielte es außer den Hauptstäben mehr als $2r_1$ Stäbe, so könnte man, entgegen der Voraussetzung, die l ersten Hauptstäbe entspannen und die $2r$ übrigen Stäbe dritter Art so einspannen, daß in $B_1, B_2, \cdots, B_r$ Gleichgewicht besteht. Hierbei würden nämlich sicher einige dem Aggregat

entstammende Stäbe dritter Art von Null verschiedene Spannkräfte erhalten.

18. In dem behandelten Beispiel (Fig. 1., S. 7) bilden, wenn man das Fachwerk bei $0 = A_0$ öffnet, die Stäbe $A_5 A_1$, $A_5 A_2$, $A_5 A_3$ die Gruppe (1), $A_6 A_1$, $A_6 A_2$, $A_6 A_4$ die Gruppe (2). Da die Gruppe (1, 2) hier fehlt, so besteht die erste Hauptgruppe $P_{1,1} P_{2,1} P_{3,1} P_{4,1}$ aus drei in $A_5 A_1$, $A_5 A_2$, $A_5 A_3$ wirkenden Kräften, während $P_{4,1}$ sich auf Null reduziert. Die zweite Hauptgruppe $P_{1,2} P_{2,2} P_{3,2} P_{4,2}$ besteht aus drei in den Geraden $A_6 A_1$, $A_6 A_2$, $A_6 A_4$ wirkenden Kräften, während $P_{3,2}$ herausfällt. Die dritte Hauptgruppe enthält nur zwei Kräfte $P_{3,3}$ und $P_{4,3}$, welche in den Hauptstab zweiter Art $A_3 A_4$ hineinfallen.

Fig. 3.



Ich öffne das Fachwerk im Punkte A_5, den ich jetzt (Fig. 3.) mit 0 bezeichne. Statt A_0, A_4, A_6 treten nach der allgemeinen Regel B_1, B_2, B_3 ein, während A_1, A_2, A_3 ihre alte Bedeutung behalten. Man bezeichne zunächst $B_1 A_1$ mit (1) und erteile den Stäben $B_2 B_3$, $B_2 B_1$, $B_2 A_3$, $B_3 A_1$, $B_3 A_2$, da sie zu gleicher Zeit entspannt werden, die Bezeichnung (2). Mit allen genannten Stäben zugleich erhalten $B_1 A_2$ und $B_1 A_3$ die Spannkraft Null; ihnen gebührt die Bezeichnung (1, 2). Durch Einspannung der Gruppe (2) kann man in B_2 und B_3 Gleichgewicht herstellen; nachdem der Stab (1), der eine Gruppe für sich allein bildet, beliebig eingespannt ist, kann man mit Hilfe der Stäbe (1, 2) dasselbe Ziel in B_1 erreichen. Diese Einspannung der Stäbe dritter Art wird durch drei in A_1, A_2, A_3 angreifende, im Gleichgewicht stehende äußere Kräfte P_1, P_2, P_3 herbeigeführt. Ihre Wirkungslinien treffen sich in einem Punkte 0_0 des Grenzkegelschnittes bezüglich 0. Man braucht nur $0_0 A_1, 0_0 A_2, 0_0 A_3$ solche Spannkräfte zu erteilen, daß sie mit den Kräften P_1, P_2, P_3 auf A_1, A_2, A_3 wirken, um ein in sich einspannbares Fachwerk zu erhalten. Benutzen wir nur die Stäbe (1) und (1, 2), so rückt 0_0 in einen Punkt 0_1 des Grenzkegelschnittes, der mit B_1 zusammenfällt; 0_0 geht in 0_2 über, wenn wir bloß die Stäbe (2) und (1, 2) zur Einspannung benutzen. Auf 0_2 wirken die Kräfte der zweiten Hauptgruppe $P_{1,2}\, P_{2,2}\, P_{3,2}$. Da in A_1 nur $B_3 A_1$ und $P_{1,2}$ angreifen, so muß bei Herstellung des Gleichgewichtes 0_2 in der Geraden $B_3 A_1$ liegen. Das Dreieck $B_1 A_3 B_2$ wird durch drei Kräfte eingespannt, von denen zwei in den Geraden $B_2 B_3$ und $B_1 A_2$ wirken, die dritte aber mit $P_{3,2}$ zusammenfällt. Alle drei halten einander das Gleichgewicht. $A_3 0_2$ geht deshalb durch den Schnittpunkt M von $B_2 B_3$ und $B_1 A_2$ hindurch; 0_2 ist der Schnittpunkt von $B_3 A_1$ und $A_3 M$. Der Grenzkegelschnitt ist durch die fünf Punkte $A_1, A_2, A_3, 0_1, 0_2$ festgelegt. Das Fachwerk der Figur 3. würde also nicht mehr statisch bestimmt sein, wenn $A_1 0_2 A_3 0 A_2 0_1$ ein Pascalsches Sechseck wäre, also wenn

$$L = (A_1 0_2, 0 A_2) = (A_1 B_3, 0 A_2), \qquad M = (0_2 A_3, A_2 0_1) = (B_2 B_3, B_1 A_2),$$
$$N = (A_3 0, 0_1 A_1) = (A_3 0, B_1 A_1)$$

in einer Geraden lägen. Die Beziehung ist, wenn man die veränderte Bezeichnung berücksichtigt, mit der oben (8.) entwickelten identisch. Ist B_2 der einzige bewegliche Fachwerkpunkt, so stellt die Bedingung eine von B_3 ausgehende Gerade dar, welche mit $A_3 B_1$ die Grenzkurve des dreistäbigen Knotenpunktes B_2 bildet.

19. Wir gelangen durch Verallgemeinerung der angestellten Betrachtungen zu folgendem Theorem:

V. *Ein Fachwerk aus* $n\,(= r + 4)$ *Knotenpunkten* $0, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, \cdots, B_r$ *sei bei allgemeiner Lage von* 0 *statisch bestimmt, es enthalte außer den drei Stäben* $0A_1, 0A_2, 0A_3$ *noch* $2r + 2$ *Stäbe, von denen jeder einen der Punkte* $B_1, B_2, \cdots, B_r$ *mit einem der Punkte* $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, \cdots, B_r$ *verbindet. Dieselben können auf wenigstens eine Art auf vier Gruppen* (0), (1), (2) *und* (1, 2) *verteilt werden. Verlangt man nämlich, das Fachwerk solle zunächst in den Punkten* $B_1, B_2, \cdots, B_r$ *in sich eingespannt sein, so werden die Stäbe der Gruppe* (0) *stets ohne Spannkraft bleiben. Aus den Stäben der Gruppen* (1), (1, 2) *und den drei von einem ganz bestimmten Punkte* 0_1 *ausgehenden Stäben* $0_1 A_1, 0_1 A_2, 0_1 A_3$ *kann man aber ein in allen seinen Knotenpunkten in sich eingespanntes Stabwerk bilden. Es enthält, wenn von* $r - r_1$ *der Punkte* $B_1, B_2, \cdots, B_r$ *nur Stäbe der Gruppen* (0) *und* (2) *ausgehen und alle drei Punkte* A_1, A_2, A_3 *Stäbe der Gruppen* (1) *oder* (1, 2) *entsenden, bei* $r_1 + 4$ *Knotenpunkten höchstens* $2r_1 + 4$ *Stäbe, also mindestens einen Stab weniger, als ein statisch bestimmtes Fachwerk von* $r_1 + 4$ *Knotenpunkten. An die Stelle des Stabwerks kann ein Fachwerk treten, wenn nur zwei der Punkte* A_1, A_2, A_3, *deren Verbindungslinie alsdann ein Bestandteil des Grenzkegelschnitts wird, von Stäben der Gruppen* (1) *und* (1, 2) *getroffen werden. Ein Stabwerk gleicher Art bilden die drei von einem Punkte* 0_2 *ausgehenden Stäbe* $0_2 A_1, 0_2 A_2, 0_2 A_3$ *mit den Stäben der Gruppen* (1, 2) *und* (2).

Ein Punkt 0 *liefert ein in sich einspannbares Fachwerk dann und nur dann, wenn er mit den fünf Punkten* $A_1, A_2, A_3, 0_1, 0_2$ *einem Kegelschnitt angehört, also* $0 A_2 0_1 A_3 0_2 A_1$ *ein Pascalsches Sechseck ist.*

Vereinigen sich 0_1 *und* 0_2 *an derselben Stelle* 0_0, *so kann das zugehörige Fachwerk einmal unter Beanspruchung der Stäbe* $0_0 A_1, 0_0 A_2, 0_0 A_3$ *eingespannt werden, dann aber auch, wenn man diese Stäbe entspannt. Da man sie jetzt durch irgend drei andere Stäbe* $0 A_1, 0 A_2, 0 A_3$, *welche die Spannkraft Null erhalten, ersetzen kann, so ist das Fachwerk nun für jeden Punkt der Ebene in sich eingespannt*[1].

---

[1] Verhält sich die Spannkraft des zweiten Hauptstabes zu der des ersten, welcher mit der Einheit der Spannkraft eingespannt wird, wie $u:1$, so wirken die Stäbe $0 A_1$, $0 A_2$, $0 A_3$ des zugehörigen Grenzfachwerks mit den Kräften $P_1 = P_{1,1} + u P_{1,2}$, $P_2 = P_{2,1} + u P_{2,2}$, $P_3 = P_{3,1} + u P_{3,2}$ auf die Punkte A_1, A_2, A_3. Wenn jetzt $A_1 C_1$ und $A_2 C_2$ in Größe und Richtung die Kräfte $P_{1,1}$ und $P_{2,1}$ darstellen, $C_1 X_1$ und $C_2 X_2$ hingegen die Kräfte $u P_{1,2}$ und $u P_{2,2}$, so durchlaufen X_1 und X_2 ähnliche Punktreihen. Die Träger $A_1 X_1$ und $A_2 X_2$ der Kräfte P_1 und P_2 beschreiben also projektive Strahlenbüschel, und man erkennt durch eine Betrachtung, die in ganz anderem Zusammenhange gelegentlich von Müller-Breslau angestellt wurde, die Grenzkurve des Fachwerks hinsichtlich eines dreistäbigen Knotenpunktes als Kegelschnitt. Betrachtet man das Fachwerk als instabil und sind A_1', A_2, A_3', $0'$ die Pole der unendlich kleinen Verschiebungen, die $A_1, A_2, A_3, 0$ bei einer Deformation des Fachwerks erfahren, so müssen $A_1 0$, $A_2 0$, $A_3 0$ bzw. zu $A_1' 0'$, $A_2' 0'$, $A_3' 0'$ parallel sein. Hieraus läßt sich sehr leicht eine projektive Erzeugung des Grenzkegelschnitts ableiten. Vergl. Grübler a. a. O. (Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 35, Leipzig 1890), S. 249 und Schur, Über ebene einfache Fachwerke, Mathematische Annalen, Bd. 48, Leipzig 1897, S. 142 (S. 154).

Das Stabwerk der Stäbe (1) und (1, 2) enthält (17.) in der Tat höchstens $2r_1+1$ Stäbe, wenn r_1 von seinen Knotenpunkten in die Reihe B_1, $B_2, \cdots, B_r$ gehören ($l_1 = 1$); mit ihnen bilden die drei neuen Stäbe $0_1 A_1$, $0_1 A_2$, $0_1 A_3$ ein in sich eingespanntes Stabwerk von r_1+4 Knotenpunkten und höchstens $2r_1+4$ Stäben. Wenn aber A_1 unbeansprucht bleibt, 0_1 auf $A_2 A_3$ liegt, hat man bei r_1+3 Knotenpunkte höchstens $2r_1+3$ Stäbe, also möglicherweise ein in sich eingespanntes Fachwerk vor sich. In dem Beispiel (18.) soll das Stabwerk aus sechs Stäben $0_1 A_1$, $0_1 A_2$, $0_1 A_3$, $B_1 A_1$, $B_1 A_2$, $B_1 A_3$ in allen fünf Knotenpunkten in sich eingespannt sein, hierzu müssen aber 0_1 und B_1 zusammenfallen. Bei der Bestimmung von 0_2 wird ein in sich eingespanntes Stabwerk von sieben Knotenpunkten und zehn Stäben verlangt. Die Aufgabe kommt aber, indem man für die beiden aufeinanderfallenden Stäbe $A_1 0_2$ und $A_1 B_3$ den einen Stab $0_2 B_3$ einsetzt, auf die Herstellung eines in sich eingespannten Fachwerks aus sechs Knotenpunkten und neun Stäben zurück. An einem später (24.) beiläufig behandelten Beispiel treten die Verhältnisse ganz unverzerrt hervor.

Ist übrigens etwa $A_2 A_3$ ein Fachwerkstab, so verteilen sich alle Stäbe dritter Art auf die Gruppen (0) und (1); alsdann ist $0_1 A_1$ der eine, $A_2 A_3$ der andere Bestandteil des Grenzkegelschnitts.

III.

20. Obwohl bekanntlich ein jedes Fachwerk von n Knotenpunkten und $2n-3$ Stäben zwei- oder dreistäbige Knotenpunkte enthält, kann es in manchen Fällen vorteilhaft sein, bei der Untersuchung der statischen Bestimmtheit die Grenzkurve eines Knotenpunktes zu ermitteln, der mehr als drei Stäbe entsendet. Ein $(k+1)$-stäbiger Knotenpunkt 0 kann so gelegt werden, daß das Fachwerk unter Ausschaltung irgendeines Stabes eingespannt ist. Mit ihm bleiben alle Stäbe der Gruppe außer Betracht, die er als Hauptstab festlegen würde. Diese Bedingung erfüllen $\frac{1}{2}k(k-1)$ Punkte der Grenzkurve. Ist einer der Stäbe ohne Spannkraft, die von dem beweglichen Knotenpunkt 0 ausgehen, so hat man unter $\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ Punkten der Grenzkurve die Auswahl. Durch Beseitigung der nicht eingespannten Stäbe entsteht in dem einen wie in dem anderen Falle im allgemeinen ein Stabwerk, das weniger Stäbe enthält als ein statisch bestimmtes Fachwerk mit derselben Anzahl von Knotenpunkten, dennoch aber in sich eingespannt ist.

Die Grenzkurve eines vierstäbigen Knotenpunktes hängt von den drei Hauptgruppen

$$P_{1,1}\,P_{2,1}\,P_{3,1}\,P_{4,1}\,, \qquad P_{1,2}\,P_{2,2}\,P_{3,2}\,P_{4,2}\,, \qquad P_{1,3}\,P_{2,3}\,P_{3,3}\,P_{4,3}$$

ab. Jede enthält vier im Gleichgewicht stehende, in A_1, A_2, A_3, A_4 angreifende Kräfte. Auf jeden Punkt 0 der Grenzkurve wirken (11.) die vier Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 einer aus den Hauptgruppen zusammengesetzten Gruppe. Es ist also

$$P_\alpha = u_1 P_{\alpha,1} + u_2 P_{\alpha,2} + u_3 P_{\alpha,3}\,. \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

Wir wählen jetzt u_1', u_2', u_3' derart, daß

$$u_1' P_{1,1}\,,\ u_2' P_{1,2}\,,\ u_3' P_{1,3}$$

einander das Gleichgewicht halten. Die drei Kräfte

$$P_\alpha' = u_1' P_{\alpha,1} + u_2' P_{\alpha,2} + u_3' P_{\alpha,3} \qquad (\alpha = 2, 3, 4)$$

sind die einzigen von Null verschiedenen Kräfte einer Gruppe, die sich aus den drei Hauptgruppen zusammensetzen läßt, und stehen deshalb im Gleichgewicht. Sie wirken auf einen Punkt 0_1 der Grenzkurve; $0_1 A_2$, $0_1 A_3$, $0_1 A_4$ bilden mit den Stäben zweiter und dritter Art ein in sich einspannbares Stabwerk im allgemeinen von n Knotenpunkten und $2n-4$ Stäben. Sollten alle vier Kräfte P_α' sich auf Null reduzieren, die drei Hauptgruppen nicht unabhängig voneinander sein, so wäre das Fachwerk für jeden Punkt der Ebene in sich einspannbar. Außer 0_1 ergeben sich noch drei spezielle Punkte 0_2, 0_3, 0_4 gleicher Art. Aus den zugehörigen singulären Kräftegruppen

$$P_1'' P_2'' P_3'' P_4''\,, \qquad P_1''' P_2''' P_3''' P_4'''\,, \qquad P_1^{(4)} P_2^{(4)} P_3^{(4)} P_4^{(4)}$$

fallen die Kräfte P_2'', P_3''', $P_4^{(4)}$ heraus.

21. Offenbar bilden

$$P_1 = v'' P_1'', \quad P_2 = v' P_2', \quad P_3 = v' P_3' + v'' P_3'', \quad P_4 = v' P_4' + v'' P_4''$$

eine aus den drei Hauptgruppen zusammengesetzte und daher unserer Mannigfaltigkeit angehörende Gruppe. Die vierte singuläre Gruppe ist unter diesen speziellen Gruppen enthalten, wenn entweder P_4' oder P_4'' herausfällt oder $v' P_4'$ und $v'' P_4''$ einander aufheben. Entweder löst sich also die Gerade $A_2 A_3 (P_4' = 0)$ oder $A_3 A_1 (P_4'' = 0)$ von der Grenzkurve als Bestandteil ab, oder 0_1 und 0_2 liegen mit A_4 in einer Geraden. Lassen wir zerfallende Grenzkurven bei Seite, so tritt der besondere Fall tatsächlich ein, wenn 0_1, 0_2, und mit ihnen 0_3 und 0_4, in einen Punkt 0_0 hineinfallen.

0_0 wird dann ein Doppelpunkt der Grenzkurve, und es läßt sich sowohl die dritte als auch die vierte singuläre Gruppe durch Zusammensetzung der beiden ersten gewinnen. Diesen Fall behandle ich ganz kurz weiter unten (29.). Liegen endlich 0_1 und 0_2 mit A_4 in einer Geraden, so läßt sich wohl die vierte singuläre Gruppe — 0_4 ist der Schnittpunkt von $0_1 A_2$ und $0_2 A_1$ —, nicht aber die dritte aus den beiden ersten singulären Gruppen zusammensetzen. Bei passender Bezeichnung können wir unter den getroffenen Einschränkungen stets die dritte Gruppe als unabhängig von den beiden ersten betrachten; im allgemeinen trifft es natürlich für die dritte und die vierte singuläre Gruppe zu.

22. Dies vorausgesetzt, kann die allgemeinste Gruppe der Mannigfaltigkeit in der Form dargestellt werden:

$$P_1 = v''P_1'' + v'''P_1''', \; P_2 = v'P_2' + v'''P_2''', \; P_3 = v'P_3' + v''P_3'', \; P_4 = v'P_4' + v''P_4'' + v'''P_4'''. \quad (12.)$$

Wirken nun P_1, P_2, P_3, P_4 auf einen Punkt 0, so folgt (Fig. 4., S. 32).

VI. *Mit dem gegebenen Fachwerk zugleich geht stets ein Normalfachwerk aus acht Knotenpunkten* $0, 0_1, 0_2, 0_3, A_1, A_2, A_3, A_4$ *und* 13 $(= 2.8 - 3)$ *Stäben* $0A_1, 0A_2, 0A_3, 0A_4, 0_1A_2, 0_1A_3, 0_1A_4, 0_2A_1, 0_2A_3, 0_2A_4, 0_3A_1, 0_3A_2, 0_3A_4$ *in ein Grenzfachwerk über. Ihre Grenzkurven bezüglich* 0 *fallen zusammen.*

Man braucht nur die Stäbe $0_1A_2, 0_1A_3, 0_1A_4$ so einzuspannen, daß sie auf 0_1 mit den Kräften $v'P_2', v'P_3', v'P_4'$ wirken und entsprechende Festsetzungen für 0_2 und 0_3 zu treffen, um den Satz zu bestätigen. P_1, P_2, P_3, P_4 sind eben die Kräfte, mit welchen die Stäbe $0A_1, 0A_2, 0A_3, 0A_4$ bei beiden zugleich in sich eingespannten Fachwerken auf die Knotenpunkte A_1, A_2, A_3, A_4 wirken. Greifen nun in den Knotenpunkten $0, A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, \cdots, B_r$ des gegebenen Fachwerks im Gleichgewicht stehende äußere Kräfte $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, \cdots, Q_{r+4}$ an, so können (11.) nach Beseitigung der drei Hauptstäbe — sie sind hier alle Stäbe dritter Art — die $3r$ übrigen Stäbe dritter Art auf genau eine Weise so eingespannt werden, daß die in B_β angreifenden Stabkräfte mit $Q_{r+\beta}$ im Gleichgewicht stehen $(\beta = 1, 2, \cdots, r)$. Ist nun Q'_α die Resultante von Q_α und den Stabkräften, die auf A_α in Stäben dritter Art wirken, so stehen $Q_0, Q'_1, Q'_2, Q'_3, Q'_4$ miteinander im Gleichgewicht und bewirken eine Einspannung des Normalfachwerks, bei der $0A_1, 0A_2, 0A_3, 0A_4$ gerade die Spannkräfte erhalten, die ihnen auch bei der Einspannung des gegebenen Fachwerks zukommen. Aus den Spannkräften der übrigen Stäbe des Normalfachwerks ergeben sich rückwärts diejenigen der drei Hauptstäbe. Natürlich kommen für diese zweite Betrachtung nur statisch bestimmte Fachwerke in Betracht.

Gerade ein solches Normalfachwerk hat **Müller-Breslau** sehr ausführlich behandelt. Einmal ist es bekanntlich das überhaupt erste Beispiel eines Fachwerks, dessen Berechnung nach der kinematischen Methode wirklich vollständig durchgeführt wurde, wobei sich ein sehr einfaches Kennzeichen der Stabilität ergab. Andererseits wird zur Berechnung des Fachwerks ein sehr übersichtliches Ersatzstabverfahren angegeben[1].

23. Um die Grenzkurve des Fachwerks bezüglich 0 festzulegen, spezialisieren wir zuerst v', v'', v''' so, daß $v'P'_4$, $v''P''_4$, $v'''P'''_4$ einander das Gleichgewicht halten. Alsdann stehen

$$P_1^{(1)} = v''P''_1 + v'''P'''_1, \qquad P_2^{(1)} = v'P'_2 + v'''P'''_2, \qquad P_3^{(1)} = v'P'_3 + v''P''_3$$

miteinander im Gleichgewicht und wirken auf den oben eingeführten Punkt 0_4 der Grenzkurve. Da nun 0_4A_4 ohne Spannkraft ist, so bilden die zwölf Stäbe 0_iA_k $(i = 1, 2, 3, 4, k = 1, 2, 3, 4, i \gtrless k)$ offenbar ein in sich einspannbares Stabwerk.

Von den beiden Vierecken $0_1A_20_3A_4$ und $A_30_4A_10_2$ ist das erste ein Seilpolygon der Kräfte, mit denen 0_1A_3, A_20_4, 0_3A_1, A_40_2 auf die Punkte 0_1, A_2, 0_3, A_4 wirken; das zweite ein Seilpolygon der Kräfte, mit denen dieselben Stäbe auf A_3, 0_4, A_1, 0_2 wirken. Jeder Stab wirkt auf seine beiden Endpunkte mit entgegengesetzt gleichen Kräften. Nach einem wohlbekannten **Culmann**schen Satze über Seilpolygone liegen deshalb in einer Geraden die vier Punkte, in deren jedem sich zwei homologe Seiten der beiden Vierecke treffen, also die vier Punkte

$$U_{1,2} = 0_1A_2, A_30_4;\ U_{2,3} = A_20_3, 0_4A_1;\ U_{3,1} = 0_3A_4, A_10_2;\ U_{4,1} = A_40_1, 0_2A_3,$$

so daß 0_4 allein mit Hilfe des Lineals aus 0_1, 0_2, 0_3, A_1, A_2, A_3, A_4 abgeleitet werden kann. Ein Blick auf Figur 5. (S. 37) zeigt uns:

VII. *Die zwölf Stäbe* 0_iA_k $(i = 1, 2, 3, 4, k = 1, 2, 3, 4, i \gtrless k)$ *eines in sich eingespannten Stabwerks aus acht Knotenpunkten und zwölf Stäben sind die Projektionen der Kanten eines Hexaeders allgemeinster Art auf die Ebene.*

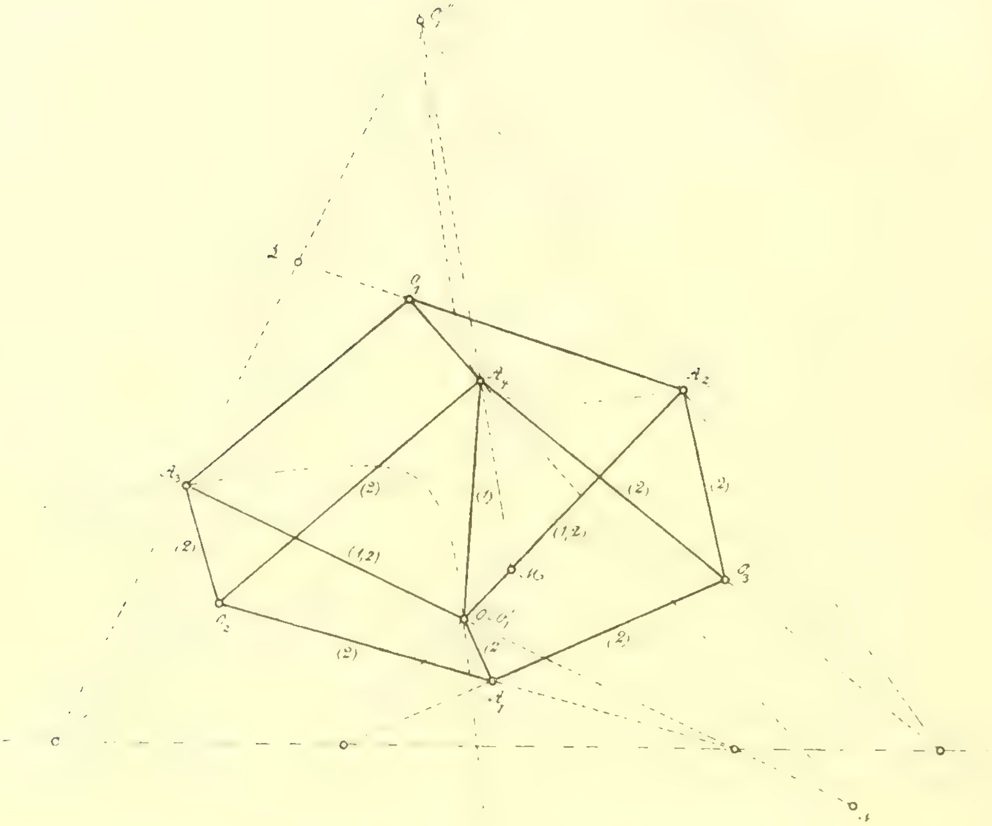
Dies steht im Einklang mit **Maxwells** Satz[2], nach dem jedes Stabwerk, welches die perspektivische Darstellung eines Polyeders ist, eine zu ihr

---

[1] Die Graphische Statik der Baukonstruktionen, Bd. I, 2. Aufl., Leipzig 1887 (Art. 138) und Schweizerische Bauzeitung Bd. 9, 1887, S. 121 (§ 3).

[2] **Maxwell**, On reciprocal figures, frames and diagrams of forces, Transactions of the Royal Society of Edinburgh, Bd. 26, (The scientific papers of **James Clerk Maxwell**

Fig. 4.



reziproke Figur besitzt, welche wiederum die perspektivische Darstellung eines Polyeders ist.

24. Hält man an einem Normalfachwerk die Knotenpunkte A_1, A_2, A_3, A_4, 0, 0_2, 0_3 fest, so ist es nun leicht, den Grenzkegelschnitt desselben hinsichtlich 0_1 zu ermitteln. Bezeichnet man (gemäß Theorem V.) $0 A_4$ mit (1) und alle von 0_3, A_1, 0_2 ausgehenden Stäbe mit (2), so erhalten $0 A_2$ und $0 A_3$ die Bezeichnung (1, 2). Sind bei der Einspannung des Fachwerks in sich die Stäbe der Gruppe (2) unbeansprucht, so rückt 0_1 in die

---

Bd. 2, Cambridge 1890, S. 164.) Die Projektionen eines Hexaeders und eines Oktaeders werden als reziproke Figuren V und 5 einander gegenübergestellt in der schon oben genannten Arbeit (Philosophical Magazine, Bd. 27, Serie 4, London 1864, S. 256).

Lage $0_1' = 0$. Bleibt dagegen nur der Stab (1) ohne Spannkraft, so geht 0_1 in die Ecke $0_1''$ eines in sich eingespannten Stabwerks der soeben betrachteten Art über. Es müssen sich also (23.) entsprechende Seiten der beiden Vierecke

$$0_1'' A_2\, 0\, A_3 \text{ und } A_4\, 0_3\, A_1\, 0_2$$

in Punkten treffen, die einer Geraden angehören. Nach Ermittlung von $0_1''$ hat man nun festzustellen, ob 0_1 mit den fünf Punkten A_2, A_3, A_4, $0_1'$ $(= 0)$, $0_1''$ auf einem Kegelschnitt liegt. Das Fachwerk der Figur 4. wäre nicht mehr statisch bestimmt, wenn L, M, N in einer Geraden lägen[1].

25. Ich betrachte nochmals die Gruppen $P_1 P_2 P_3 P_4$, die sich nach den Gleichungen

$$P_1 = v'' P_1'', \quad P_2 = v' P_2', \quad P_3 = v' P_3' + v'' P_3'', \quad P_4 = v' P_4' + v'' P_4'',$$

aus den beiden ersten singulären Gruppen und somit auch aus den drei Hauptgruppen zusammensetzen lassen. P_1 wirkt in der Geraden $A_1 0_2$, P_2 in der Geraden $A_2 0_1$; auf den Schnittpunkt $C_{1,2}$ von $A_1 0_2$ und $A_2 0_1$ wirkt, wenn wir $v' : v''$ passend wählen, zuerst P_3, und mit ihr die Kraft P_4, die mit P_1, P_2, P_3 im Gleichgewicht steht[2]. Die Grenzkurve des Normalfach-

---

[1] Zur Prüfung der Stabilität wurde hier das Sechseck $0_1 A_2\, 0\, A_3\, 0_1'' A_4$ gewählt, damit keiner der drei Punkte L, M, N über die Grenzen des Blattes hinausfällt. An sich wäre es natürlicher gewesen, das Sechseck $0_1 A_4\, 0\, A_3\, 0_1'' A_2$ zu nehmen, da das Einziehen der Geraden $0_1'' A_4$ alsdann erspart würde. Zur Verdeutlichung sind in die Figuren 1. bis 4. die betreffenden Grenzkegelschnitte eingezeichnet.

[2] Von den Wirkungslinien der drei Kräfte P_1, P_2, P_3, welche die Werte v', v'', v''' nach den Gleichungen (12.) festlegen, beschreiben zwei projektive Strahlenbüschel, wenn die dritte festgehalten wird, und es ist im allgemeinen jede der Wirkungslinien durch die beiden anderen eindeutig bestimmt. Die Wirkungslinie von P_3 wird aber unbestimmt, wenn P_1 und P_2 in den Geraden $A_1 0_2$ und $A_2 0_1$ liegen, oder wenn sie in die Geraden $A_1 0_3$ und $A_2 0_3$ fallen. Im ersten Falle handelt es sich um die oben besprochenen besonderen Gruppen $(v''' = 0)$, im zweiten Falle reduziert sich P_3 auf Null; jede von A_3 ausgehende Gerade kann als ihr Träger angesehen werden. Dieser Zusammenhang würde übrigens fortbestehen, wenn $P_{1,\beta}\, P_{2,\beta}\, P_{3,\beta}$ $(\beta = 1, 2, 3)$ aus drei beliebigen Kräften bestände, deren Resultante nicht mehr durch einen festen Punkt A_4 geht. Die drei Wirkungslinien sind durch die von Schubert zuerst behandelte trilineare Beziehung miteinander verknüpft. Die singulären Elemente derselben sind die sechs Geraden $0_1 A_2, 0_1 A_3, 0_2 A_3, 0_2 A_1, 0_3 A_1, 0_3 A_2$. Vergl. Schubert, Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilden, Mathematische Annalen, Bd. 17, Leipzig 1880, S. 457 (vergl. § 2).

Bei der Grenzkurve eines $(k+1)$-stäbigen Knotenpunktes stehen ebenso die Wirkungslinien der k ersten Kräfte einer Gruppe $P_1 P_2 \ldots P_k P_{k+1}$ in k-fach linearer Beziehung. Die werks hinsichtlich 0 enthält also $C_{1,2}$ und natürlich noch fünf andere Punkte ähnlicher Art $C_{3,1}$, $C_{2,3}$, $C_{1,4}$, $C_{2,4}$, $C_{3,4}$ $(C_{i,k} = A_i 0_k, A_k 0_i)$.

Auf einer gegebenen Kurve dritter Ordnung (C_3) nehme man die Punkte $0_1, A_1, A_2, A_3$ beliebig an und bestimme zwei weitere Punkte 0_2 und 0_3 derselben durch die Forderung, daß $0_1 A_2$ und $A_1 0_2$ einerseits, $0_1 A_3$ und $A_1 0_3$ anderseits sich in je einem Punkte ($C_{1,2}$ bezw. $C_{1,3}$) von C_3 treffen mögen. Ein neunter Punkt A_4 der Kurve falle nicht mit dem Punkte zusammen, den alle $0_1, 0_2, 0_3, A_1, A_2, A_3, C_{1,2}, C_{1,3}$ enthaltenden Kurven dritter Ordnung mit ihr gemein haben. Als einzige Kurve, welche die neun aufgezählten Punkte enthält, ist C_3 alsdann identisch mit der Grenzkurve des Normalfachwerks mit den Knotenpunkten $0, 0_1, 0_2, 0_3, A_1, A_2, A_3, A_4$ und nimmt deshalb außer dem oben konstruierten Punkte 0_4 die Punkte $C_{1,4}$, $C_{2,4}$, $C_{3,4}$ auf. Den Punkt $C_{2,3}$ haben alle Kurven dritter Ordnung miteinander gemein, welche $0_1, 0_2, 0_3, A_1, A_2, A_3, C_{1,2}, C_{1,3}$ enthalten. Das hierin ausgesprochene Theorem ist auch geometrisch evident[1], denn $0_1 A_2$, $0_2 A_3$, $0_3 A_1$ bilden eine Kurve dritter Ordnung, welche die acht genannten Punkte aufnimmt, $A_1 0_2$, $A_2 0_3$, $A_3 0_1$ aber eine zweite Kurve gleicher Art. Sie treffen sich in dem neunten Punkte $C_{2,3} = A_2 0_3, A_3 0_2$, welcher der gesuchte notwendige Punkt ist[1]. Es besteht offenbar folgendes Theorem:

VIII. *Auf jeder Kurve dritter Ordnung lassen sich eindeutig aufeinander bezogene Punktreihen* $A_1 A_2 A_3 \cdots$ *und* $0_1 0_2 0_3 \cdots$ *von der Art konstruieren,*

Wirkungslinien irgend zweier von diesen Kräften beschreiben projektive Strahlenbüschel, wenn diejenigen der $k-2$ anderen festgelegt werden, und es ist im allgemeinen jede der k Wirkungslinien durch die $k-1$ anderen festgelegt. Die Rolle der Punkte $0_1, 0_2, 0_3$ und $C_{2,3}, C_{3,1}, C_{1,2}$ übernehmen jetzt gewisse Gruppen von $\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ Punkten der Grenzkurve, wie ich bei anderer Gelegenheit ausführlich darzulegen gedenke. Hier sei nur bemerkt, daß die allgemeinste Kurve vierter Ordnung sich als Grenzkurve eines Fachwerks bezüglich eines fünfstäbigen Knotenpunktes deuten läßt.

[1] Man vergleiche z. B. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven, Leipzig 1873, S. 395 (Art. 356). Der wohlbekannte Satz, welcher mannigfache Umformungen gestattet und z. B. als Bewegungsgesetz gedeutet werden kann, bildet für alle rein geometrischen Untersuchungen über Kurven dritter Ordnung die Grundlage.

Unter den (1, 1)-Korrespondenzen des Theorems VIII. gibt es bekanntlich drei bestimmte, bei denen je zwei Punkte A_p und 0_p einander wechselseitig entsprechen. Die Tangenten der Kurve in zwei solchen konjugierten Punkten A_p und 0_p treffen sich in einem Punkte der Kurve und es entspricht dem Punkte $C_{p,q}$ der Schnittpunkt von $A_p A_q$ und $0_p 0_q$. Die Festlegung der Kurve mittels dreier Paare konjugierter Punkte, indem man aus je zwei Paaren nach der soeben gegebenen Regel immer erneut ein drittes ableitet, hat Schröter vorgeschlagen.

daß $A_m 0_n$ *und* $0_m A_n$ *sich in einem Punkte* $C_{m,n}$ *der Kurve dritter Ordnung treffen. Durch ein einziges Paar homologer Punkte sind die beiden Reihen festgelegt.*

Verbindet man jeden von vier Punkten A_p, A_q, A_r, A_s *mit den Punkten, welche den drei anderen in der Reihe* $0_1 0_2 0_3 \cdots$ *entsprechen, also z. B.* A_p *mit* 0_q, 0_r, 0_s, *so entsteht ein in sich einspannbares Stabwerk aus acht Knotenpunkten und zwölf Stäben. In einer Geraden liegen also die vier Punkte, in deren jedem sich zwei homologe Seiten der beiden Vierecke* $0_p A_q 0_r A_s$ *und* $A_r 0_s A_p 0_q$ *schneiden.*

Für die geometrische Begründung des zweiten Teils betrachte man etwa die beiden Geradenquadrupel $0_1 A_2$, $0_2 A_3$, $0_3 A_4$, $0_4 A_1$ und $A_1 0_2$, $A_2 0_3$, $A_3 0_4$, $A_4 0_1$ als Kurven vierter Ordnung. Die Grenzkurve enthält 12 von den 16 Schnittpunkten beider Kurven, nämlich $A_1, A_2, A_3, A_4, 0_1, 0_2, 0_3, 0_4, C_{1.2}, C_{2.3}, C_{3.4}, C_{4.1}$; die vier anderen, $U_{1.2}, U_{2.3}, U_{3.4}, U_{4.1}$, gehören deshalb nach einem bekannten Satze einer Geraden an[1]. Die Umkehrung dieses Gedankenganges benutzt im wesentlichen Rohn[2], indem er zwei Kegelschnitt-

---

[1] Vgl. z. B. E. Salmon-Fiedler, Ebene Kurven, Art. 31, S. 21.

[2] Rohn, Beiträge zur Theorie der ebenen Kurven 3. Ordnung, Berichte der mathematisch-physischen Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Bd. 58, Sitzung vom 18. Juni 1906, S. 200 (vergl. Nr. 11). Die bekannte Aufgabe, durch neun Punkte $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$ eine Kurve dritter Ordnung zu legen, welche auch Rohn (Nr. 14 ff) löst, kann mit Hilfsmitteln der graphischen Statik in folgender Weise behandelt werden. Man spanne zunächst das statisch unbestimmte Fachwerk aus sieben Knotenpunkten $A_1, A_2, A_3, A_4, B_2, B_3, B_4$ und zwölf Stäben $A_\alpha B_\beta$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$, $\beta = 2, 3, 4$) in sich ein, was am besten durch vorübergehende Einfügung eines überzähligen Stabes, etwa $A_3 A_4$, geschieht. Nach vollzogener Einspannung wirke der Stab $A_\alpha B_\beta$ auf A_α mit der Kraft $P_{\alpha,\beta}$. Jetzt spanne man das statisch bestimmte Fachwerk aus den neun Stäben $B_1 B_5$, $B_\beta A_\alpha$ ($\beta = 1, 5$; $\alpha = 1, 2, 3, 4$) zuerst durch die Kräfte $P_{1,2}, P_{2,2}, P_{3,2}, P_{4,2}$, die einander das Gleichgewicht halten, ein, hernach durch die Kräfte $P_{1,3}, P_{2,3}, P_{3,3}, P_{4,3}$, für die das Gleiche gilt. Beide Einspannungen setze man so zusammen, daß $B_1 B_5$ keine Spannkraft aufweist. Wenn nun $B_1 A_\alpha$ auf A_α mit der Kraft $P_{\alpha,1}$ wirkt, so ist jetzt die Kurve dritter Ordnung als Grenzkurve durch die drei Kräftegruppen

$$P_{1,1} P_{2,1} P_{3,1} P_{4,1}, \qquad P_{1,2} P_{2,2} P_{3,2} P_{4,2}, \qquad P_{1,3} P_{2,3} P_{3,3} P_{4,3}$$

festgelegt. Wir erhalten sofort die vier Punkte $0_1, 0_2, 0_3, 0_4$ und können nunmehr nach den obigen Regeln (26., 27.) im allgemeinen eine unbegrenzte Anzahl von Punkten der Grenzkurve finden. Wenn man B_5 bei Seite läßt und $P_{1,1}, P_{2,1}, P_{3,1}, P_{4,1}$ beliebig so wählt, daß sie von B_1 ausgehen und einander das Gleichgewicht halten, so entstehen für $0_1, 0_2, 0_3, 0_4$ Kegelschnitte als Orte, welche der Reihe nach B_1, A_2, A_3, A_4; B_1, A_3, A_1, A_4; B_1, A_1, A_2, A_4; B_1, A_1, A_2, A_3 aufnehmen. Sie haben den Punkt miteinander gemein, in dem sich alle $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4$ enthaltenden Kurven dritter Ordnung treffen. Sobald das Hilfsfachwerk in sich eingespannt ist, hat man auch die Kurve dritter Ordnung vor sich, die etwa büschel mit den Grundpunkten $A_1, 0_3, U_{2,3}, U_{3,4}$ und $A_3, 0_1, U_{1,2}, U_{4,1}$ derart projektiv aufeinander bezieht, daß (Fig. 5.) den Geradenpaaren

$$A_1 U_{2,3}, 0_3 U_{3,4}; \qquad A_1 U_{3,4}, 0_3 U_{2,3}; \qquad A_1 0_3, U_{2,3} U_{3,4}$$

des ersten die Geradenpaare

$$A_3 U_{1,2}, 0_1 U_{4,1}; \qquad A_3 U_{4,1}, 0_1 U_{1,2}; \qquad A_3 0_1, U_{1,2} U_{4,1}$$

des zweiten entsprechen. Man kann das Erzeugnis in eine Gerade $U_{2,3} U_{3,4}$ oder $U_{1,2} U_{4,1}$ und eine Kurve dritter Ordnung zerfallen lassen; sie enthält außer $C_{1,2}$ die zwölf Punkte $A_1, A_2, A_3, 0_1, 0_2, 0_3, C_{1,3}, C_{2,3}, A_4, 0_4, C_{1,4}, C_{3,4}$. Aus den neun ersten entspringen die drei letzten durch eine lineare Konstruktion.

26. Rohn gibt die Anregung, indem man A_4 immer erneut mit schon bekannten Punkten zusammenfallen läßt und neue Punkttripel konstruiert, den Verlauf der Kurve festzulegen. Diese Aufgabe gestaltet sich sehr übersichtlich durch den Satz:

VIIIa. *In einem Punkte P der Kurve treffen sich die drei Geraden* $C_{2,3} C_{1,4}$, $C_{3,1} C_{2,4}$, $C_{1,2} C_{3,4}$.

Man betrachte die beiden Punktquadrupel $A_1 0_1 C_{2,3} C_{2,4}$ und $A_2 0_2 C_{1,3} C_{1,4}$ der Grenzkurve (Fig. 5.). Es gehören ihr an die Punkte $C_{1,2} = A_1 0_2, A_2 0_1$; $0_3 = A_1 C_{1,3}, A_2 C_{2,3}$; $0_4 = A_1 C_{1,4}, A_2 C_{2,4}$. Sie muß also auch den Punkt $P = C_{2,3} C_{1,4}, C_{3,1} C_{2,4}$ enthalten, da die beiden Quadrupel nach derselben Regel einander entsprechen, wie $0_1 0_2 0_3 0_4$ und $A_1 A_2 A_3 A_4$. Nachdem der Punkt P, durch den natürlich auch $C_{1,2} C_{3,4}$ hindurch geht, mit A_5 und 0_6 bezeichnet ist, wird 0_5 derart festgelegt, daß die Punkte $V_{1,2}, V_{2,3}, V_{3,5}, V_{5,1}$, in deren jedem sich zwei homologe Seiten der Vierecke $0_1 A_2 0_3 A_5$ und $A_3 0_5 A_1 0_2$ treffen, in eine Gerade fallen. Wir nutzen nun die Regel aus:

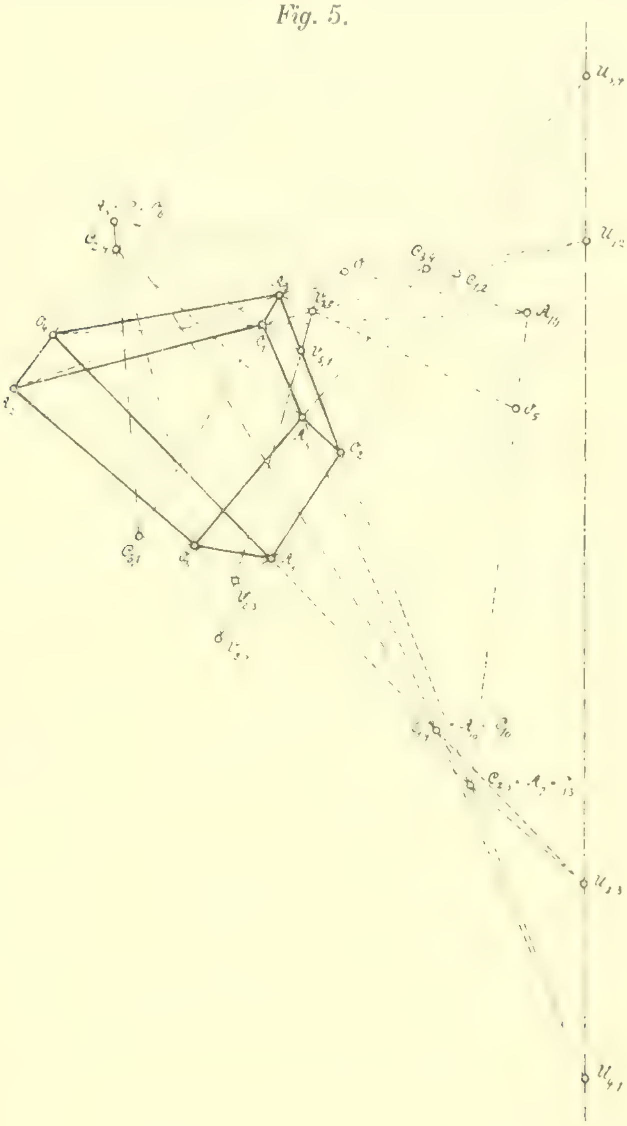
VIIIb. *Bezeichnet man den Schnittpunkt* $C_{p,q}$ *der Geraden* $A_p 0_q$ *und* $A_q 0_p$ *mit* A_r *und* 0_s, *so schneidet die Grenzkurve* $A_p A_q$ *in* 0_r *und* $0_p 0_q$ *in* A_s.

Man kann nämlich A_q mit $C_{p,r}$ bezeichnen, in diesem Punkte schneiden sich ja $A_p 0_r$ und $0_p A_r$ oder $0_p C_{p,q}$. 0_r ist der letzte Schnittpunkt der Grenzkurve mit $A_p A_q$ oder $A_p C_{p,r}$; ebenso schneidet sie $0_p 0_q$ in dem dritten Punkte A_s. Bezeichnet man $C_{2,3}$ mit A_7 und 0_{13}, so gehört nach dieser

B_2 zum Doppelpunkt hat und $A_1, A_2, A_3, A_4, B_3, B_4$ enthält. Sie entsteht (29.) als Grenzkurve aus der Kräftegruppe $P_{1,3} P_{2,3} P_{3,3} P_{4,3}$ und den beiden Gruppen $P_2'', P_2', 0, P_4'$ und $P_1'', 0, P_3'', P_4''$ im Gleichgewicht stehender Kräfte, die in den Verbindungslinien $B_2 A_1, B_2 A_2, B_2 A_3, B_2 A_4$ sich anbringen lassen.

Regel 0_7 der Geraden $A_2 A_3$, A_{13} der Geraden $0_2 0_3$ an, analog gehören, wenn $C_{1,4}$ mit A_{10} und 0_{16} bezeichnet wird, 0_{10} und A_{16} den Geraden $A_1 A_4$

Fig. 5.



und $0_1 0_4$ an. Da ferner $A_5 (= P)$ der letzte Schnittpunkt von $0_{13} 0_{16} (= C_{2,3} C_{1,4})$ ist, so kann (VIIIb.) 0_5 mit $C_{13,16}$ bezeichnet werden; $0_{13} A_{16}$ und $0_{16} A_{13}$ treffen sich in 0_5. Anders ausgedrückt: A_{13} ist der Schnittpunkt von $0_2 0_3$ mit $C_{1,4} 0_5$, A_{16} derjenige von $0_1 0_4$ mit $0_5 C_{2,3}$ oder $0_5 0_{13}$. Da $A_7 0_{16}$ und $0_{13} A_{10}$

beide mit $C_{2,3}C_{1,4}$ zusammenfallen, so ist P ferner mit $C_{7,16}$ und $C_{10,13}$ zu bezeichnen, es gehen also auch O_7A_{16} und $A_{13}O_{10}$ durch P hindurch. Wir leiten hieraus folgende Regel ab:

VIII c. *Projiziert man von* O_5 *aus die Punkte*

$$C_{1,4}\,,\ C_{2,4}\,,\ C_{3,4}\,,\ C_{2,3}\,,\ C_{3,1}\,,\ C_{1,2}$$

der Reihe nach auf die Geraden

$$O_2O_3\,,\ O_3O_1\,,\ O_1O_2\,,\ O_1O_4\,,\ O_2O_4\,,\ O_3O_4\,,$$

so entstehen sechs neue Punkte der Grenzkurve:

$$A_{13}\,,\ A_{14}\,,\ A_{15}\,,\ A_{16}\,,\ A_{17}\,,\ A_{18}\,.$$

Projiziert man sie von $P = A_5 = O_6$ *aus der Reihe nach auf die Geraden*

$$A_1A_4\,,\ A_2A_4\,,\ A_3A_4\,,\ A_2A_3\,,\ A_3A_1\,,\ A_1A_2\,,$$

so ergeben sich sechs weitere Punkte der Grenzkurve:

$$O_{10}\,,\ O_{11}\,,\ O_{12}\,,\ O_7\,,\ O_8\,,\ O_9\,.$$

Die drei Punktfolgen

$$A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}\,; \qquad O_{13}O_{14}O_{15}O_{16}O_{17}O_{18}\,; \qquad C_{2,3}C_{3,1}C_{1,2}C_{1,4}C_{2,4}C_{3,4}$$

fallen zusammen. Durch A_6 *gehen die Geraden*

$$O_7C_{1,4}\,,\ O_8C_{2,4}\,,\ O_9C_{3,4}\,,\ O_{10}C_{2,3}\,,\ O_{11}C_{3,1}\,,\ O_{12}C_{1,2}$$

hindurch.

Nach Theorem VIII b., aus dem auch die zuletzt erwähnten Beziehungen folgen, müssen jetzt $A_{13}A_{16}$, $A_{14}A_{17}$, $A_{15}A_{18}$ durch einen Punkt O_{32} hindurchgehen, und zwar ist

$$A_{32} = C_{13,16} = C_{14,17} = C_{15,18} = O_5\,.$$

Ebenso begegnen sich O_7O_{10}, O_8O_{11}, O_9O_{12} in einem Punkte A_{31} der Grenzkurve, ihm zugeordnet ist:

$$O_{31} = C_{7,10} = C_{8,11} = C_{9,12} = A_6\,.$$

27. Bezeichnet man A_1, A_2, A_3, A_4 der Reihe nach mit $O_{19}, O_{20}, O_{21}, O_{22}$, so laufen

$$O_2O_9\,,\ O_3O_8\,,\ O_4O_{10} \text{ in } A_{19}\,, \qquad O_3O_7\,,\ O_1O_9\,,\ O_4O_{11} \text{ in } A_{20}\,,$$
$$O_1O_8\,,\ O_2O_7\,,\ O_4O_{12} \text{ in } A_{21}\,, \qquad O_1O_{10}\,,\ O_2O_{11}\,,\ O_3O_{12} \text{ in } A_{22}$$

zusammen. $C_{2,19}$ ist der Schnittpunkt von O_2A_{19} und A_2O_{19} oder A_2A_1, also mit O_9 identisch; d. h. A_{19} ist der letzte Schnittpunkt der Grenzkurve mit O_2O_9, aber auch mit O_3O_8 und O_4O_{10}.

Aus den analogen Gründen treffen sich, wenn man $0_1, 0_2, 0_3, 0_4$ der Reihe nach mit $A_{23}, A_{24}, A_{25}, A_{26}$ bezeichnet,

$$A_2A_{15},\ A_3A_{14},\ A_4A_{16} \text{ in } 0_{23}, \qquad A_3A_{13},\ A_1A_{15},\ A_4A_{17} \text{ in } 0_{24},$$
$$A_1A_{14},\ A_2A_{13},\ A_4A_{18} \text{ in } 0_{25}, \qquad A_1A_{16},\ A_2A_{17},\ A_3A_{18} \text{ in } 0_{26}.$$

Irgend zwei bereits bekannte Punktepaare 0_pA_p und 0_qA_q liefern in $C_{p,q}$ einen anderen Punkt der Grenzkurve, wobei man aber vielfach auf bereits bekannte Punkte zurückkommt. In $C_{19,24}$ schneidet sich z. B. $A_{19}0_{24}$ mit $0_{19}A_{24}$ oder $A_1 0_2$; $C_{19,24}$ — ebenso, wie $C_{20,23}$ — fällt also mit $C_{1,2}$ zusammen. In diesem Punkte treffen sich 0_1A_2, $A_1 0_2$, $A_{19}0_{24}$, $0_{20}A_{23}$. Vier neue Punktepaare ergibt die Tabelle:

$$A_{27} = C_{1,5}, \qquad A_{28} = C_{2,5}, \qquad A_{29} = C_{3,5}, \qquad A_{30} = C_{4,5},$$
$$0_{27} = C_{1,6}, \qquad 0_{28} = C_{2,6}, \qquad 0_{29} = C_{3,6}, \qquad 0_{30} = C_{4,6}.$$

In der Tat geht $A_5 0_1$ durch $C_{1,5}$, 0_6A_1 durch $C_{1,6}$ hindurch. A_5 und 0_6 fallen aber mit P zusammen, so daß $C_{1,5}$ und $C_{1,6}$ entsprechende Punkte 0_{27} und A_{27} der beiden Reihen $0_1 0_2 0_3 \cdots$ und $A_1A_2A_3\cdots$ sind, P aber auch mit $C_{1,27}$, $C_{2,28}$, $C_{3,29}$, $C_{4,30}$ bezeichnet werden kann. Man beachte nun z. B., daß $C_{2,4}$ mit A_{11} und 0_{17}, $C_{3,4}$ mit A_{12} und 0_{18} bezeichnet wurde. Hiernach kann man dem letzten Schnittpunkt von $C_{2,4}C_{3,4}$ mit der Grenzkurve die Bezeichnungen $C_{11,18}$ und $C_{12,17}$ erteilen. In diesem Punkte schneiden sich also $C_{2,4}C_{3,4}$, $0_{11}A_{18}$ und $A_{17}0_{12}$. Bezeichnen wir ihn mit A_λ und 0_μ, so ist nach der vorangestellten Regel $0_\lambda = C_{17,18}$ und $A_\mu = C_{11,12}$, so daß zwei neue Paare vorliegen. Nach diesem Schema können wir offenbar im allgemeinen eine unbegrenzte Anzahl neuer Punkte der Grenzkurve ermitteln.

Auf der angehängten Tafel sind diese Verhältnisse zur Darstellung gebracht, und zwar sind die Punktreihen $A_1A_2A_3A_4\cdots$ und $0_1 0_2 0_3 0_4\cdots$ mit $1\,2\,3\,4\cdots$ und $1'2'3'4'\cdots$ gekennzeichnet, einige passend gelegene Punkte $C_{i,k}$ mit (i, k). Um eine größere Genauigkeit zu erzielen, sind homologe Seiten der beiden Vierecke $1'2\,3'4$ und $34'12'$ parallel gelegt worden[1].

---

[1] Mein früherer Assistent, Hr. Dipl.-Ing. Thomas Schwarz in Sterkrade, hat mich durch Ausführung der Tafel nach meiner Skizze zu großem Danke verpflichtet. Es gelang ihm, einem hervorragend verständnisvollen und exakten Zeichner, alle die erwähnten Proben in genauen Einklang zu bringen. Die Punkte 0_{24}, A_{28} fallen über die Grenzen des Blattes hinaus. A_{31} ließ sich von 0_7 nicht trennen, während alle anderen Punkte sich gut auseinanderlegen. Auch die übrigen Figuren der Arbeit hat Hr. Schwarz nach meinen Skizzen gezeichnet.

28. Hält man vier von den sechs Schnittpunkten eines Kegelschnittes mit einer Kurve dritter Ordnung, nämlich A, B, C, D, fest, so dreht sich bekanntlich die Verbindungslinie der beiden letzten, U_1, U_2, um einen Punkt S der gegebenen Kurve. Diese Gerade wird dem Kegelschnitt durch eine projektive Beziehung zugeordnet. Schneidet also die Kurve dritter Ordnung BC, CA, AB noch in den Punkten A_1, B_1, C_1, hingegen AD, BD, CD in den Punkten A_2, B_2, C_2, so gehen $a = A_1A_2$; $b = B_1B_2$; $c = C_1C_2$ durch S hindurch und entsprechen bei der projektiven Erzeugung den drei Geradenpaaren BC, AD; CA, BD; AB, CD des Kegelschnittbüschels. Schneidet nun DX die Geraden BC, CA, AB in den Punkten A_x, B_x, C_x und fällt x mit SX zusammen, so gehört X der Kurve dritter Ordnung dann und nur dann an, wenn die projektive Beziehung besteht

$$XA_xB_xC_x \barwedge xabc.$$

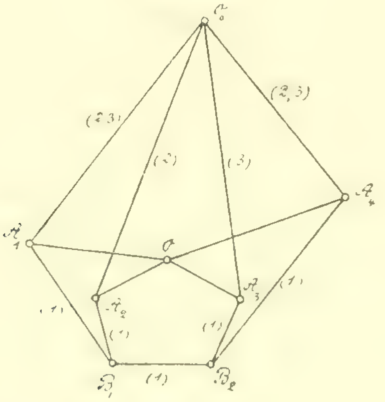
Die Grenzkurve kann nun auf mehrfache Weise durch projektive Büschel erzeugt werden, und zwar gehört zu dem Quadrupel $A_1A_2A_3A_4$ ($= ABCD$) als Pol der Punkt A_{31}($= S$), zu $0_1 0_2 0_3 0_4$ ebenso 0_{32}. Ist ferner $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, 3, 4$, so gehört zu den Quadrupeln $A_\alpha A_\beta 0_\gamma 0_\delta$ der Pol $P = A_5 = 0_6$; den Quadrupeln $0_\alpha A_\beta A_\gamma A_\delta$ und $A_\alpha 0_\beta 0_\gamma 0_\delta$ entsprechen $A_6 = 0_{31}$ und $0_5 = A_{32}$. In jedem Falle sind zu den drei Geradenpaaren des Quadrupels die zugehörigen Geraden des Strahlenbüschels bekannt. Daß man über die Zugehörigkeit eines Punktes zur Grenzkurve auf diese Weise entscheiden kann, wird wichtig, wenn die oben angegebenen Regeln versagen sollten. Einmal könnte man sich, anstatt immer neue Punkte der Grenzkurve zu erhalten, fortwährend in derselben endlichen Gruppe von Punkten hin und her bewegen. Von praktischer Bedeutung aber kann es sein, daß alle aus den Konstruktionen hervorgehenden Punkte einem unparen Zuge der Kurve angehören, während die Grenzkurve auch einen paren Zug enthält, der uns ganz entgeht. Figur 5. würde auf eine solche zweizügige Kurve führen, aber beide Züge sind mit Punkten genügend dicht besetzt. Die Form der Kurve auf der Tafel schließt das Vorhandensein eines paren Zuges aus. Auf die Methoden zur Ermittlung eines etwa vorhandenen paren Zuges soll hier nicht eingegangen werden.

29. Liegen alle vier Punkte $0_1, 0_2, 0_3, 0_4$ an einer Stelle 0_0 vereinigt, so muß zur Definition der Grenzkurve des Fachwerks außer zwei singulären Gruppen $P_1'' P_2'' 0 P_4''$ und $P_1''' 0 P_3''' P_4'''$ eine andere allgemeine Gruppe

$P_{1,1}P_{2,1}P_{3,1}P_{4,1}$ benutzt werden. Die Grenzkurve, welche jetzt 0_0 zum Doppelpunkt hat, kann aus einem in Fig. 6. dargestellten Normalfachwerk abgeleitet werden. Bestimmt man in den vier zur Festlegung der allgemeinen Gruppe dienenden Gleichungen

$$P_1 = v'P_{1,1} + v''P_1'' + v'''P_1''', \qquad P_2 = v'P_{2,1} + v''P_2'', \qquad P_3 = v'P_{3,1} + v'''P_3''',$$
$$P_4 = v'P_{4,1} + v''P_4'' + v'''P_4'''$$

Fig. 6.



die Verhältnisse $v':v''$ und $v':v'''$ derart, daß P_2, P_3 in die Gerade A_2A_3 hineinfallen, so steht die Resultante beider mit P_1 und P_4 im Gleichgewicht. Alle vier Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 wirken also auf einen Punkt Q_1, den A_2A_3 mit der Grenzkurve gemein hat. Nachdem in ähnlicher Weise ihr letzter Schnittpunkt Q_2 mit der Geraden A_1A_3 ermittelt wurde, kann man auf der Kurve zwei Punktreihen $A_1A_2A_3\cdots$ und $Q_1Q_2Q_3\cdots$ von der Art konstruieren, daß der Schnittpunkt $R_{m,n}$ von A_mQ_n und A_nQ_m ihr angehört. Der Doppelpunkt 0_0 vereinigt zwei homologe Punkte A_0 und Q_0 in sich, Q_4 ist nun leicht zu finden, da homologe Seiten der beiden Vierecke

$$Q_0A_1Q_2A_4 \text{ und } A_2Q_4A_0Q_1$$

sich in Punkten treffen, die einer Geraden angehören. In ähnlicher Art finden wir unter Benutzung des neuen Paares Q_4A_4 den Punkt Q_3, welcher A_1A_2 angehört. Es ist nun $A_1 = R_{2,3}$, $A_2 = R_{3,1}$, $A_3 = R_{1,2}$; der Punkt P, den $R_{2,3}R_{1,4}$, $R_{3,1}R_{2,4}$, $R_{1,2}R_{3,4}$ miteinander gemein haben, fällt hier mit Q_4 zusammen. Da nach den obigen Entwicklungen P mit A_5 und Q_6 zu bezeichnen ist, liefern die Indizes 6 und 4 hier das gleiche Punktepaar.

Dennoch führen die oben (26., 27.) erörterten Beziehungen auf eine genügende Anzahl von Punkten zur Festlegung der Kurve[1].

Bei der projektiven Erzeugung der Kurve können bekanntlich A, B, C mit beliebigen Kurvenpunkten A_1, A_2, A_3, dagegen D und S mit 0_0 zusammenfallen. Schneidet also irgendein von 0_0 ausgehender Strahl x die Geraden A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 in den Punkten X_1, X_2, X_3, und bezeichnet man 0_0Q_1, 0_0Q_2, 0_0Q_3 mit q_1, q_2, q_3, so gewinnt man aus der Projektivität

$$XX_1X_2X_3 \barwedge xq_1q_2q_3$$

den Schnittpunkt des Strahles x mit der Grenzkurve.

IV.

30. An verschiedenen Stellen traten in sich einspannbare Stabwerke auf, die $\varepsilon\,(\geqq 1)$ Stäbe weniger enthielten, als ein statisch bestimmtes Fachwerk mit der gleichen Anzahl von Knotenpunkten. Mohr[2] hat nachdrücklich darauf hingewiesen, daß aus der Projektion eines geschlossenen Polyeders auf die Ebene nach Maxwells Theorem (a. a. O. S. 31[2]) ein in sich eingespanntes Stabwerk entstehen kann, daß aber dieser Zusammenhang nicht umkehrbar ist. Die Ableitung aus einem Polyeder gelingt in vielen Fällen erst, nachdem man imaginäre Knotenpunkte dem Stabwerk hinzugefügt hat. In sich eingespannte Stabwerke mit nur dreistäbigen Knotenpunkten — solche ergeben sich aus der Projektion eines Polyeders mit nur dreikantigen Ecken — lassen sich jedenfalls leicht in der Ebene diskutieren. Man bedenke einfach, daß ein aus Stäben des Stabwerks gebildetes geschlossenes r-Eck ein Seilpolygon von Kräften ist, deren jede auf eine Ecke des r-Ecks in dem dritten dort angreifenden Stabe wirkt[3].

---

[1] Hr. Schwarz hat dies an einem Beispiel festgestellt.

[2] Mohr, Beitrag zur Théorie des Fachwerks, Der Civilingenieur, Jahrg. 1885, Leipzig 1885, S. 288. (Vergl. S. 299.)

[3] Selbstverständlich ist hierbei vorausgesetzt, daß jeder Knotenpunkt des Stabwerks drei in verschiedene Geraden fallende Stäbe entsendet. Verbindet man jede Ecke eines n-Ecks mit einem Knotenpunkte eines Fachwerks von n Knotenpunkten und $2n-3$ Stäben, so entsteht ein in sich einspannbares Fachwerk von $2n$ Knotenpunkten und $4n-3$ Stäben, wenn zu Kräften in jenen Verbindungsstäben das n-Eck als Seilpolygon gehört. Durch Anfügung mehrerer n-Ecke hintereinander kann man netzartig gebildete Fachwerke herstellen, die auf statische Bestimmtheit leicht zu untersuchen sind. Vergl.: Henneberg, Die Graphische Statik der starren Systeme, Berlin, Leipzig 1911, S. 509 und 510, Figuren 257. und 258.

Um eine Anwendung dieser Regel zu machen, bringe man in jeder von n Geraden zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte an. $P_1 P_2 \cdots P_{2n}$ sei eine beliebige Anordnung dieser $2n$ im Gleichgewicht stehenden Kräfte. Die Seite $A_{r-1} A_r$ des geschlossenen Polygons $A_1 A_2 \cdots A_{2n}$ stelle in Größe und Richtung die Kraft P_r dar, so daß A_0 und A_{2n} — wie weiter unten B_0 und B_{2n} — identisch sind. Nach Annahme eines beliebigen Pols 0 flechte man in die Kräftefolge selbst ein Seilpolygon $B_1 B_2 \cdots B_{2n}$ ein, das notwendig geschlossen ist. In den einzelnen Seiten des Seilpolygons sind Spannkräfte tätig, vermöge deren z. B. $B_{r-1} B_r$ und $B_r B_{r+1}$ auf B_r mit Stabkräften wirken, die in Größe und Richtung mit $0 A_{r-1}$ und $A_r 0$ übereinstimmen und also P_r das Gleichgewicht halten. In der Reihe $P_1 P_2 \cdots P_{2n}$ gibt es aber eine zu P_r entgegengesetzte Kraft P_s. Beide kann man als die Stabkräfte deuten, mit welchen $B_r B_s$ bei passender Einspannung auf seine beiden Endpunkte wirkt. In sich eingespannt ist das aus den Seiten und n wohldefinierten Diagonalen eines $2n$-Ecks bestehende Stabwerk ($\varepsilon = n - 3$).

31. Am nächsten liegt die Annahme, daß $P_{n+1}, P_{n+2}, \cdots, P_{2n}$ der Reihe nach den Kräften $P_1, P_2, \cdots, P_n$ das Gleichgewicht halten. Es besteht alsdann das Theorem (vergl. für den Fall $n = 4$: Fig. 7., S. 44).

IX. *Das aus den Seiten eines $2n$-Ecks $B_1 B_2 \cdots B_{2n}$ und seinen n Hauptdiagonalen $B_1 B_{n+1}, B_2 B_{n+2}, \cdots, B_n B_{2n}$ gebildete Stabwerk ist dann und nur dann in sich einspannbar, wenn in einer Geraden die n Punkte liegen, in deren jedem sich zwei gegenüberliegende Seiten des $2n$-Ecks treffen.*

Der Satz folgt unmittelbar aus dem schon oben benutzten Culmannschen Theorem. Sind nämlich zwei Seilpolygone für die Pole 0 und 0_1 in dieselbe Folge von Kräften eingeflochten, so liegen in einer zu $0\,0_1$ parallelen Geraden die Punkte, in deren jedem sich zwei homologe Seiten dieser Seilpolygone schneiden[1].

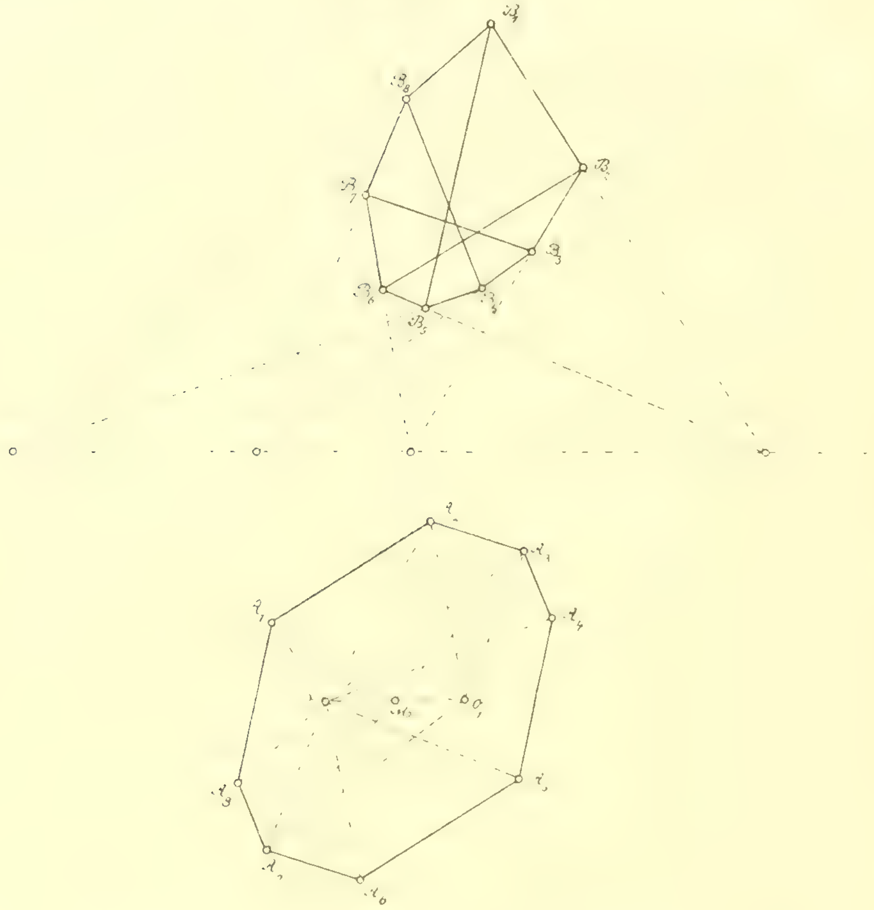
Aus einer leichten Umformung des üblichen Beweises[2] für diesen Hilfssatz ergibt sich die Richtung der im Theorem IX. erwähnten Geraden. Die Strecken $0 A_{r-1}, A_r 0, 0 A_{s-1}, A_s 0$ stellen in Größe und Richtung die Stabkräfte dar, mit denen $B_{r-1} B_r$ und $B_r B_{r+1}$ auf B_r, $B_{s-1} B_s$ und $B_s B_{s+1}$ hingegen auf B_s wirken. Sie stehen mit P_r und P_s im Gleichgewicht. Die Resultante von $0 A_{r-1}$ und $0 A_{s-1}$ ist die Diagonale $0\,0_1$ des Parallelogramms

---

[1] K. Culmann, Die Graphische Statik, Zürich 1866, Art. 29, S. 83.

[2] Vergl. z. B. die Darstellung von Müller-Breslau: Die Graphische Statik der Baukonstruktionen, Bd. 1, 2. Aufl., Leipzig 1887 (Art. 5, S. 8).

Fig. 7.



$0\,A_{r-1}\,0_1\,A_{s-1}$, so daß $0\,0_1$ und $A_{r-1}\,A_{s-1}$ durch denselben Punkt M halbiert werden. Hingegen stellt $A_r\,A_{s-1}$ in Größe und Richtung die Resultante von $A_r\,0$ und $0\,A_{s-1}$ dar. Heben P_r und P_s einander auf, so werden $A_{r-1}\,A_{s-1}$ und $A_r\,A_s$ durch denselben Punkt M halbiert, zugleich sind $A_{r-1}\,A_s$ und $A_r\,A_{s-1}$ zueinander parallel. Die vier erwähnten Stabkräfte stehen jetzt miteinander im Gleichgewicht. Die Stabkräfte in $B_{r-1}\,B_r$ und $B_{s-1}\,B_s$ einerseits, die in $B_r\,B_{r+1}$ und $B^s\,B_{s+1}$ anderseits ergeben also Resultanten, die sich aufheben; $0\,M$ ist parallel zu der Verbindungslinie der beiden Punkte $B_{r-1}\,B_r$, $B_{s-1}\,B_s$ und $B_r\,B_{r+1}$, $B_s\,B_{s+1}$. Anderseits sind $A_{r-1}\,A_s$ und $A_r\,A_{s-1}$ parallel zu der Verbindungslinie der beiden Punkte $B_{r-1}\,B_r$, $B_s\,B_{s+1}$ und $B_r\,B_{r+1}$, $B_{s-1}\,B_s$. Halten nun $P_{n+1}, P_{n+2}, \cdots, P_{2n}$ der Reihe nach den

Kräften $P_1, P_2, \cdots, P_n$ das Gleichgewicht, so werden die Strecken $A_1 A_{n+1}$, $A_2 A_{n+2}, \cdots, A_n A_{2n}$ von einem und demselben Punkt M halbiert, auf einer Geraden der Richtung $0M$ liegen die Punkte, in denen homologe Seiten der beiden offenen Polygone $B_{2n} B_1 B_2 \cdots B_n$ und $B_n B_{n+1} B_{n+2} \cdots B_{2n}$ sich treffen. Weil M der Mittelpunkt von $0\,0_1$ ist, sind $0_1 A_\alpha$ und $0 A_{n+\alpha}$ parallel zueinander. Die beiden Polygonzüge sind also für die Pole 0 und 0_1 in die Kräftefolge $P_1 P_2 \cdots P_{n-1}$ als offene Seilpolygone eingeflochten, so daß der Übergang zu dem angegebenen Hilfssatz vollzogen ist.

Für den Fall $n = 3$ ersehen wir nochmals, daß ein aus den Seiten und Hauptdiagonalen eines Sechsecks gebildetes Fachwerk nur dann in sich einspannbar ist, wenn wir es mit einem Pascalschen Sechseck zu tun haben (10.). Daß ein Achteck mit seinen vier Hauptdiagonalen ($n = 4$) ein in sich einspannbares Stabwerk bilden kann, hat Mohr hervorgehoben und vier Bedingungen hierfür aufgestellt, von denen zwei Folgen der übrigen sein müssen. Sie würden im Fall des $2n$-Ecks lauten: In einer Geraden liegen je drei Punkte:

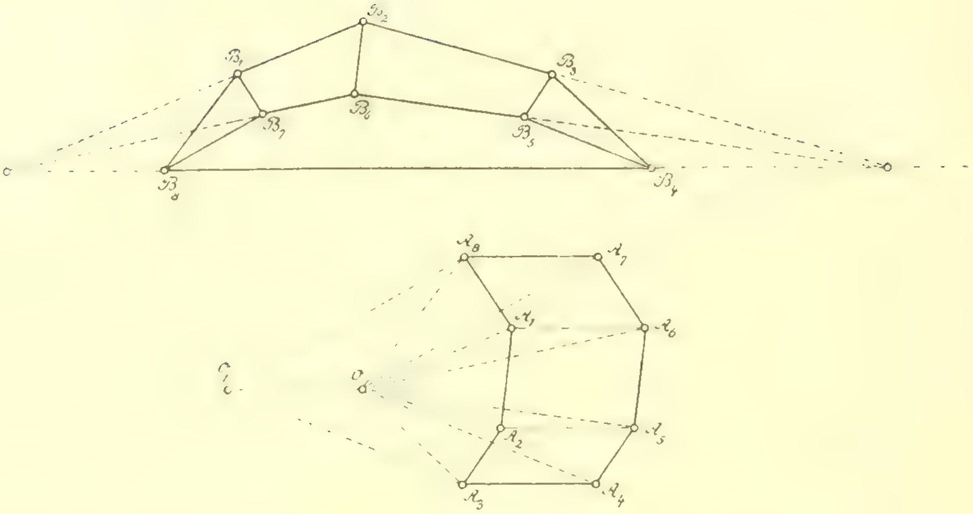
$$B_{r-1} B_r,\ B_{r+1} B_{r+2};\ B_r B_{n+r},\ B_{r+1} B_{n+r+1};\ B_{n+r-1} B_{n+r},\ B_{n+r+1} B_{n+r+2}. \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

Hierbei bedeuten $B_{2n}, B_{2n+1}, B_{2n+2}$ dasselbe, wie B_0, B_1, B_2. Mohr fügt zur Erläuterung in Fig. 4. (a. a. O. S. 297) ein Achteck bei, von dem je zwei gegenüberliegende Seiten zueinander parallel sind, so daß die Bedingungen des Theorems IX. durch die unendlich ferne Gerade erfüllt werden. Auch im allgemeinen Fall kann man mit Hilfe des Satzes von Desargues sehr leicht den Übergang von Mohrs Bedingungen zu dem Theorem IX. vollziehen.

32. Sind ferner $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}, P_n$ der Reihe nach im Gleichgewicht mit den Kräften $P_{2n-1}, P_{2n-2}, \cdots, P_{n+1}, P_{2n}$, so stimmen (Fig. 8., S. 46, stellt den Fall $n = 4$ dar) $A_{2n-1} A_{2n}, A_{2n-2} A_1, A_{2n-3} A_2, \cdots, A_n A_{n-1}$ in Größe und Richtung überein. Wir schließen also aus dem zweiten Teil der Hilfsbetrachtung:

X. *Das aus den Seiten eines $2n$-Ecks $B_1 B_2 \cdots B_{2n}$, einer Hauptdiagonale $B_n B_{2n}$ und den n Diagonalen $B_1 B_{2n-1}, B_2 B_{2n-2}, \cdots, B_{n-1} B_{n+1}$ bestehende Stabwerk ist dann und nur dann in sich einspannbar, wenn homologe Seiten der beiden offenen Polygone $B_{2n} B_1 B_2 \cdots B_{n-1} B_n$ und $B_{2n} B_{2n-1} B_{2n-2} \cdots B_{n+1} B_n$ sich in Punkten treffen, die einer Geraden ($B_n B_{2n}$) angehören.*

Fig. 8.



Macht man $0\,0_1$ in Größe und Richtung den Strecken $A_{2n-1}A_{2n}$, $A_{2n-2}A_1$, $\cdots$, A_nA_{n-1} gleich, so ist 0_1A_α parallel zu $0A_{2n-\alpha-1}$ $(\alpha = 0, 1, \cdots, n-1)$. $B_{2n}B_1B_2\cdots B_{n-1}B_n$ und $B_{2n}B_{2n-1}B_{2n-2}\cdots B_{n+1}B_n$ sind also als Seilpolygone mit den Polen 0 und 0_1 in die Kräftefolge $P_1P_2\cdots P_{n-1}$ eingeflochten, so daß der angezogene Hilfssatz direkt in Anwendung kommt. Im Falle $n = 3$ besteht das Stabwerk aus den Seiten zweier Dreiecke $B_1B_6B_5$ und $B_2B_3B_4$ und den drei Verbindungsstäben B_1B_2, B_6B_3, B_5B_4, und man hat nochmals eine Bestätigung der Tatsache, daß das Fachwerk nur dann in sich eingespannt ist, wenn jene Geraden einen Punkt miteinander gemein haben (15.).

Bei allgemeiner Anordnung der Kräfte $P_1, P_2, \cdots, P_{2n}$ können offenbar mannigfache Beziehungen nach Art der Theoreme IX., X. entstehen. Man kann $B_{\alpha-1}B_\alpha B_{\alpha+1}\cdots B_{\alpha+r}B_{\alpha+r+1}$ und $B_{\beta-1}B_\beta B_{\beta+1}\cdots B_{\beta+r}B_{\beta+r+1}$ nämlich als offene Seilpolygone der Folge von Kräften $P_\alpha, P_{\alpha+1}, \cdots, P_{\alpha+r}$ betrachten, wenn $P_\beta, P_{\beta+1}, \cdots, P_{\beta+r}$ ihnen der Reihe nach das Gleichgewicht halten. Homologe Seiten der beiden Polygone treffen sich, wenn M alle Strecken $A_{\alpha-1}A_{\beta-1}$, $A_\alpha A_\beta$, $\cdots$, $A_{\alpha+r}A_{\beta+r}$ zugleich halbiert, in Punkten einer Geraden, die zu $0M$ parallel ist. Dagegen sind $B_{\alpha-1}B_\alpha B_{\alpha+1}\cdots B_{\alpha+r+1}$ und $B_{\beta+1}B_\beta B_{\beta-1}\cdots B_{\beta-r-1}$ Seilpolygone derselben Folge von Kräften $P_\alpha, P_{\alpha+1}, P_{\alpha+2}, \cdots, P_{\alpha+r}$, falls ihnen der Reihe nach $P_\beta, P_{\beta-1}, P_{\beta-2}, \cdots, P_{\beta-r}$ das Gleichgewicht halten. Die Achse der beiden Seilpolygone ist dann zu allen Geraden $A_{\alpha-1}A_{\beta}, A_{\alpha}A_{\beta-1}, \cdots, A_{\alpha+r}A_{\beta-r-1}$ zugleich parallel. Steht jede der Kräfte $P_{\beta}, P_{\beta+1}, \cdots, P_{\beta+r}$ mit einer der Kräfte $P_{\alpha}, P_{\alpha+1}, \cdots, P_{\alpha+r}$ im Gleichgewicht, so kann man die Resultanten der beiden Kräftegruppen, welche einander das Gleichgewicht halten, bei der Herleitung geometrischer Beziehungen im Stabwerk benutzen. ($A_{2n+\gamma}$ und $B_{2n+\gamma}$ fallen bei diesen letzten Beziehungen mit A_{γ} und B_{γ} zusammen.)

33. Sind $P_1, P_2, \cdots, P_{2n}$ auf r Einzelgruppen von Kräften verteilt, die einander das Gleichgewicht halten, so entsteht ein in sich einspannbares Stabwerk dadurch, daß man in jede Einzelgruppe ein Seilpolygon einflechtet. Enthält ($r=2$) eine Einzelgruppe die Kräfte $P_1, P_2, \cdots, P_n$, eine andere die Kräfte $P_{n+1}, P_{n+2}, \cdots, P_{2n}$, so besteht das Seilpolygon aus zwei n-Ecken $B_1B_2\cdots B_n$ und $B_{n+1}B_{n+2}\cdots B_{2n}$ und aus n Verbindungsstäben B_rB_{n+s}, wobei P_r und P_{n+s} miteinander im Gleichgewicht stehen. Mohrs Stabwerk kann auf diese Weise aus zwei Quadrupeln $P_1P_2P_3P_4$ und $P_5P_6P_7P_8$ hergestellt werden, wobei P_5, P_6, P_7, P_8 der Reihe nach P_1, P_3, P_2, P_4 aufheben.

Halten $P_{n+1}, P_{n+2}, \cdots, P_{2n}$ der Reihe nach $P_1, P_2, \cdots, P_n$ das Gleichgewicht, so entsteht — immer nach dem angeführten Hilfssatz — das Theorem:

XI. *Die Seiten zweier n-Ecke* $B_1B_2\cdots B_n$; $B_{n+1}B_{n+2}\cdots B_{2n}$ *und die n Stäbe* $B_1B_{n+1}, B_2B_{n+2}, \cdots, B_nB_{2n}$ *bilden ein in sich einspannbares Stabwerk, wenn in einer Geraden die n Punkte liegen, in deren jedem sich zwei homologe Seiten der beiden n-Ecke schneiden*[1].

Das Stabwerk ist die Projektion eines von zwei n-Ecken und n Vierecken begrenzten Polyeders. Man erhält für $n=4$ das oben (23.) von mir benutzte Maxwellsche Stabwerk von acht Knotenpunkten und zwölf Stäben und gelangt für $n=3$, wie Mohr hervorhebt, zu einem Beweise des Desarguesschen Satzes, denn natürlich laufen B_1B_4, B_2B_5, B_3B_6, weil P_1, P_2, P_3 im Gleichgewicht stehen, durch einen Punkt (vergl. Mohrs Figur 3., a. a. O. S. 297).

---

[1] Ein Stabwerk von n Knotenpunkten und $2n-3-\varepsilon$ Stäben ($\varepsilon \geqq 1$) besitzt im allgemeinen den ε-fachen Grad der Verschieblichkeit in sich. *Es kann aber in besonderen Fällen auch ein ganz starres Gebilde sein, jedoch sicher nur dann, wenn es in sich einspannbar ist.* Ein Stabwerk, das gemäß Theorem IX. oder XI. in sich einspannbar ist, kann in vielen Fällen mit ganz elementaren Mitteln als ein starres Gebilde erkannt werden, wenn die aus ihm abgeleitete Gerade sich ins Unendliche entfernt.

Diese Zusammenhänge habe ich in einer kurzen Abhandlung dargelegt, die zwar erst nach Fertigstellung dieser Arbeit verfaßt wurde, aber vor ihr, im Mai 1912, im Druck erschienen ist. Vergl.: Ernst Kötter, Über die Möglichkeit, n Punkte in der Ebene oder im Raume durch weniger als $2n-3$ oder $3n-6$ Stäbe von ganz unveränderlicher Länge unverschieblich miteinander zu verbinden. Beitrag zu: Festschrift, Heinrich Müller-Breslau gewidmet nach Vollendung seines sechzigsten Lebensjahres, Leipzig, 1912, S. 61.

34. Wenn man in einem der verwendeten Seilpolygone mehrere aufeinanderfolgende Seiten verschwinden läßt, also Punkte benutzt, auf die mehrere gegebene Kräfte wirken, so entstehen in sich einspannbare Stabwerke, bei denen einzelne Knotenpunkte mehr als drei Stäbe entsenden. Ein Fachwerk dieser Art stellt Mohrs Figur 8. dar. Stehen r auf einen Punkt wirkende Kräfte im Gleichgewicht, so kann derselbe ohne weiteres als ein r-stäbiger Knotenpunkt eines in sich eingespannten Stabwerks betrachtet werden. Aus solchen Betrachtungen heraus kann man z. B. eine wichtige Ergänzung der obigen allgemeinen Betrachtungen (11.—13.) ableiten:

XII. *Besteht jede von k Kräftegruppen*

$$P_{1,\beta}P_{2,\beta}\cdots P_{k+1,\beta} \qquad (\beta=1,2,\cdots,k)$$

aus $k+1$ *in* $A_1, A_2, \cdots, A_{k+1}$ *angreifenden, einander das Gleichgewicht haltenden Kräften, so kann man sie als die Hauptgruppen eines Fachwerks bezüglich eines* $(k+1)$*-stäbigen Knotenpunktes betrachten.*

Bestimmt man nämlich $u_1, u_2, \cdots, u_k$ derart, daß die Kräfte

$$P_\alpha = u_1P_{\alpha,1}+u_2P_{\alpha,2}+\cdots+u_kP_{\alpha,k} \qquad (\alpha=1,2,\cdots,k+1)$$

auf einen Punkt 0 wirken, und versteht man unter $B_{1,\beta}B_{2,\beta}\cdots B_{k+1,\beta}$ ein in die Kräfte $P_{1,\beta}, P_{2,\beta}, \cdots, P_{k+1,\beta}$ eingeflochtenes — geschlossenes — Seilpolygon, so hat man ein in sich eingespanntes Stabwerk aus n Knotenpunkten

$$0, A_1, A_2, \cdots, A_{k+1}, B_{1,\beta}, B_{2,\beta}, \cdots, B_{k+1,\beta} \qquad (\beta=1,2,\cdots,k)$$

und m Stäben

$$A_\alpha 0, A_\alpha B_{\alpha,\beta}, B_{\alpha,\beta}B_{\alpha+1,\beta} \qquad (\alpha=1,2,\cdots,k+1, \beta=1,2,\cdots,k)$$

vor sich. Hierbei bedeutet natürlich $B_{k+2,\beta}$ dasselbe wie $B_{1,\beta}$. Der Stab $0A_\alpha$ wirkt bei der Einspannung des Stabwerks in sich mit der Kraft P_α auf A_α, der Stab $A_\alpha B_{\alpha,\beta}$ auf $B_{\alpha,\beta}$ mit der Kraft $P_{\alpha,\beta}$. Offenbar ist

$$n = k^2+2k+2, m = 2k^2+3k+1 = 2n-3-k.$$

Obwohl also noch k Stäbe erforderlich wären, um die Knotenpunkte starr miteinander zu verbinden, ist das Stabwerk doch für jeden Punkt 0 einer Grenzkurve, welche die Hauptgleichung (10.) darstellt, in sich einspannbar, oder für jeden Punkt der Ebene, wenn die Hauptgruppen nicht unabhängig voneinander sind.

An Stelle des Stabwerks kann man auch ein Fachwerk betrachten, indem man etwa die Stäbe $B_{1,1}B_{2,2}$, $B_{2,2}B_{3,3}$, $\cdots$, $B_{k-1,k-1}B_{k,k}$, $B_{k,k}B_{1,1}$ einzieht. Sie bleiben bei jedem in sich eingespannten Fachwerk ohne Spannkraft, so lange nicht $B_{1,1}B_{2,2}\cdots B_{k,k}$ in ein Seilpolygon von Kräften übergeht, die in den Stäben $A_1B_{1,1}$, $A_2B_{2,2}$, $\cdots$, $A_kB_{k,k}$ wirken. Andernfalls wäre das Fachwerk für jeden Punkt der Ebene in sich einspannbar.

Ist $k=2$, so wirken $P_{1,1}$, $P_{2,1}$, $P_{3,1}$ auf einen Punkt 0_1, $P_{1,2}$, $P_{2,2}$, $P_{3,2}$ auf einen Punkt 0_2; man wird dann natürlich das in Figur 2. (S. 16) dargestellte Fachwerk benutzen. Im Falle $k=3$ kann man die Kräfte einer Gruppe $P_{1,\beta}$, $P_{2,\beta}$, $P_{3,\beta}$, $P_{4,\beta}$ auf die Endpunkte eines Verbindungsstabes wirken lassen (vergl. die mit (1) bezeichneten Stäbe der Figur 6., S. 41) und so ein Fachwerk von 19 Stäben und 11 Knotenpunkten zugrunde legen, wenn man nicht vorzieht, ein Normalfachwerk der oben (22.) behandelten Art einzuführen.

V.

35. Man beziehe ein räumliches Fachwerk von $3m-3\,(=3n-6)$ Stäben und $m+1\,(=n)$ Knotenpunkten A_0, A_1, $\cdots$, A_m auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, wobei A_α die Koordinaten a_α, b_α, c_α erhält. Bei einer beliebigen Einspannung des Fachwerks wirkt jeder Stab auf seine beiden Endpunkte mit zwei entgegengesetzt gleichen Kräften. Die äußere Kraft Q_α, die zur Herstellung des Gleichgewichts in A_α anzubringen ist, sei die Resultante der drei Kräfte X_α, Y_α, Z_α, welche parallel zu den Achsen des Koordinatensystems in A_α angreifen. Alsdann gelten $3m+3$ Gleichungen von der Form

$$\sum_{\beta=1}^{3m-3} a_{\alpha,\beta}\sigma_\beta = X_\alpha,\ \sum_{\beta=1}^{3m-3} b_{\alpha,\beta}\sigma_\beta = Y_\alpha,\ \sum_{\beta=1}^{3m-3} c_{\alpha,\beta}\sigma_\beta = Z_\alpha. \qquad (\alpha=0,1,\cdots,m) \qquad (13.)$$

σ_β ist die Spannkraft des β^{ten} Stabes, dividiert durch die Entfernung seiner beiden Endpunkte A_λ, A_μ. Nur in den sechs Gleichungen, welche sich auf diese Knotenpunkte beziehen, kommt σ_β wirklich vor; es ist nämlich

$$\begin{aligned} a_{\lambda,\beta} &= a_\mu - a_\lambda, & b_{\lambda,\beta} &= b_\mu - b_\lambda, & c_{\lambda,\beta} &= c_\mu - c_\lambda, \\ a_{\mu,\beta} &= a_\lambda - a_\mu. & b_{\mu,\beta} &= b_\lambda - b_\mu. & c_{\mu,\beta} &= c_\lambda - c_\mu. \end{aligned} \qquad (14.)$$

Sobald aber α von λ und μ verschieden ist, verschwinden $a_{\alpha,\beta}$, $b_{\alpha,\beta}$, $c_{\alpha,\beta}$. σ_β rechnen wir positiv oder negativ, je nachdem es sich um eine Zugkraft oder eine Druckkraft handelt. X_α muß positiv oder negativ gerechnet werden, je nachdem die Kraft der positiven Richtung der x-Achse entgegenwirkt oder nicht. Ähnliches gilt für Y_α und Z_α.

Aus den Gleichungen (13.), (14.) folgen die Identitäten

$$\sum_{\alpha=0}^{m} X_\alpha \equiv 0\,, \qquad \sum_{\alpha=0}^{m} Y_\alpha \equiv 0\,, \qquad \sum_{\alpha=0}^{m} Z_\alpha \equiv 0 \tag{15.}$$

und

$$\sum_{\alpha=0}^{m}(c_\alpha Y_\alpha - b_\alpha Z_\alpha) \equiv 0\,, \quad \sum_{\alpha=0}^{m}(a_\alpha Z_\alpha - c_\alpha X_\alpha) \equiv 0\,, \quad \sum_{\alpha=0}^{m}(b_\alpha X_\alpha - a_\alpha Y_\alpha) \equiv 0\,, \tag{15a.}$$

welche offenbar ausdrücken, daß $Q_0, Q_1, Q_2, \cdots, Q_m$ einander das Gleichgewicht halten. Ist diese selbstverständliche Bedingung erfüllt, so sind sechs der $3m+3$ aufgestellten Gleichungen die Folgen der $3m-3$ übrigen. Besitzt die Determinante derselben einen von Null verschiedenen Wert, so kann man die betreffenden $3m-3$ Größen aus der Reihe $X_0, X_1, \cdots, X_m$, $Y_0, Y_1, \cdots, Y_m, Z_0, Z_1, \cdots, Z_m$ beliebig annehmen und die zugehörigen Gleichungen nach $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{3m-3}$ auf eine bestimmte Art auflösen. Die sechs übrigen Gleichungen sind dann von selbst erfüllt. Das Fachwerk ist, da es beliebige im Gleichgewicht stehende äußere Kräfte aufnehmen kann, statisch bestimmt. Verschwindet aber der Wert der Determinante, so sind die $3m+3$ Gleichungen nur für die Komponenten spezieller Kräftegruppen lösbar, jedoch auf unzählig viele Arten. Unter dieser Bedingung, aber auch nur dann, ist das Fachwerk in sich einspannbar. Die Stäbe können in der Art eingespannt werden, daß auf jeden Knotenpunkt Stabkräfte wirken, die einander das Gleichgewicht halten[1].

36. Zur näheren Untersuchung dieser Verhältnisse ersetzen wir die drei Identitäten (15a.) durch drei andere, in denen X_0, Y_0, Z_0 nicht mehr vorkommen:

$$\begin{gathered}\sum_{\alpha=1}^{m}(c_\alpha - c_0)Y_\alpha - (b_\alpha - b_0)Z_\alpha \equiv 0\,, \qquad \sum_{\alpha=1}^{m}(a_\alpha - a_0)Z_\alpha - (c_\alpha - c_0)X_\alpha \equiv 0\,, \\ \sum_{\alpha=1}^{m}(b_\alpha - b_0)X_\alpha - (a_\alpha - a_0)Y_\alpha \equiv 0\,.\end{gathered} \tag{16.}$$

---

[1] Hierzu vergleiche man: Henneberg, Statik der starren Systeme, Darmstadt 1886, § 44, S. 258, Föppl, Das Fachwerk im Raume, Leipzig 1892, § 20, S. 27, Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, Leipzig 1886, § 2, S. 5. Die Darstellung Castiglianos (a. a. O. S. 5[1]) bezieht sich in erster Linie auf Raumfachwerke.

X_1, Y_1, Z_1 fallen heraus, wenn wir diese Identitäten der Reihe nach mit $a_1 - a_0, b_1 - b_0, c_1 - c_0$ multiplizieren und addieren. So entsteht eine Beziehung

$$\sum_{\alpha=2}^{m} (U_\alpha X_\alpha + V_\alpha Y_\alpha + W_\alpha Z_\alpha) \equiv 0 \tag{17.}$$

für $X_2, X_3, \cdots, X_m, Y_2, Y_3, \cdots, Y_m, Z_2, Z_3, \cdots, Z_m$ allein[1], und zwar ist

$$\begin{aligned} U_\alpha &= (b_\alpha - b_0)(c_1 - c_0) - (c_\alpha - c_0)(b_1 - b_0) = (b_0 - b_1)(c_\alpha - c_1) - (c_0 - c_1)(b_\alpha - b_1), \\ V_\alpha &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; = (c_0 - c_1)(a_\alpha - a_1) - (a_0 - a_1)(c_\alpha - c_1), \\ W_\alpha &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; = (a_0 - a_1)(b_\alpha - b_1) - (b_0 - b_1)(a_\alpha - a_1). \end{aligned} \tag{18.}$$

Der erste Stab verbinde A_0 und A_1. Nur die sechs ersten Gleichungen (13.) enthalten σ_1. Daneben bestehen $3m-3$ Gleichungen für die $3m-4$ Größen $\sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_{3m-3}$ allein. Man lasse nun $m+1$ beliebige im Gleichgewicht stehende Kräfte $Q_0, Q_1, \cdots, Q_m$ in $A_0, A_1, \cdots, A_m$ angreifen. Für ihre Komponenten $X_0, Y_0, Z_0, X_1, Y_1, Z_1, \cdots, X_m, Y_m, Z_m$ bestehen die entwickelten Identitäten (15.), (16.), (17.). Offenbar bleiben sie aber auch für die Größen $X'_0, Y'_0, Z'_0, X'_1, Y'_1, Z'_1, \cdots, X'_m, Y'_m, Z'_m$ gültig, wenn wir mit ganz willkürlichen Werten $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{3m-3}$

$$X'_\alpha \equiv X_\alpha - \sum_{\beta=1}^{3m-3} a_{\alpha,\beta}\sigma_\beta, \quad Y'_\alpha \equiv Y_\alpha - \sum_{\beta=1}^{3m-3} b_{\alpha,\beta}\sigma_\beta, \quad Z'_\alpha \equiv Z_\alpha - \sum_{\beta=1}^{3m-3} c_{\alpha,\beta}\sigma_\beta \qquad (\alpha = 0, 1, \cdots, m)$$

setzen, denn $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{3m-3}$ fallen einzeln heraus. Die Identität

$$\sum_{\alpha=2}^{m} (U_\alpha X'_\alpha + V_\alpha Y'_\alpha + W_\alpha Z'_\alpha) \equiv 0$$

zeigt uns nun, daß von den $3m-3$ letzten Gleichungen unseres Gleichungssystems (13.):

$$X'_2 = 0, Y'_2 = 0, Z'_2 = 0, \cdots, X'_{m-1} = 0, Y'_{m-1} = 0, Z'_{m-1} = 0, X'_m = 0, Y'_m = 0, Z'_m = 0$$

die letzte eine Folge der $3m-4$ anderen ist, sobald W_m von Null verschieden ist, daß aber noch wenigstens eine von diesen $3m-4$ Gleichungen von den anderen abhängt, wenn W_m verschwindet. Bezeichnen wir mit $Z_{m,1}$ den Wert der Determinante dieser $3m-4$ Gleichungen, so verschwindet $Z_{m,1}$ zugleich mit W_m, aber umgekehrt ist W_m notwendig von Null verschieden, wenn dies von $Z_{m,1}$ gilt. Es sei also $Z_{m,1} \gtrless 0$; die erwähnten $3m-4$ Gleichungen können auf genau eine Weise nach $\sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_{3m-3}$ aufgelöst werden, wie wir auch $X_2, Y_2, Z_2, \cdots, X_{m-1}, Y_{m-1}, Z_{m-1}, X_m, Y_m$ annehmen mögen; und zwar müssen die ersteren Größen alle verschwinden, wenn dies von den letzteren gilt. Die letzte Gleichung $Z'_m = 0$ ist nun von selbst erfüllt, da W_m von Null verschieden ist. Setzen wir dasselbe für den Augenblick für $c_0 - c_1$ voraus, so kann durch Verfügung über σ_1 die sechste Gleichung unseres Systems (13.)

---

[1] Die Identität (17.) drückt aus, daß die Summe der Momente der Kräfte $Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$ für die Achse $A_0 A_1$ verschwindet. Das war zu erwarten, weil sie die Wirkungslinien von Q_0 und Q_1 trifft. Vergl. Henneberg, Statik der starren Systeme, Darmstadt 1886, § 14.

$$Z'_1 = Z_1 - (c_0 - c_1)\sigma_1 - c_{1,2}\sigma_2 - c_{1,3}\sigma_3 - \cdots - c_{1,3m-3}\sigma_{3m-3} = 0,$$

erfüllt werden, welchen Wert auch Z_1 annimmt; mit Z_1 verschwindet auch σ_1, wenn dies für $\sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_{3m-3}$ schon festgestellt war. Aus den Identitäten (15.) und (16.) kann man nunmehr folgern:

$$X'_0 + X'_1 = 0,\ Y'_0 + Y'_1 = 0,\ Z'_0 = 0,\ (c_1 - c_0)Y'_1 = 0,\ -(c_1 - c_0)X'_1 = 0.$$

Die Größen $X'_0, Y'_0, Z'_0, X'_1, Y'_1$ verschwinden also für die ermittelten Werte $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_{3m-3}$. Die fünf ersten Gleichungen unseres Systems und die letzte sind Folgen der $3m-3$ übrigen, wenn $Z_{m,1}$ und $c_0 - c_1$ von Null verschieden sind. Die sechste Gleichung können wir durch die fünfte ersetzen, wenn $b_0 - b_1$ von Null verschieden ist, durch die vierte, wenn dies von $a_0 - a_1$ gilt. Da $a_0 - a_1, b_0 - b_1, c_0 - c_1$ sicher nicht gleichzeitig verschwinden, so ist das Fachwerk statisch bestimmt, wenn $Z_{m,1}$ von Null verschieden ist. Es nimmt jedes System in Gleichgewicht stehender äußerer Kräfte $Q_0, Q_1, \cdots, Q_m$ mit einem wohl bestimmten System von Spannkräften auf, kann aber nicht in sich eingespannt werden.

37. Verschwindet $Z_{m,1}$, so kann man Werte von $\sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_{3m-3}$, die nicht alle verschwinden, so bestimmen, daß die Gleichungen

$$X_2 = 0,\ Y_2 = 0,\ Z_2 = 0,\ \cdots,\ X_{m-1} = 0,\ Y_{m-1} = 0,\ Z_{m-1} = 0,\ X_m = 0,\ Y_m = 0 \quad (18.)$$

erfüllt sind. Bei der Einsetzung in die sieben übrigen Gleichungen des Systems (13.) entstehen Werte, die den Identitäten (15.), (16.), (17.) genügen. Es ist also:

$$\begin{gathered}
X_0 + X_1 = 0, \qquad Y_0 + Y_1 = 0, \qquad Z_0 + Z_1 = 0, \\
(c_1 - c_0)Y_1 - (b_1 - b_0)Z_1 - (b_m - b_0)Z_m = 0, \\
(a_1 - a_0)Z_1 + (a_m - a_0)Z_m - (c_1 - c_0)X_1 = 0, \\
(b_1 - b_0)X_1 - (a_1 - a_0)Y_1 = 0, \\
W_m Z_m = 0.
\end{gathered}$$

Ist W_m von Null verschieden, so verschwindet also Z_m. Erteilt man nun, je nachdem sich $a_1 - a_0, b_1 - b_0, c_1 - c_0$ als von Null verschieden erweist, durch Verfügung über σ_1 der Größe X_1, Y_1, Z_1 den Wert Null, so verschwinden in jedem Fall alle sieben Größen $X_0, Y_0, Z_0, X_1, Y_1, Z_1, Z_m$. Das Fachwerk ist in sich einspannbar, nicht mehr statisch bestimmt.

Dieses Resultat können wir aber nicht mehr folgern, wenn W_m verschwindet und mit ihm $Z_{m,1}$. Ein Fachwerk, das bei allgemeiner Lage zum Koordinatensystem sich als statisch bestimmt erwiesen hat, werde nämlich so gedreht, daß W_m verschwindet, also die z-Achse zur Ebene $A_0 A_1 A_m$ parallel liegt. Läßt man allein in den Punkten A_0, A_1, A_m Kräfte Q_0, Q_1, Q_m angreifen, von denen die letzte zur z-Achse parallel ist, so gelten für die nun entstehenden Spannkräfte $\sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_{3m-3}$, die nicht alle gleich Null sind, die Gleichungen (18.) und es verschwindet $Z_{m,1}$.

Setzt man, wie üblich, die Anzahl der Knotenpunkte $(m+1)$ gleich n, so besteht das Theorem:

XIII. *Man stelle für jeden Knotenpunkt eines Raumfachwerks von n Knotenpunkten und $3n-6$ Stäben drei Gleichungen auf zur Ermittlung der Komponenten der Kraft, welche bei Einspannung aller Stäbe den auf ihn wirkenden Stabkräften das Gleichgewicht hält. Aus dem Koeffizientenrechteck der $3n$ so entstandenen Gleichungen* (13.) *entferne man die auf den β^{ten} Stab bezügliche Vertikalreihe und die sechs Horizontalreihen, welche sich auf seine beiden Endpunkte beziehen (A_λ und A_μ). Hierauf beseitige man noch eine der drei Horizontalreihen, welche sich auf einen von A_λ und A_μ verschiedenen Punkt A_α beziehen. Aus dem zurückgebliebenen Koeffizientenquadrat von $3n-7$ Horizontal- und Vertikalreihen bilde man die Determinante und bezeichne ihren Wert mit $X_{\alpha,\beta}$, $Y_{\alpha,\beta}$ oder $Z_{\alpha,\beta}$, je nachdem man die erste, zweite oder dritte Horizontalreihe von A_α beseitigt, also die x-, y- oder z-Achse bevorzugt hat.*

Ist irgendeiner dieser $(3n-6)^2$ Werte $X_{\alpha,\beta}, Y_{\alpha,\beta}, Z_{\alpha,\beta}$ von Null verschieden, so ist das Fachwerk statisch bestimmt. Irgend eine andere dieser Größen verschwindet dann und nur dann, wenn die zu ihr gehörige Achse parallel zu der Ebene liegt, welche ihren Stab $A_\lambda A_\mu$ mit dem bei ihr bevorzugten Knotenpunkt A_α verbindet, insbesondere also dann, wenn $A_\lambda, A_\mu, A_\alpha$ einer Geraden angehören.

Verschwindet irgendeine der Größen $X_{\alpha,\beta}, Y_{\alpha,\beta}, Z_{\alpha,\beta}$, ohne daß die bezeichnete Bedingung stattfindet, so gilt das Gleiche von allen anderen; das Fachwerk ist in sich einspannbar, also nicht mehr statisch bestimmt.

38. Ein Raumfachwerk von n Knotenpunkten und $3n-6$ Stäben ist bekanntlich instabil, wenn es nicht mehr statisch bestimmt ist. Verschiebt man die $n (= m+1)$ Knotenpunkte $A_0, A_1, \cdots, A_m$ unendlich wenig, wobei sie in die Lagen $A'_0, A'_1, \cdots, A'_m$ gelangen, so bestehen für die $3n$ Zuwachse der Koordinaten $3n-6$ lineare homogene Gleichungen, wenn hierbei alle Stäbe des Fachwerks ihre Länge bewahren sollen. Jede von ihnen enthält sechs der unendlich kleinen Zuwachse. Verschiebt man jetzt das deformierte Fachwerk so, daß A'_0 und A'_1 sich mit A_0 und A_1 decken, A'_m aber dieselbe z-Ordinate hat, wie A_m, so gelten auch für die so entstandenen speziellen Zuwachse die aufgestellten Gleichungen. Anders ausgedrückt, wir können die zu $A_0 A_1$ gehörende Gleichung ganz unterdrücken, in den $3n-7$ übrigen Gleichungen aber die auf die Endpunkte von $A_0 A_1$ und die letzte Koordinate von A_m sich beziehenden Terme beseitigen. Daß die Determinante dieser $3n-7$ linearen homogenen Gleichungen den Wert Null hat, ist eine notwendige Bedingung für die Instabilität des Fachwerks. Im allgemeinen ist sie auch hinreichend. Nur wenn die z-Achse parallel zu der Ebene $A_0 A_1 A_m$ ist, liefert eine unendlich kleine Drehung des gegebenen Fachwerks um $A_0 A_1$, bei welcher sich ja c_m nicht ändert, für die Koordinaten $a_2, b_2, c_2, \ldots, a_{m-1}, b_{m-1}, c_{m-1}, a_m, b_m$ Zuwachse, welche jenen $3n-7$ Gleichungen genügen, ohne daß eine Deformation stattfände. Wir gelangen also zu einer neuen Reihe von $(3n-6)^2$ Determinanten $(3n-7)^{\text{ter}}$ Ordnung und zu Beziehungen, wie sie im Theorem XIII. ausgesprochen sind. Betrachtet man wieder das Quadrat der Länge eines Fachwerkstabes als Funktion aller Koordinaten der veränderlich gedachten Knotenpunkte, so werden in dem Koeffizientenrechteck des ersten Gleichungssystems (13.) die Glieder der β^{ten} Vertikalreihe, in dem Größenrechteck des zweiten Gleichungssystems aber die Glieder der β^{ten} Horizontalreihe zu den partiellen Differentialquotienten der β^{ten} Funktion proportional. Nach der Methode von Föppl kann man zeigen, daß zwei entsprechende Determinanten nur gleichzeitig den Wert Null annehmen können[1].

---

[1] Auch wenn A_0, A_1 nicht durch einen Fachwerkstab miteinander verbunden sind, ist die letzte Gleichung des Systems (13.) eine Folge der $3m-4$ $(=3n-7)$ ihr vorangehenden Gleichungen, wenn man mit Henneberg (a. a. O. S. 50[1], § 42) und Föppl (a. a. O. S. 50[1], §§ 4, 5, 20) A_0 im Anfangspunkt der Koordinaten festhält, A_1 nur auf der x-Achse, A_m nur auf der x, y-Ebene, jedoch außerhalb der x-Achse verschiebt. Alsdann ist nämlich W_m oder $-a_1 b_m$ von Null verschieden. Mit den $3m-4$ erwähnten Gleichungen bildet die vierte ein System von $3m-3$ Gleichungen, von denen die sechs übrigen sicher Folgen

39. Wir ersetzen jetzt A_0 durch einen beweglichen Punkt 0 mit den Koordinaten x, y, z; den $k+2$ von 0 ausgehenden Stäben $0A_1, 0A_2, \cdots, 0A_{k+2}$ weisen wir die Ziffern $\beta = 1, 2, \cdots, k+2$ zu. $X_{\alpha,\beta}, Y_{\alpha,\beta}, Z_{\alpha,\beta}$ sind also, je nachdem β größer als $k+2$ ist oder nicht, Formen $(k+2)^{\text{ten}}$ oder $(k+1)^{\text{ten}}$ Grades in x, y, x. Die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} U_m &= 0 = (y-b_1)(c_m-c_1)-(z-c_1)(b_m-b_1), \\ V_m &= 0 = (z-c_1)(a_m-a_1)-(x-a_1)(c_m-c_1), \qquad (19.) \\ W_m &= 0 = (x-a_1)(b_m-b_1)-(y-b_1)(a_m-a_1) \end{aligned}$$

stellen die drei Ebenen dar, welche durch die Gerade $A_m A_1$ parallel zur x-, y-, z-Achse gelegt sind. Von den Größen $a_m-a_1, b_m-b_1, c_m-c_1$ ist sicher wenigstens eine, sagen wir die erste, von Null verschieden. Die beiden letzten Gleichungen stellen wirkliche Ebenen dar; die Form U_m aber, und mit ihr $X_{m,1}$, kann identisch verschwinden. Sollte aber $Y_{m,1}$ für jeden Punkt des Raumes verschwinden, so würde das Fachwerk für jeden Punkt 0 in sich einspannbar sein, und es würden alle Größen $X_{\alpha,\beta}, Y_{\alpha,\beta}, Z_{\alpha,\beta}$ identisch verschwinden. Wir setzen nun

$$Y_{m,1} \equiv V_m \Phi(x, y, z).$$

Ist für irgend einen Raumpunkt x, y, z

$$V_m = 0, \qquad \Phi(x, y, z) = 0, \qquad Y_{m,1} = 0,$$

so haben wir ein in sich einspannbares Fachwerk vor uns. Da alle $(3n-6)^2$ Werte $X_{\alpha,\beta}, Y_{\alpha,\beta}, Z_{\alpha,\beta}$ für x, y, z verschwinden, so kann man die Gleichungen ansetzen:

$$X_{\alpha,\beta} \equiv U_{\alpha,\beta}\Phi(x, y, z), \qquad Y_{\alpha,\beta} \equiv V_{\alpha,\beta}\Phi(x, y, z), \qquad Z_{\alpha,\beta} \equiv W_{\alpha,\beta}\Phi(x, y, z).$$

---

sind. Das Fachwerk ist also dann, aber auch nur dann, statisch bestimmt, wenn die Determinante dieser Gleichungen einen von Null verschiedenen Wert D besitzt. Von selbst kommt man nun auf die Determinante von $3m-3$ homogenen linearen Gleichungen für $3m-3$ unendlich kleine Unbekannte bei der Untersuchung der Stabilität. Föppl betrachtet nun wieder die Quadrate der Stablängen als Funktionen aller $3n-6$ veränderlichen Ordinaten und zeigt, daß zu den partiellen Differentialquotienten einer solchen Funktion die Glieder einer Vertikalreihe der ersten, einer Horizontalreihe der zweiten Determinante proportional sind, so daß beide gleichzeitig den Wert Null annehmen, die zweite aber sich als Funktionaldeterminante darstellt. Legt man jetzt einen Fachwerkstab in die x-Achse — eine entsprechende Voraussetzung macht Schlink bei einer sehr ausführlichen Darstellung der Föpplschen Entwicklung (Statik der Raumfachwerke, Leipzig und Berlin 1907, Art. 38, S. 86) —, so würde sich der Schluß unmittelbar ziehen lassen, daß die Determinante in eine solche erster und eine andere $(3m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung zerfällt, daß nämlich von D der Faktor $-a_1^2 b_m$ oder $a_1 W_m$ sich ablöst.

$U_{\alpha,\beta}, V_{\alpha,\beta}, W_{\alpha,\beta}$ sind lineare Funktionen von x, y, z erstens, wenn

$$\beta \leqq k+2 \text{ oder } \alpha = 0, \beta > k+2$$

ist. Immer nur eine von drei Funktionen $U_{\alpha,\beta}, V_{\alpha,\beta}, W_{\alpha,\beta}$ kann identisch verschwinden. In allen übrigen Fällen sind $U_{\alpha,\beta}, V_{\alpha,\beta}, W_{\alpha,\beta}$ Konstante, und zwar ist z. B. für $U_{\alpha,\beta}$ der Wert Null einzusetzen, wenn die x-Achse zur Ebene $A_\alpha A_\lambda A_\mu$ parallel sein sollte. Ist das nicht der Fall, so unterscheidet sich die Gleichung

$$X_{\alpha,\beta} = 0$$

nur um eine multiplikative Konstante von der Gleichung der Grenzfläche

$$\Phi(x, y, z) = 0. \tag{20.}$$

$X_{\alpha,\beta}$ ist zunächst eine Form $(k+2)^{\text{ten}}$ Grades, aus der aber die Glieder $(k+2)^{\text{ter}}$ und $(k+1)^{\text{ter}}$ Dimension herausfallen, denn $\Phi(x, y, z)$ ist ja eine Form k^{ten} Grades.

40. Die Schlüsse, welche oben (7., 8.) an dem Beispiel eines ebenen Fachwerks erläutert wurden, übertragen sich nun ohne weiteres auf das Raumfachwerk und ergeben das Resultat:

XIV. Betrachtet man an einem Fachwerk von n Knotenpunkten und $3n-6$ Stäben allein den Punkt 0, der die Stäbe $0A_1, 0A_2, \cdots, 0A_{k+2}$ entsendet, als veränderlich, so kann das Fachwerk für jede Lage von 0 in sich einspannbar sein, oder es tritt dieser Ausnahmefall ein, wenn 0 einer Fläche k^{ter} Ordnung angehört, die $A_1, A_2, \cdots, A_{k+2}$ enthält.

Diese Grenzfläche enthält jeden Stab des Fachwerks, welcher zwei der Punkte $A_1, A_2, \cdots, A_{k+2}$ miteinander verbindet, und jeden Knotenpunkt des Fachwerks, welcher mit vier von den Punkten $A_1, A_2, \cdots, A_{k+2}$ durch Fachwerkstäbe verbunden ist. Der Knotenpunkt ist ein zweifacher, dreifacher, $\cdots$ Punkt der Grenzfläche, wenn er mit fünf, sechs, $\cdots$ Punkten der Reihe $A_1 A_2 \cdots A_{k+2}$ durch Stäbe verbunden ist.

Daß zu einem vierstäbigen Knotenpunkt eine A_1, A_2, A_3, A_4 enthaltende Oberfläche zweiter Ordnung als Grenzfläche gehört, hat Henneberg erwiesen[1].

---

[1] Henneberg, Statik der starren Systeme, Darmstadt 1886, S. 254. Hingegen bedarf die Bemerkung, es gehöre zu einem fünfstäbigen Knotenpunkt eine Grenzfläche vierter Ordnung (S. 257), offenbar einer Berichtigung.

VI.

41. Ein Raumfachwerk enthalte die Knotenpunkte $0, A_1, A_2, \cdots, A_{k+2}$, $B_1, B_2, \cdots, B_r$. Zunächst seien $0A_1, 0A_2, \cdots, 0A_{k+2}$ Stäbe (erster Art) desselben. Jeder seiner $2k+1-l$ Stäbe zweiter Art werde von zwei Punkten der Reihe $A_1\, A_2 \cdots A_{k+2}$ begrenzt, endlich verbinde jeder von $3r+l$ Stäben dritter Art einen der Punkte $B_1, B_2, \cdots, B_r$ mit einem der Punkte $A_1, A_2, \cdots, A_{k+2}, B_1, B_2, \cdots, B_r$. Das Fachwerk enthält

$$n = k+r+3$$

Knotenpunkte und

$$3n-6 = 3k+3r+3 = k+2+2k+1-l+3r+l$$

Stäbe; es sei bei allgemeiner Lage des Punktes 0 statisch bestimmt. Das so gebildete Fachwerk soll nun (35.) der Reihe nach in den Punkten $0, A_1, A_2, \cdots, A_{k+2}, B_1, B_2, \cdots, B_r$ in sich eingespannt sein. In den $3r$ letzten Gleichungen kommen nur die Spannkräfte der $3r+l$ Stäbe dritter Art vor. Wenigstens eine von den Determinanten, die sich aus $3r$ Vertikalreihen des zugehörigen Koeffizientenrechtecks bilden lassen, hat einen von Null verschiedenen Wert. Andernfalls würden, entgegen der Voraussetzung, z. B. $X_{3,1}, Y_{3,1}, Z_{3,1}$ identisch verschwinden. Offenbar darf l also nicht negativ sein, sonst enthielte das Koeffizientenrechteck weniger als $3r$ Vertikalreihen, die nicht mit Nullen besetzt sind; auch würden die Stäbe erster und zweiter Art ein statisch unbestimmtes Fachwerk von $k+3$ Knotenpunkten und mehr als $3k+3$ Stäben bilden.

Dies vorausgesetzt, lassen sich, wenn das Fachwerk in $B_1, B_2, \cdots, B_r$ in sich eingespannt werden soll, auf mindestens eine Weise l Hauptstäbe aus den Stäben dritter Art aussondern, denen wir hierbei ganz beliebige Spannkräfte erteilen können. Sie mögen sich zur Einheit der Spannkraft verhalten wie

$$u_1 : u_2 : \cdots : u_l : 1. \tag{21.}$$

Von den übrigen Stäben dritter Art erhält alsdann der ρ^{te} die Spannkraft

$$S_\rho = S_{\rho,1}\, u_1 + S_{\rho,2}\, u_2 + \cdots + S_{\rho,l}\, u_l. \qquad (\rho = 1, 2, \cdots, 3r) \tag{21a.}$$

Als Hauptstäbe gelten auch die Stäbe zweiter Art, deren Spannkräfte sich zur Einheit der Spannkraft verhalten mögen, wie

$$u_{l+1} : u_{l+2} : \cdots : u_{2k+1} : 1. \tag{21b.}$$

In A_α ist nun eine Kraft

$$P_\alpha = P_{\alpha,1} u_1 + P_{\alpha,2} u_2 + \cdots + P_{\alpha,2k+1} u_{2k+1} \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, k+2) \qquad (21\text{c.})$$

erforderlich, um allen Stabkräften das Gleichgewicht zu halten, die in Stäben zweiter und dritter Art auf A_α wirken. Die Kräfte $P_{1,\beta}, P_{2,\beta}, \cdots, P_{k+2,\beta}$ der β^{ten} Hauptgruppe sind in $A_1, A_2, \cdots, A_{k+2}$ anzubringen, wenn von allen $2k+1$ Hauptstäben allein der β^{te} eingespannt ist, und zwar mit der Einheit der Spannkraft Verbindet der β^{te} $(\beta > l)$ Hauptstab A_λ und A_μ, so sind $P_{\lambda,\beta}$ und $P_{\mu,\beta}$ die einzigen von Null verschiedenen Kräfte der β^{ten} Hauptgruppe. Der Stab $A_\lambda A_\mu$ gehört, da jeder seiner Punkte in den Wirkungslinien von $P_{\lambda,\beta}$ und $P_{\mu,\beta}$ liegt, der Grenzfläche vollständig an. Auf jeden ihrer Punkte wirken nämlich alle von Null verschiedenen Kräfte einer Gruppe $P_1 P_2 \cdots P_{k+2}$, die immer miteinander im Gleichgewicht stehen. Die bisweilen sehr umständliche Ermittlung der Hauptgruppen geht nach den für den Fall der Ebene gegebenen Regeln (16.) vor sich.

42. Ein Stabwerk aus Stäben zweiter und dritter Art sei in allen seinen der Reihe $B_1 B_2 \cdots B_r$ entstammenden Knotenpunkten in sich eingespannt. Die Spannkräfte seiner Stäbe entstehen nach den Gleichungen (21.), (21a.), (21b.) für Werte der Parameter, bei denen alle außerhalb des Stabwerks liegenden Stäbe zweiter und dritter Art ohne Spannkraft sind. Von den Kräften der speziellen Gruppe $P_1' P_2' \cdots P_{k+2}'$, welche zu diesen Parameterwerten nach den Formeln (21c.) gehört, sind von Null verschieden nur diejenigen, welche zur Herstellung des Gleichgewichts in Knotenpunkten des Stabwerks aus der Reihe $A_1 A_2 \cdots A_{k+2}$ anzubringen sind. Enthält die Gruppe nur zwei Kräfte, so gehört also die Verbindungslinie $A_\alpha A_\beta$ ihrer Angriffspunkte der Grenzfläche an. Enthält sie deren drei, so wirken sie auf einen Punkt der Grenzfläche, welcher mit ihren Angriffspunkten A_α, A_β, A_γ in einer Ebene liegt. Jeder Punkt der Ebene kommt in Betracht, wenn das Stabwerk in ein statisch bestimmtes Fachwerk übergeht. Würde das Stabwerk durch Hinzufügung von $l+2$ Stäben erster Art in ein statisch bestimmtes Fachwerk übergehen, so gehört die Grenzfläche desselben derjenigen des Hauptfachwerks an. Tragen q Stäbe dritter Art in Punkten der Reihe $A_1 A_2 \cdots A_{k+2}$ angreifende und einander das Gleichgewicht haltende Kräfte, und sind ihre der Reihe $B_1 B_2 \cdots B_r$ angehörenden Endpunkte durch Stäbe zweiter und dritter Art starr miteinander verbunden, so bilden alle diese Stäbe ein Stabwerk der betrachteten Art, die Kräfte eine aus Spezialwerten

von $u_1, u_2, \cdots, u_{2k+1}$ hervorgehende Gruppe $P_1 P_2 \cdots P_{k+2}$. Das Fachwerk kann in einen Punkt übergeben. Man erkennt, daß der Knotenpunkt B_1 zugleich ein Punkt 0_1 der Grenzfläche ist, wenn von den Geraden $B_1 A_1, B_1 A_2, \cdots, B_1 A_{k+2}$ mehr als drei — sagen wir $s+3$ — Stäbe des Fachwerks sind. s geeignete dieser Stäbe können nämlich geradezu als Hauptstäbe dritter Art betrachtet werden. Die drei übrigen sind die einzigen Stäbe, welche gemäß den Formeln (21a.) noch eingespannt sind, wenn wir die $l-s$ anderen Hauptstäbe dritter Art entspannen. $s+3$ in $A_1, A_2, \cdots, A_{k+2}$ angreifende Kräfte bilden also eine spezielle Gruppe $P_1' P_2' \cdots P_{k+2}'$, wenn sie in den $s+3$ bezeichneten Stäben auf B_1 wirken und im Gleichgewicht stehen. B_1 ist zugleich ein Punkt 0_1 der Grenzfläche, und zwar, wie wir sehen werden, ein s-facher Punkt.

Sind sämtliche Stäbe $0A_1, 0A_2, \cdots, 0A_{k+2}$ in einem Teilfachwerk von m Knotenpunkten und $2m-3$ Stäben enthalten, so ist es das »Erdfachwerk« eines aus den übrigen Stäben des Hauptfachwerks gebildeten statisch bestimmten gestützten Fachwerks, wenn nicht das Hauptfachwerk für jeden Punkt 0 des Raumes in sich eingespannt sein sollte.

43. Um nun zuerst für den Fall $k=2$ die Gleichung der Grenzfläche zu erhalten, erteilen wir einem der vier Stäbe $0A_1, 0A_2, 0A_3, 0A_4$ und den l Hauptstäben dritter Art beliebige Spannkräfte und spannen unser Fachwerk in den Punkten $0, B_1, B_2, \cdots, B_r$ in sich ein. Q_α sei die Resultante der in A_α angreifenden Stabkräfte. Mittels der Kräfte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, die im Gleichgewicht stehen, spannen wir das aus den Kanten des Tetraeders $A_1 A_2 A_3 A_4$ bestehende Fachwerk ein. In $A_\lambda A_\mu$ entsteht eine Spannkraft von der Form

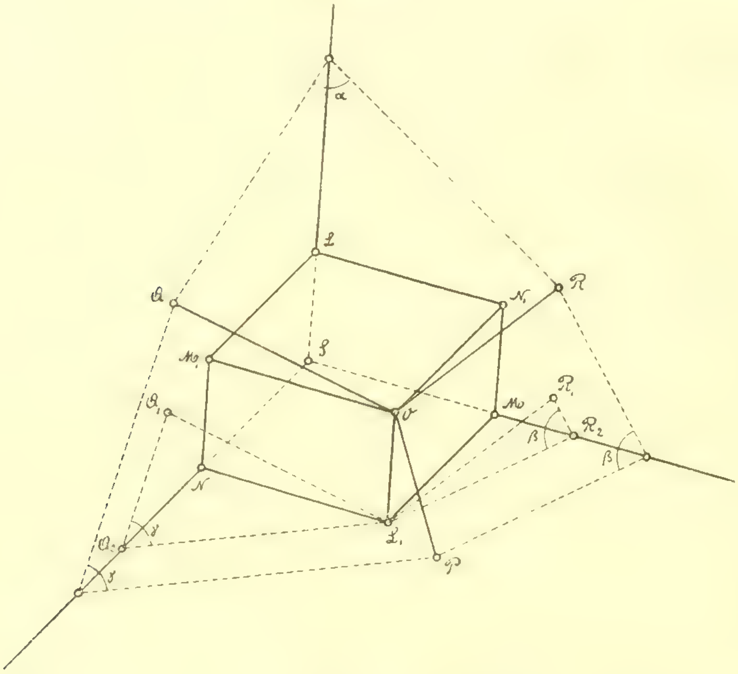
$$S_{\lambda,\mu} \equiv u S_{\lambda,\mu}^{(0)} + u_1 S_{\lambda,\mu}' + u_2 S_{\lambda,\mu}'' + \cdots + u_l S_{\lambda,\mu}^{(l)} \qquad (\lambda \gtrless \mu = 1, 2, 3, 4).$$

Die $S_{\lambda,\mu}^{(0)}$ entstehen, wenn die Kräfte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 in den Geraden $0A_1, 0A_2, 0A_3, 0A_4$ wirken; wenn jene Stäbe entspannt sind und von allen Hauptstäben allein der β^{te} $(\beta \leqq l)$ mit der Einheit der Spannkraft eingespannt ist, entstehen die Spannkräfte $S_{\lambda,\mu}^{(\beta)}$. Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 halten dann den Kräften $P_{1,\beta}, P_{2,\beta}, P_{3,\beta}, P_{4,\beta}$ der β^{ten} Hauptgruppe das Gleichgewicht. Das Fachwerk wird in sich einspannbar sein, wenn die $l+1$ Kanten des Tetraeders, die nicht dem Hauptfachwerk angehören, die Spannkraft Null erhalten.

Zur Ermittlung der $S_{\lambda,\mu}^{(0)}$ bedarf es einer kurzen Hilfsbetrachtung. An einem Parallelepipedon seien die Kanten SL, SM, SN zu den Kanten

$L_1 0$, $M_1 0$, $N_1 0$ parallel, so daß S und 0 die Endpunkte einer Hauptdiagonale sind (Fig. 9.). Auf die Ebenen MSN, NSL, LSM fälle man von 0 aus die Lote $0P$, $0Q$, $0R$; ferner fälle man von L_1 aus die Lote $L_1 Q_1$ und $L_1 Q_2$ auf die Ebene NSL und die Kante SN, so daß $Q_1 L_1 = Q 0$ ist. Man hat also

Fig. 9.



$$Q\,0 = Q_1 L_1 = Q_2 L_1 \sin Q_1 Q_2 L_1 = N L_1 \sin Q_2 N L_1 \sin Q_1 Q_2 L_1$$
$$= S M \sin Q_1 Q_2 L_1 \sin M S N = S M \sin \gamma \sin M S N.$$

$Q_1 Q_2 L_1$ ist der SN anliegende Winkel γ des Parallelepipedons. Fällt man nun von L_1 aus die Lote $L_1 R_1$ und $L_1 R_2$ auf die Ebene LSM und die Gerade SM, so folgt ebenso

$$R\,0 = SN \sin \beta \sin MSN.$$

Es besteht also die Proportion

$$Q\,O \sin \beta : R\,O \sin \gamma = SM : SN,$$

welche sich zu der Doppelproportion erweitert

$$P\,O \sin \alpha : Q\,O \sin \beta : R\,O \sin \gamma = S\,L : SM : SN.$$

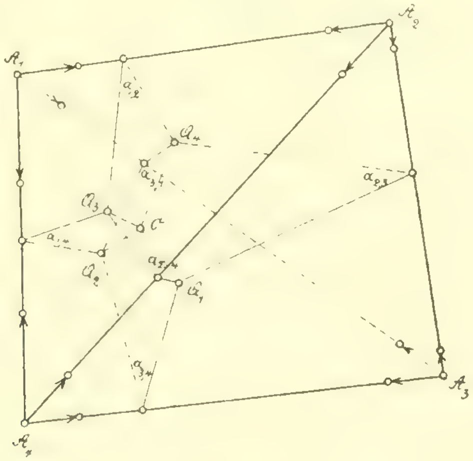
Zerlegt man eine in $S\,0$ wirkende Kraft nach den von S ausgehenden Kanten des Parallelepipedons, welche wir jetzt als x-, y-, z-Achse betrachten, so verhalten sich die Komponenten X, Y, Z der Kraft offenbar wie $SL : SM : SN$. Bezeichnen wir $P0, Q0, R0$ mit x_1, x_2, x_3, so bestehen die Proportionen

$$x_1 \sin \alpha : x_2 \sin \beta : x_3 \sin \gamma = X : Y : Z.$$

X soll mit positivem oder negativem Vorzeichen genommen werden, je nachdem die Kraft in der positiven oder negativen Richtung der x-Achse wirkt. Entsprechendes gilt für Y und Z. Alsdann müssen wir den Loten Vorzeichen geben, welche mit denen der schiefwinkligen Koordinaten x, y, z des Punktes 0 übereinstimmen.

44. Wird das Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ durch vier in $0A_1$, $0A_2$, $0A_3$, $0A_4$ wirkende, im Gleichgewicht stehende Kräfte eingespannt und versteht man unter $Q_1 0$, $Q_2 0$; $Q_3 0$, $Q_4 0$ oder x_1, x_2, x_3, x_4 die Abstände des Punktes 0 von den vier Ebenen $A_2A_3A_4$, $A_3A_1A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$, so kann man auf jede Ecke des Tetraeders die obige Hilfsbetrachtung anwenden, und es wirken also (Fig. 10.)

Fig. 10.



A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3	auf A_4	mit den	Kräften	$v_4x_1 \sin \alpha_{4,1}$, $v_4x_2 \sin \alpha_{4,2}$, $v_4x_3 \sin \alpha_{4,3}$,
A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4	» A_1	»	»	$v_1x_2 \sin \alpha_{1,2}$, $v_1x_3 \sin \alpha_{1,3}$, $v_1x_4 \sin \alpha_{1,4}$,
A_2A_3, A_2A_1, A_2A_4	» A_2	»	»	$v_2x_3 \sin \alpha_{2,3}$, $v_2x_1 \sin \alpha_{2,1}$, $v_2x_4 \sin \alpha_{2,4}$,
A_3A_1, A_3A_2, A_3A_4	» A_3	»	»	$v_3x_1 \sin \alpha_{3,1}$, $v_3x_2 \sin \alpha_{3,2}$, $v_3x_4 \sin \alpha_{3,4}$.

Hierbei ist $\alpha_{\lambda,\mu} = \alpha_{\mu,\lambda}$ der $A_\lambda A_\mu$ anliegende Flächenwinkel des Tetraeders. x_1, x_2, x_3, x_4 haben positives Vorzeichen, wenn 0 im Innern des Tetraeders liegt. Jede der Größen wechselt ihr Vorzeichen bei dem Durchgang des Punktes durch die zugehörige Ebene. Obwohl nun der Stab A_1A_2 z. B.

mit zwei entgegengesetzt gleichen Kräften auf seine beiden Endpunkte wirkt, müssen beide in der obigen Tabelle als gleich eingeführt werden; die auf A_1 wirkende Kraft gilt als positiv, wenn sie in der Richtung $A_1 A_2$ wirkt, die andere auf A_2 wirkende Kraft aber, wenn sie in der Richtung $A_2 A_1$ wirkt. Für jeden anderen Stab des Tetraederfachwerks gilt das gleiche; es ist also

$$v_1 = u x_1 , \quad v_2 = u x_2 , \quad v_3 = u x_3 , \quad v_4 = u x_4 .$$

In den sechs Tetraederkanten $A_2 A_3 , A_3 A_1 , A_1 A_2 , A_1 A_4 , A_2 A_4 , A_3 A_4$ entstehen also unter Einfluß von vier im Gleichgewicht stehenden Kräften, die in $0 A_1 , 0 A_2 , 0 A_3 , 0 A_4$ wirken, die Spannkräfte

$$\begin{aligned} S_{2,3}^{(0)} &= u x_2 x_3 \sin \alpha_{2,3} , & S_{3,1}^{(0)} &= u x_3 x_1 \sin \alpha_{3,1} , & S_{1,2}^{(0)} &= u x_1 x_2 \sin \alpha_{1,2} , \\ S_{1,4}^{(0)} &= u x_1 x_4 \sin \alpha_{1,4} , & S_{2,4}^{(0)} &= u x_2 x_4 \sin \alpha_{2,4} , & S_{3,4}^{(0)} &= u x_3 x_4 \sin \alpha_{3,4} . \end{aligned} \tag{22.}$$

Bilden $0 A_1 , 0 A_2 , 0 A_3 , 0 A_4$ mit den Stäben zweiter und dritter Art ein in sich einspannbares Fachwerk, so besteht nach dem Obigen eine Gleichung von der Form

$$S_{\lambda,\mu} \equiv u x_\lambda x_\mu \sin \alpha_{\lambda,\mu} + u_1 S'_{\lambda,\mu} + u_2 S''_{\lambda,\mu} + \cdots + u_l S^{(l)}_{\lambda,\mu} = 0 \tag{23.}$$

für jede Kante des Tetraeders, die nicht zugleich dem Hauptfachwerk angehört. Lägen weniger als $l+1$ solcher Gleichungen vor, so würden wir sie für jeden Punkt des Raumes befriedigen können. Es bestätigt sich also unser früheres Resultat (41.), daß ein Fachwerk eine Grenzfläche hinsichtlich 0 nur dann besitzen kann, wenn es l Hauptstäbe dritter Art und $5-l$ Hauptstäbe zweiter Art, d. h. Tetraederkanten, besitzt. Auch dann kann die Determinante des Gleichungssystems (23.), anstatt für die Punkte einer Grenzfläche, für alle Punkte des Raumes den Wert Null annehmen, dann nämlich, wenn für Spezialwerte $v_1 , v_2 , \cdots , v_l$ von $u_1 , u_2 , \cdots , u_l$ die $l+1$ Gleichungen nebeneinander bestehen

$$v_1 S'_{\lambda,\mu} + v_2 S''_{\lambda,\mu} + \cdots + v_l S^{(l)}_{\lambda,\mu} = 0 .$$

Nach Fortnahme von $0 A_1 , 0 A_2 , 0 A_3 , 0 A_4$, die man sich auf Null beansprucht denken kann, bleibt ein in allen Punkten $A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , B_1 , B_2 , \cdots , B_r$ in sich einspannbares Stabwerk von $3n-10$ Stäben und $n-1$ Knotenpunkten zurück. Befriedigt man die $l+1$ Gleichungen (23.), nachdem einer der Größen $u_1 , u_2 , \cdots , u_l$ der Wert Null erteilt ist, so entsteht im allgemeinen eine Raumkurve vierter Ordnung als Ort von 0. Jeder Punkt derselben liefert im Hauptfalle eine Einspannung, bei welcher der bevorzugte Hauptstab unbeansprucht bleibt, im speziellen Falle ein Fachwerk, das auf mehrfache Art in sich eingespannt werden kann, d. h. unter beliebiger Einspannung zweier Stäbe.

45. Gehört ($l = 5$) keine der Tetraederkanten dem Fachwerk an, so hat die Gleichung der Grenzfläche ihre allgemeinste Form

$$\begin{vmatrix} x_2x_3 \sin\alpha_{2,3}, & S'_{2,3}, & S''_{2,3}, & S'''_{2,3}, & S^{(4)}_{2,3}, & S^{(5)}_{2,3} \\ x_3x_1 \sin\alpha_{3,1}, & S'_{3,1}, & . & . & . & .\, S^{(5)}_{3,1} \\ x_1x_2 \sin\alpha_{1,2}, & S'_{1,2}, & . & . & . & ,\, S^{(5)}_{1,2} \\ x_1x_4 \sin\alpha_{1,4}, & S'_{1,4}, & . & . & . & ,\, S^{(5)}_{1,4} \\ x_2x_4 \sin\alpha_{2,4}, & S'_{2,4}, & . & . & . & ,\, S^{(5)}_{2,4} \\ x_3x_4 \sin\alpha_{3,4}, & S'_{3,4}, & . & . & . & ,\, S^{(5)}_{3,4} \end{vmatrix} = 0 \qquad (24.)$$

oder berechnet

$$(S_{2,3})x_2x_3 + (S_{3,1})x_3x_1 + (S_{1,2})x_1x_2 + (S_{1,4})x_1x_4 + (S_{2,4})x_2x_4 + (S_{3,4})x_3x_4 = 0\,.$$

Das ist in Tetraederkoordinaten die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung, die A_1, A_2, A_3, A_4 enthält. Der Ausnahmefall tritt dann ein, wenn alle Größen $(S_{\lambda,\mu})$, alle Unterdeterminanten der ersten Vertikalreihe verschwinden. Gehört A_3A_4 dem Hauptfachwerk an, so haben wir nur noch 4 Hauptstäbe dritter Art zur Verfügung ($l = 4$), brauchen aber nicht mehr dafür zu sorgen, daß die Gleichung

$$u\, x_3\, x_4 \sin\alpha_{3,4} + u_1 S'_{3,4} + u_2 S''_{3,4} + u_3 S'''_{3,4} + u_4 S^{(4)}_{3,4} = 0$$

erfüllt wird. In der obigen Determinantengleichung ist also die letzte Horizontalreihe und die letzte Vertikalreihe zu unterdrücken, oder es ist $(S_{3,4})$ gleich Null zu setzen. Die Gleichung wird bei beliebigen Werten von x_3 und x_4 befriedigt, wenn wir $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ setzen. A_3A_4 muß, wie wir schon oben (41.) sahen, der Grenzfläche angehören. Diese Schlußweise zeigt, daß alle dem Fachwerk angehörenden Tetraederkanten auf seiner Grenzfläche bezüglich 0 liegen. Enthält ($l = 0$) das Fachwerk alle Kanten des Tetraeders mit Ausnahme von A_1A_4, so ist, wenn es nicht etwa in allen Punkten $B_1, B_2, \cdots B_r$ in sich eingespannt werden kann und für jeden Punkt 0 in ein Grenzfachwerk übergeht, die Gleichung seiner Grenzfläche

$$x_1\, x_4 \sin\alpha_{1,4} = 0\,.$$

0 gehört also bei einem in sich eingespannten Fachwerk einer der Ebenen $A_1A_2A_3$ oder $A_2A_3A_4$ an.

Ist B_1 mit allen vier Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 durch Fachwerkstäbe verbunden, so werden für passende Spezialwerte $v_1, v_2, \cdots, v_l$ der Parameter $u, u_2, \cdots, u_l$ nach den Formeln (21.) und (21a.) von allen Stäben dritter Art nur $B_1 A_1, B_1 A_2, B_1 A_3, B_1 A_4$ eingespannt und zwar so, daß in B_1 Gleichgewicht besteht. Es bestehen also Gleichungen von der Form

$$x'_\lambda x'_\mu \sin \alpha_{\lambda, \mu} + v_1 S'_{\lambda, \mu} + v_2 S''_{\lambda, \mu} + \cdots + v_l S^{(l)}_{\lambda, \mu} = 0\,,$$

wenn wir unter x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 die Koordinaten von B_1 verstehen. Nach einem bekannten Determinantensatz kann man das allgemeine Glied der ersten Vertikalreihe in der Gleichung (24.) auf die Form bringen

$$(x_\lambda x_\mu - x'_\lambda x'_\mu) \sin \alpha_{\lambda, \mu}$$

und sieht, daß B_1 mit einem Punkte 0_1 der Grenzfläche zusammenfällt.

46. Um ($k = 3$) die Gleichung der Grenzfläche für einen Knotenpunkt 0 darzustellen, der fünf Stäbe $0A_1$, $0A_2$, $0A_3$, $0A_4$, $0A_5$ entsendet, verbinden wir A_5 durch die drei Stäbe $A_5 A_1$, $A_5 A_2$, $A_5 A_3$ fest mit dem Tetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$. Die so entstandene dreiseitige Doppelpyramide mit dem Mitteldreieck $A_1 A_2 A_3$ und den Spitzen A_4, A_5 ist ein statisch bestimmtes Fachwerk, solange A_4 und A_5 außerhalb der Ebene A_1, A_2, A_3 liegen, was wir voraussetzen. $7 - m$ Stäbe des Hilfsfachwerks mögen dem Hauptfachwerk angehören. Befinden sich unter den Stäben dritter Art l Hauptstäbe, so ist $l = m - 1$ oder $l = m$, je nachdem $A_4 A_5$ dem Hauptfachwerk angehört oder nicht. Wir spannen jetzt das Fachwerk in den Knotenpunkten $0, B_1, B_2, \cdots, B_r$ in sich ein und spannen den Stab $A_4 A_5$, wenn er als $(l+1)^{\text{ter}}$ oder m^{ter} Hauptstab auftritt, beliebig ein. Aus allen in A_α angreifenden Stabkräften bilden wir die Resultante Q_α und bewirken mit Hilfe der Kräfte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, die einander das Gleichgewicht halten, eine Einspannung des Hilfsfachwerks. Hierbei entsteht in $A_\lambda A_\mu$ die Spannkraft

$$S_{\lambda, \mu} \equiv S^{(0)}_{\lambda, \mu} + u_1 S'_{\lambda, \mu} + u_2 S''_{\lambda, \mu} + \cdots + u_m S^{(m)}_{\lambda, \mu}\,.$$

Die $S^{(0)}_{\lambda, \mu}$ rühren von der Einspannung der Stäbe $0A_1$, $0A_2$, $0A_3$, $0A_4$, $0A_5$ allein her; läßt man diese Stäbe ohne Spannkraft und spannt von allen m Hauptstäben allein den β^{ten}. und zwar mit der Einheit der Spannkraft ein, so entstehen die Spezialwerte $S^{(\beta)}_{\lambda, \mu}$ der Spannkräfte.

Ist das Fachwerk in 0 in sich eingespannt, so wirken $0A_1$, $0A_2$, $0A_3$, $0A_4$, $0A_5$ auf A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 mit Kräften, die sich in der Form darstellen lassen

$$P_1 : P_2 : P_3 : P_4 : P_5 = u P'_1 + v P''_1 : u P'_2 + v P''_2 : u P'_3 + v P''_3 : u P'_4 : v P''_5.$$

P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 sollen einander das Gleichgewicht halten, desgleichen P''_1, P''_2, P''_3, P''_5. Versteht man unter y_1, y_2, y_3, y_5 die mit Vorzeichen behafteten Entfernungen des Punktes 0 von den Ebenen $A_2A_3A_5$, $A_3A_1A_5$, $A_1A_2A_5$, $A_1A_2A_3$ und bezeichnet mit $\beta_{\lambda,\mu}$ den $A_\lambda A_\mu$ anliegenden Winkel des Tetraeders $A_1A_2A_3A_5$, so nehmen die oben eingeführten Spannkräfte $S^{(0)}_{\lambda,\mu}$, wenn P'_4 und P''_5 passend gewählt werden, die Form an:

$$S^{(0)}_{\lambda,\mu} = u X_{\lambda,\mu} + v Y_{\lambda,\mu}\,,$$

und zwar ist im einzelnen

$$\begin{aligned}
S^{(0)}_{1,4} &= u x_1 x_4 \sin\alpha_{1,4} \,, & S^{(0)}_{2,4} &= u x_2 x_4 \sin\alpha_{2,4} \,,\\
S^{(0)}_{1,5} &= \phantom{u x_1 x_4 \sin\alpha_{1,4} +{}} v y_1 y_5 \sin\beta_{1,5}\,, & S^{(0)}_{2,5} &= \phantom{u x_2 x_4 \sin\alpha_{2,4} +{}} v y_2 y_5 \sin\beta_{2,5}\,,\\
S^{(0)}_{2,3} &= u x_2 x_3 \sin\alpha_{2,3} + v y_2 y_3 \sin\beta_{2,3}\,, & S^{(0)}_{3,1} &= u x_3 x_1 \sin\alpha_{3,1} + v y_3 y_1 \sin\beta_{3,1}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^{(0)}_{3,4} &= u x_3 x_4 \sin\alpha_{3,4} \,,\\
S^{(0)}_{3,5} &= \phantom{u x_3 x_4 \sin\alpha_{3,4} +{}} v y_3 y_5 \sin\beta_{3,5}\,,\\
S^{(0)}_{1,2} &= u x_1 x_2 \sin\alpha_{1,2} + v y_1 y_2 \sin\beta_{1,2}\,. \qquad (25.)
\end{aligned}$$

Für jeden der $m+2 = 9-(7-m)$ Stäbe des Hilfsfachwerks, der nicht zugleich dem Hauptfachwerk angehört, besteht die Gleichung

$$u X_{\lambda,\mu} + v Y_{\lambda,\mu} + u_1 S'_{\lambda,\mu} + u_2 S''_{\lambda,\mu} + \cdots + u_m S^{(m)}_{\lambda,\mu} = 0\,,$$

wenn das Fachwerk in sich einspannbar ist, und zwar sind wenigstens einzelne der Größen $u, v, u_1, u_2, \cdots, u_m$ von Null verschieden. Für jeden Punkt der Grenzfläche hat die Determinante dieser Gleichungen den Wert Null. Da ihre beiden ersten Vertikalreihen mit Gliedern zweiter Dimension in x_1, x_2, x_3, x_4, die übrigen Vertikalreihen mit Konstanten besetzt sind, möchte man meinen, daß eine Oberfläche vierter Ordnung als Grenzfläche auftritt. Doch zeigt Theorem XIV., daß hierbei ein fremder Faktor eingeschleppt sein muß, denn die Grenzfläche ist von der dritten Ordnung.

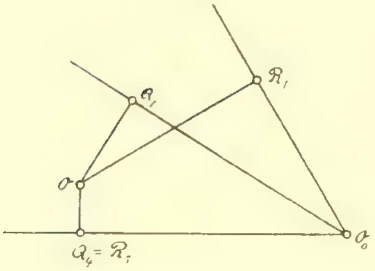
47. Um dies zu vermeiden, setzen wir $P_1P_2P_3P_4P_5$ aus der Gruppe $P'_1P'_2P'_3P'_4$ und aus einer Gruppe $P^{(0)}_1P^{(0)}_2P^{(0)}_3P^{(0)}_4P^{(0)}_5$ zusammen. Die zu letzterer gehörige Einspannung des Hilfsfachwerkes ergebe sich nach den Gleichungen (25.) für die speziellen Werte

$$u_0 = -\sin\beta_{2,3}\sin\beta_{3,1}\sin\beta_{1,2} \qquad v_0 = +\sin\alpha_{2,3}\sin\alpha_{3,1}\sin\alpha_{1,2}\,.$$

A_4 und A_5 mögen auf derselben Seite der Ebene $A_1A_2A_3$ liegen, so daß $x_4 = y_5$ ist. $Q_1 0$, $R_1 0$, $Q_4 0$ (gleich $R_5 0$) liegen in einer Ebene, zu welcher A_2A_3 in einem Punkte 0_0 senkrecht steht, daher ist (Fig. 11.)

$$\alpha_{2,3} = \measuredangle Q_4 0_0 Q_1 \quad , \quad \beta_{2,3} = \measuredangle R_5 0_0 R_1 = \measuredangle Q_4 0_0 R_1\,.$$

Fig. 11.



Bezeichnet man noch mit φ den Winkel $Q_1 0_0 0$, so folgt aus den Gleichungen

$$x_4 = y_5 = 0_0 0 \sin\varphi \quad , \quad x_1 = 0_0 0 \sin(\alpha_{2,3} - \varphi) \quad , \quad y_1 = 0_0 0 \sin(\beta_{2,3} - \varphi)$$

mittels Elimination von φ die erste von drei sehr bekannten Beziehungen, die durch zyklische Verschiebung der Ziffern $1, 2, 3$ auseinander hervorgehen:

$$\begin{aligned} y_1 \sin\alpha_{2,3} &= x_1 \sin\beta_{2,3} + x_4 \sin(\beta_{2,3} - \alpha_{2,3}) , \\ y_2 \sin\alpha_{3,1} &= x_2 \sin\beta_{3,1} + x_4 \sin(\beta_{3,1} - \alpha_{3,1}) , \\ y_3 \sin\alpha_{1,2} &= x_3 \sin\beta_{1,2} + x_4 \sin(\beta_{1,2} - \alpha_{1,2}) . \end{aligned}$$

Bei der Einwirkung der Gruppe $P_1^{(0)} P_2^{(0)} P_3^{(0)} P_4^{(0)} P_5^{(0)}$ auf das Hilfsfachwerk entsteht im Stabe $A_2 A_3$ die Spannkraft

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{2,3}^{(0)} &= \sin\alpha_{2,3} \sin\alpha_{3,1} \sin\alpha_{1,2} \sin\beta_{2,3}\, y_2 y_3 - \sin\beta_{2,3} \sin\beta_{3,1} \sin\beta_{1,2} \sin\alpha_{2,3}\, x_2 x_3 \\ &= \sin\alpha_{2,3} \sin\beta_{2,3}\, x_4 \{x_2 \sin\beta_{3,1} \sin(\beta_{1,2} - \alpha_{1,2}) + x_3 \sin\beta_{1,2} \sin(\beta_{3,1} - \alpha_{3,1}) \\ &\qquad + x_4 \sin(\beta_{3,1} - \alpha_{3,1}) \sin(\beta_{1,2} - \alpha_{1,2})\} \\ &= \sin\alpha_{2,3} \sin\beta_{2,3}\, x_4 z_1 . \end{aligned}$$

$x_1 z_1$ verschwindet offenbar, wenn man irgendeines der Gleichungspaare

$$x_2 = 0 , y_2 = 0 ; \quad x_3 = 0 , y_3 = 0 \quad : \quad x_2 = 0 , y_3 = 0 ; \quad x_3 = 0 , y_2 = 0$$

annimmt. Das erste Gleichungspaar stellt $A_3 A_1$, das zweite $A_1 A_2$ dar, beide nimmt die Ebene $x_4 = 0$ oder $A_1 A_2 A_3$ auf. Die Ebene $z_1 = 0$ enthält die Schnittlinie der Ebenen $A_4 A_3 A_1$ $(x_2 = 0)$ und $A_5 A_1 A_2$ $(y_3 = 0)$, ferner diejenige der Ebenen $A_4 A_1 A_2$ $(x_3 = 0)$ und $A_5 A_3 A_1$ $(y_2 = 0)$. Fällt man auf die so festgelegte Ebene das Lot $0 Z_1$ und versteht unter $\varkappa_1$ eine wohldefinierte Konstante, so ist

$$z_1 = \varkappa_1 \cdot 0 Z_1 .$$

Auch in $\mathfrak{S}^{(0)}_{3,1}, \mathfrak{S}^{(0)}_{1,2}$ kommt, wie sich durch zyklische Verschiebung der Ziffern 1, 2, 3 erweist, x_4 als Faktor vor; für alle anderen Spannkräfte $\mathfrak{S}^{(0)}_{\lambda,\mu}$ ergibt sich dasselbe aus den Formeln (25.). Eine Gruppe, deren Einzelkräfte zu $P^{(0)}_1, P^{(0)}_2, P^{(0)}_3, P^{(0)}_4, P^{(0)}_5$ proportional sind, ruft also in den Stäben A_1A_4, A_1A_5, A_2A_3 des Hilfsfachwerks die Spannkräfte hervor:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}^{(0)}_{1,4} &= u'y_{1,4} = -u' \sin\beta_{2,3} \sin\beta_{3,1} \sin\beta_{1,2} \sin\alpha_{1,4}\, x_1\,,\\
\mathfrak{S}^{(0)}_{1,5} &= u'y_{1,5} = u' \sin\alpha_{3,1} \sin\alpha_{1,2} \sin\beta_{1,5}\,(x_1 \sin\beta_{2,3} + x_4 \sin(\beta_{2,3}-\alpha_{2,3}))\,,\\
\mathfrak{S}^{(0)}_{2,3} &= u'y_{2,3} = u' \sin\alpha_{2,3} \sin\beta_{2,3}\,\{x_2 \sin\beta_{3,1} \sin(\beta_{1,2}-\alpha_{1,2})\\
&\quad + x_3 \sin\beta_{1,2} \sin(\beta_{3,1}-\alpha_{3,1}) + x_4 \sin(\beta_{3,1}-\alpha_{3,1}) \sin(\beta_{1,2}-\alpha_{1,2})\}\,. \qquad (26.)
\end{aligned}$$

Durch zyklische Verschiebung der Indizes 1, 2, 3 ergeben sich die Spannkräfte der sechs übrigen Stäbe. Diese Formeln gelten auch, wenn A_4 und A_5 durch die Ebene $A_1A_2A_3$ getrennt werden. Die Winkel $\beta_{2,3}, \beta_{3,1}, \beta_{1,2}$ sind dann mit negativem Vorzeichen einzuführen. Halten die in $0A_1$, $0A_2$, $0A_3$, $0A_4$ wirkenden Kräfte P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 einander das Gleichgewicht, so rufen sie in den Stäben A_1A_4, A_1A_5, A_2A_3 des Hilfsfachwerks nach unserer ersten Entwicklung Spannkräfte von der Form hervor:

$$uX_{1,4} = ux_1x_4 \sin\alpha_{1,4}\quad,\quad uX_{1,5} = 0\quad,\quad uX_{2,3} = ux_2x_3 \sin\alpha_{2,3}\,. \qquad (27.)$$

Durch zyklische Verschiebung der Ziffern 1, 2, 3 ergeben sich die Spannkräfte der übrigen Stäbe. Spannt man jetzt das Fachwerk in $0, B_1, B_2, \cdots, B$ beliebig in sich ein, und erteilt dem Stab A_4A_5, falls er zum Hauptfachwerk gehört, eine beliebige Spannkraft, so entsteht in irgendeinem Stabe des Hilfsfachwerks die Spannkraft

$$uX_{\lambda,\mu} + u'y_{\lambda,\mu} + u_1S'_{\lambda,\mu} + u_2S''_{\lambda,\mu} + \cdots + u_mS^{(m)}_{\lambda,\mu} \equiv S_{\lambda,\mu}\,. \qquad (28.)$$

Jeder der $m+2$ Stäbe des Hilfsfachwerks, der nicht dem Hauptfachwerk angehört, also jeder Ersatzstab, muß ohne Spannkraft bleiben, wenn das Fachwerk in sich einspannbar ist. Für jeden Punkt der Grenzfläche hat die Determinante $(m+2)^{\text{ter}}$ Ordnung der $m+2$ so entstehenden linearen homogenen Gleichungen

$$S_{\lambda,\mu} = 0 \qquad (29.)$$

von $u, u', u_1, u_2, \cdots, u_m$ den Wert Null. Die so gebildete Gleichung stellt eine Fläche dritter Ordnung dar, wie es sein muß (XIV.), da von den $m+2$ Vertikalreihen der Determinante die erste Glieder zweiter Dimension, die zweite Glieder erster Dimension in x_1, x_2, x_3, x_4 enthält, alle übrigen aber mit Konstanten besetzt sind.

48. Soll nun die Grenzfläche eines Fachwerks für einen Knotenpunkt ermittelt werden, der die sechs Stäbe $0A_1, 0A_2, \cdots, 0A_6$ aussendet, so wird man A_6 mittels der drei Stäbe A_6A_1, A_6A_2, A_6A_3 an das bisher betrachtete Hilfsfachwerk angliedern. m Hauptstäbe des Hilfsfachwerks, nämlich die l Hauptstäbe dritter Art und $m-l$ Seiten des Dreiecks $A_4A_5A_6$ mögen außerhalb des so gebildeten Hilfsfachwerks liegen. Keiner der Punkte A_4, A_5, A_6 liege in der Ebene $A_1A_2A_3$. Spannt man das Fachwerk in allen Punkten $0, B_1, B_2, \cdots, B_r$ in sich ein, erteilt den m erwähnten Hauptstäben beliebige Spannkräfte, die sich zur Einheit der Spannkraft verhalten, wie

$$u_1 : u_2 : \cdots : u_m : 1 .$$

vereinigt die auf A_α wirkenden Stabkräfte zu einer Resultante Q_α, so entsteht in dem Stabe $A_\lambda A_\mu$ des Hilfsfachwerks bei dessen Einspannung mittels der im Gleichgewicht stehenden Kräfte $Q_1, Q_2, \cdots, Q_6$ die Spannkraft:

$$S_{\lambda,\mu} = uX_{\lambda,\mu} + u'y_{\lambda,\mu} + u''z_{\lambda,\mu} + u_1S'_{\lambda,\mu} + u_2S''_{\lambda,\mu} + \cdots + u_mS^{(m)}_{\lambda,\mu}. \qquad (30.)$$

$X_{\lambda,\mu}$ und $y_{\lambda,\mu}$ fallen mit den oben definierten Größen zusammen, solange der Index 6 außer Spiel bleibt: $X_{1.6}, X_{2.6}, X_{3.6}$ und $y_{1.6}, y_{2.6}, y_{3.6}$ sind gleich Null. Die Größen $z_{\lambda,\mu}$ entstehen aus den Größen $y_{\lambda,\mu}$, wenn man die Indizes 5 und 6 miteinander vertauscht. Die Möglichkeit dieser Darstellung beruht darauf, daß man die allgemeinste Gruppe $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ von sechs in Gleichgewicht stehenden und in den Geraden $0A_1, 0A_2, 0A_3, 0A_4, 0A_5, 0A_6$ wirkenden Kräften zusammensetzen kann aus den früher gebildeten Gruppen $P'_1P'_2P'_3P'_4$, $P^{(0)}_1P^{(0)}_2P^{(0)}_3P^{(0)}_4P^{(0)}_5$ und einer neu zu bildenden Gruppe $\mathfrak{P}^{(0)}_1\mathfrak{P}^{(0)}_2\mathfrak{P}^{(0)}_3\mathfrak{P}^{(0)}_4\mathfrak{P}^{(0)}_6$, welche bei Vertauschung von A_5 und A_6 aus der zweiten Gruppe hervorgeht.

Das Fachwerk enthält $9-l$ Stäbe zweiter Art, $m-l$ von ihnen sind Seiten des Dreiecks $A_4A_5A_6$. Hiernach gehören

$$m+3 = 12-(9-l-(m-l))$$

Stäbe des Hilfsfachwerks nicht zugleich dem Hauptfachwerk an. Diese Ersatzstäbe, welche uns gestatteten, die m bezeichneten Hauptstäbe und drei von 0 ausgehende Stäbe beliebig einzuspannen, erhalten alle die Spannkraft

Null, wenn das Fachwerk in sich einspannbar ist. Die Determinante der $m+3$ so entstehenden homogenen, linearen Gleichungen

$$S_{\lambda,\mu}=0 \tag{31.}$$

von $u, u', u'', u_1, u_2, \cdots, u_m$ nimmt für jeden Punkt der Grenzfläche den Wert Null an. Die so gebildete Gleichung stellt, wie es nach dem obigen sein muß, eine Oberfläche vierter Ordnung dar.

49. Ist A_3A_4 ein Stab des Fachwerks, so fällt unter den Bedingungsgleichungen (31.) diejenige fort, bei der $\lambda=3, \mu=4$ ist. Alle Glieder der ersten Vertikalreihe weisen deshalb entweder den Faktor x_1 oder den Faktor x_2 auf. Die Gerade A_3A_4 oder $x_1=0, x_2=0$ gehört der Grenzfläche an. Ist B_1 mit $A_1, A_2, \cdots, A_6$ durch Fachwerkstäbe verbunden, so werden nach (21.) und (21a.) bei passender Einspannung der l ersten Hauptstäbe, also bei geeigneter Wahl der Parameter $u_1, u_2, \cdots, u_l$, von allen Stäben dritter Art nur jene sechs eingespannt sein, und zwar so, daß in B_1 Gleichgewicht besteht. Man kann also, anders ausgedrückt, das allgemeine Glied der ersten, zweiten, dritten Vertikalreihe unserer Determinante auf die Form bringen

$$X_{\lambda,\mu}-X'_{\lambda,\mu},\ y_{\lambda,\mu}-y'_{\lambda,\mu},\ z_{\lambda,\mu}-z'_{\lambda,\mu},$$

wenn man die anderen Vertikalreihen, mit geeigneten Faktoren multipliziert, zu den drei ersten Vertikalreihen der ursprünglichen Determinante addiert. $X'_{\lambda,\mu}, y'_{\lambda,\mu}, z'_{\lambda,\mu}$ entstehen aus $X_{\lambda,\mu}, y_{\lambda,\mu}, z_{\lambda,\mu}$, indem für x_1, x_2, x_3, x_4 die Koordinaten x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 des Punktes B_1 eintreten. B_1 ist ein dreifacher Punkt der Grenzfläche, da die Entwicklung ihrer Gleichung nach steigenden Potenzen von $x_1-x'_1, x_2-x'_2, x_3-x'_3, x_4-x'_4$ mit Gliedern dritter Dimension beginnt. Die beschriebene Umformung kann man mit der dritten Vertikalreihe nicht mehr vornehmen, wenn B_1 nur mit A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 durch Fachwerkstäbe verbunden ist, sie trifft nur für die erste Vertikalreihe noch zu, wenn nur $B_1A_1, B_1A_2, B_1A_3, B_1A_4$ Fachwerkstäbe sind. B_1 ist also ein $(q-3)$-facher Punkt der Grenzfläche, wenn er durch Fachwerkstäbe mit q von den Punkten $A_1, A_2, \cdots, A_6$ verbunden ist. Dies gilt ganz allgemein, weil man die sechs Stützpunkte in irgendeiner Reihenfolge mit den Indizes $1, 2, \cdots, 6$ bezeichnen kann. Aus demselben Grunde gehört der Grenzfläche jeder der Punkte $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ und jeder Fachwerkstab an, der zwei von ihnen verbindet, mögen sie bei der angenommenen Bezeichnung zwei von den vier ersten Kennziffern tragen oder nicht. Die Fortsetzung dieser Schlußweise ist klar. Offenbar bestätigt sich aufs neue das Theorem XIV.

Wir können noch folgenden Satz aussprechen:

XIV a. *Besteht jede von* $2k+1$ *Hauptgruppen*

$$P_{1,\beta}\,P_{2,\beta}\cdots P_{k+2,\beta} \qquad (\beta = 1, 2, \cdots, 2k+1)$$

aus $k+2$ *in* $A_1, A_2, \cdots, A_{k+2}$ *angreifenden, einander das Gleichgewicht haltenden Kräften, so erfüllen eine Oberfläche* k^{ter} *Ordnung alle die Punkte, auf welche die Kräfte*

$$P_\alpha = u_1 P_{\alpha,1} + u_2 P_{\alpha,2} + \cdots + u_{2k+1} P_{\alpha,2k+1} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, k+2)$$

einer Gruppe wirken, die sich aus den Hauptgruppen zusammensetzen läßt, wofern nicht jeder Punkt des Raumes die Bedingung erfüllt.

Dieses Theorem muß besonders ausgesprochen werden, da nicht vorausgesetzt werden kann, daß die Hauptgruppen von der Einspannung der Stäbe zweiter und dritter Art eines Fachwerks herrühren, das die $k+2$ Stäbe erster Art $0A_1, 0A_2, \cdots, 0A_{k+2}$ enthält.

VII.

50. Die Grenzfläche eines statisch bestimmten Fachwerks bezüglich eines vierstäbigen Knotenpunktes mit den Stützpunkten A_1, A_2, A_3, A_4 ist ($k = 2$) aus fünf ($2k+1$) Hauptgruppen

$$P_{1,\beta}\,P_{2,\beta}\,P_{3,\beta}\,P_{4,\beta} \qquad (\beta = 1, 2, \cdots, 5)$$

zu bestimmen (41.). Jede von ihnen besteht aus vier in A_1, A_2, A_3, A_4 angreifenden, einander das Gleichgewicht haltenden Kräften. Auf jeden Punkt 0 der Grenzfläche wirken die Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 einer aus den fünf Hauptgruppen zusammengesetzten Gruppe. Es ist also:

$$P_\alpha = u_1 P_{\alpha,1} + u_2 P_{\alpha,2} + u_3 P_{\alpha,3} + u_4 P_{\alpha,4} + u_5 P_{\alpha,5}. \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

Ein Fachwerk enthalte nun die zehn Knotenpunkte $A_1, A_2, A_3, A_4, 0, 0_1, 0_2, 0_3, 0_4, 0_5$, von seinen 24 ($= 3.10 - 6$) Stäben verbinde jeder einen der vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 mit einem der sechs Punkte $0, 0_1, 0_2, 0_3, 0_4, 0_5$. Die fünf letzten bestimmen (XIV.) mit A_1, A_2, A_3, A_4 die Grenzfläche zweiter Ordnung des Fachwerks bezüglich 0, wenn es nicht für jeden Punkt 0 in sich eingespannt ist. Die Kräfte der β^{ten} Hauptgruppe $P_{1,\beta}, P_{2,\beta}, P_{3,\beta}, P_{4,\beta}$ wirken jetzt (42.) in den Stäben $A_1 0_\beta, A_2 0_\beta, A_3 0_\beta, A_4 0_\beta$ und halten einander das Gleichgewicht. Eine von ihnen, deren Wirkungslinie wir als den β^{ten} Hauptstab betrachten, bestimmt im allgemeinen die drei andern. Wir setzen, damit dies ohne Ausnahme gilt, hinfort voraus, daß A_1, A_2, A_3, A_4

nicht in einer Ebene liegen. Ein Punkt 0 der Grenzfläche liefert ein in sich eingespanntes Fachwerk, bei dem $A_\alpha 0_\beta$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4;\ \beta = 1, 2, 3, 4, 5)$ auf 0_β mit der Kraft $u_\beta P_{\alpha,\beta}$, $0 A_\alpha$ hingegen auf A_α mit der Kraft P_α wirkt.

$A_1, A_2, A_3, A_4, 0_1, 0_2, 0_3, 0_4$ bestimmen eine der Grenzfläche angehörige Kurve. Auf jeden ihrer Punkte wirken die Kräfte

$$P_\alpha = v_1 P_{\alpha,1} + v_2 P_{\alpha,2} + v_3 P_{\alpha,3} + v_4 P_{\alpha,4} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4) \qquad (32.)$$

einer Gruppe, die sich $(v_1 = u_1,\ v_2 = u_2,\ v_3 = u_3,\ v_4 = u_4,\ 0 = u_5)$ aus den vier ersten Hauptgruppen allein zusammensetzen läßt. Wie immer wir 0_5 wählen, enthält die Grenzfläche die soeben definierte Kurve. Umgekehrt liefert jeder Punkt 0_0 der Durchdringungskurve vierter Ordnung zweier Oberflächen zweiter Ordnung, von denen die eine 0_5, die andre 0_6 mit jenen acht Punkten verbindet, ein in sich einspannbares Stabwerk aus nur 20 Stäben $(20 = 3.9 - 7)$ bei 9 Knotenpunkten[1]. Wäre dem nicht so, beständen für 0_0 nicht die genannten Beziehungen (32.), so könnte man auf zwei wesentlich verschiedene Arten das statisch unbestimmte Fachwerk aus 11 Knotenpunkten $A_1, A_2, A_3, A_4, 0_0, 0_1, 0_2, 0_3, 0_4, 0_5, 0_6$ und 28 $(= 3.11 - 5)$ Stäben $A_\alpha 0_\beta$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4,\ \beta = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ in sich einspannen. Bei der einen Einspannung würden die von 0_5 ausgehenden, bei der andern die von 0_6 ausgehenden Stäbe unbeansprucht bleiben. Aus beiden Einspannungen könnte man eine dritte zusammensetzen, bei der die vier Stäbe $0_0 A_1$, $0_0 A_2$, $0_0 A_3$, $0_0 A_4$ ohne Spannkraft wären. Nun wäre aber das Fachwerk aus 10 Knotenpunkten $0_1, 0_2, 0_3, 0_4, 0_5, 0_6, A_1, A_2, A_3, A_4$ und 24 Stäben $A_\alpha 0_\beta$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4,\ \beta = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ in sich eingespannt, und zwar unter Beanspruchung sowohl von 0_5 als auch von 0_6. Es würden also zwei beliebige Punkte $0_5, 0_6$ mit den acht Punkten $0_1, 0_2, 0_3, 0_4, A_1, A_2, A_3, A_4$ auf einer Oberfläche zweiter Ordnung liegen; jeder Punkt 0_0 des Raumes müßte eine Durchdringskurve der bezeichneten Art festlegen. Wenn die acht Punkte eine solche spezielle Lage haben, bestehen die Beziehungen (32.), wie wir sehen werden, wirklich für jeden Raumpunkt 0_0, insofern er unbeansprucht bleibt. Vermeiden wir diese Grenzlage, so bestimmen die acht Punkte die Durchdringungskurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung, und es gehen, eben weil jeder ihrer Punkte die obigen Relationen erfüllt, außer den beiden ersten noch unzählig viele Oberflächen zweiter Ordnung durch sie hindurch, was ja eine wohlbekannte Tatsache ist. Wir fassen zusammen:

---

[1] Überall, wo in der Folge von Raumkurven vierter Ordnung die Rede ist, ist diejenige erster Art, die Durchdringungskurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung gemeint. Sie kann in mannigfacher Weise zerfallen, z. B. in zwei Kreise in parallelen Ebenen. Auch der Raumkurve vierter Ordnung zweiter Art, welche eine Schar dreifacher, einem Hyperboloid angehörenden Sekanten besitzt, kann sicher eine statische Bedeutung verliehen werden, da sie den partiellen Schnitt der sie tragenden Oberfläche zweiter Ordnung mit Flächen dritter Ordnung bildet.

XV. *Ein Fachwerk aus zehn Knotenpunkten* $O_0, O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, A_1, A_2, A_3, A_4$ *und 24 Stäben* $A_\alpha O_\beta$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4,\ \beta = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ *ist nur dann nicht mehr statisch bestimmt, wenn alle zehn Knotenpunkte einer Oberfläche zweiter Ordnung angehören. Im allgemeinen legen die neun Punkte* $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, A_1, A_2, A_3, A_4$ *eine solche Oberfläche fest, die zugleich als Grenzfläche des Fachwerks bezüglich* O_0 *zu betrachten ist. Bestimmt aber jeder Raumpunkt* O_0 *eine Oberfläche zweiter Ordnung, die* $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, A_1, A_2, A_3, A_4$ *aufnimmt, liegen also letztere Punkte auf einer Raumkurve vierter Ordnung erster Art, so ist das Raumfachwerk zwar für jeden Punkt* O_0 *in sich einspannbar, jedoch bleiben* $O_0A_1, O_0A_2, O_0A_3, O_0A_4$ *ohne Spannkraft. Die übrigen 20 Stäbe* $O_\alpha A_\beta$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4;\ \beta = 1, 2, 3, 4, 5)$ *bilden also ein in sich einspannbares Stabwerk, das einen Stab weniger enthält als ein statisch bestimmtes Fachwerk von neun Knotenpunkten* $(21 = 3.9 - 6)$. *Gelangt jedoch* O_0 *auf jene Raumkurve, so können wir das Fachwerk in sich einspannen, nachdem irgendzwei Stäben, die nicht von demselben der Punkte* $O_0, O_1, O_2, O_3, O_4, O_5$ *ausgehen, beliebige Spannkräfte erteilt wurden.*

51. Die obigen Betrachtungen bestätigen nochmals die wohlbekannte Tatsache, daß eine Oberfläche zweiter Ordnung durch neun, eine Raumkurve vierter Ordnung durch acht Punkte bestimmt ist. Die umfangreiche Literatur, welche sich an die Konstruktion dieser Gebilde anschließt, gewinnt hiermit eine neue Bedeutung[1]. Ganz annehmbare Lösungen schließen sich an die obigen Betrachtungen an. Halten nämlich $w_1 P_{4.1}, w_2 P_{4.2}, w_3 P_{4.3}, w_4 P_{4.4}$ einander das Gleichgewicht, so wirken die drei Kräfte

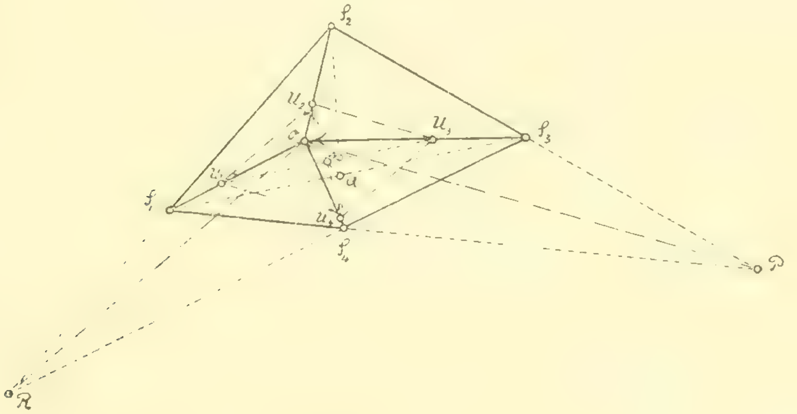
$$P_\alpha = w_1 P_{\alpha.1} + w_2 P_{\alpha.2} + w_3 P_{\alpha.3} + w_4 P_{\alpha.4}, \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

---

[1] Es sei hier für die erste Aufgabe nur auf eine Lösung von Rohn hingewiesen, in welcher ebenfalls von der Konstruktion des der Ebene $A_1 A_2 A_3$ angehörenden Kegelschnittes der Fläche ausgegangen wird, und auf eine andere von mir selbst herrührende Lösung der Aufgabe, welche auf ganz anderen Prinzipien beruht: K. Rohn, Die Construction der Fläche 2. Grades durch neun gegebene Punkte, Berichte der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Sitzung vom 4. Juni 1894, S. 160; E. Kötter, Construction der Oberfläche zweiter Ordnung, welche neun gegebene Punkte enthält, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. 9_1, Leipzig 1901, S. 99. Die Ermittelung der Punkte Q_4 und Q'_4 spielt bei den meisten Lösungen eine große Rolle.

die nun miteinander im Gleichgewicht stehen, auf einen Punkt Q_4 der Ebene $A_1 A_2 A_3$. Ersetzt man 0_4 durch 0_5, so ergibt sich in ganz derselben Weise ein Punkt Q_4', und es legen A_1, A_2, A_3, Q_4, Q_4' einen Kegelschnitt der Fläche zweiter Ordnung fest, die $A_1, A_2, A_3, A_4, 0_1, 0_2, 0_3, 0_4, 0_5$ enthält. Man kann nun leicht unzählig viele andere Punkte derselben ermitteln.

Fig. 12.



Für die zeichnerische Durchführung[1] der Aufgabe mögen (Fig. 12.) vier Kräfte, die einander das Gleichgewicht halten, durch die Strecken $P_1 = U_1 0$, $P_2 = 0\ U_2$, $P_3 = U_3 0$, $P_4 = 0\, U_4$ dargestellt sein. Alsdann stimmt $U_1 U_2$ mit der Resultante von P_1 und P_2, $U_3 U_4$ mit derjenigen von P_3 und P_4 in Größe und Richtung überein. Die Resultanten selbst greifen in 0 an, sind entgegengesetzt gleich und fallen in die Schnittlinie der beiden Ebenen $U_1 0 U_2$ und $U_3 0 U_4$ hinein. Anders ausgedrückt: $U_1 U_2 U_3 U_4$ ist ein Parallelogramm. Schneiden die gegebenen Wirkungslinien der vier Kräfte eine Hilfsebene in den Punkten S_1, S_2, S_3, S_4 und treffen $S_4 S_1, S_4 S_2, S_4 S_3$ der Reihe nach $S_2 S_3, S_3 S_1, S_1 S_2$ in den Punkten P, Q, R, so sind $U_1 U_2$ und $U_3 U_4$ zu $0 R$, $U_2 U_3$ und $U_4 U_1$ zu $0 P$ parallel, und es liegt auf $0 Q$ der Mittelpunkt des Parallelogramms. Denn die Resultanten von P_1 und P_3 einerseits, P_2 und P_4 andererseits, die in jene Gerade hineinfallen, werden durch Verdoppelung der Strecken $M 0$ und $0 M$ gefunden. Macht man etwa $A_1 A_2 A_3$ zur Horizontalebene, gibt sich die Horizontalprojektionen von $A_4, 0_1, 0_2, 0_3, 0_4, 0_5$ und die Horizontalspuren der Geraden $A_1 0_1, \cdots, A_4 0_5$, so kann man die Horizontalprojektionen aller zur Konstruktion von Q_1 und Q'_4 erforderlichen Kräfte sofort finden.

---

[1] Es handelt sich hier um eine von Föppl gegebene Lösung der Aufgabe, in vier von einem Punkte ausgehenden Geraden im Gleichgewicht stehende Kräfte anzubringen. Vergl.: Föppl, Über das räumliche Fachwerk, Die Eisenbahn (Schweizerische Bauzeitung), Bd. 16, Zürich 1882, S. 6 (Art. IV). Nur einer der Punkte P, Q, R ist erforderlich, wenn

Im Punkte Q_4 schneidet offenbar die Raumkurve vierter Ordnung, welche $A_1, A_2, A_3, A_4, 0_1, 0_2, 0_3, 0_4$ festlegen, die Ebene $A_1 A_2 A_3$. Man findet in gleicher Art ihre Schnittpunkte Q_1, Q_2, Q_3 mit den Ebenen $A_2 A_3 A_4, A_3 A_1 A_4, A_1 A_2 A_4$. Es treffen sich nunmehr nach Theorem XVI. z. B. $A_1 Q_2 Q_3, A_2 Q_3 Q_1, A_3 Q_1 Q_2$ in einem Punkte R_4 der Raumkurve, dem sich noch drei analog gebildete R_1, R_2, R_3 zugesellen. $A_4 A_1$ und $R_4 Q_1$ gehören in die eine Geradenschar eines Hyperboloids, das die Raumkurve ganz enthält.

52. Können die Parameter z_1, z_2, z_3 so bestimmt werden, daß

$$P_\alpha = z_1 P_{\alpha,1} + z_2 P_{\alpha,2} + z_3 P_{\alpha,3} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4) \qquad (33.)$$

auf einen von $0_1, 0_2, 0_3$ verschiedenen Punkt 0_4 wirken, wenn wieder

$$P_{1,\beta}, P_{2,\beta}, P_{3,\beta}, P_{4,\beta} \qquad (\beta = 1, 2, 3, 4)$$

in den Strahlen $A_1 0_\beta, A_2 0_\beta, A_3 0_\beta, A_4 0_\beta$ wirken und einander das Gleichgewicht halten? Sicher nimmt eine Raumkurve vierter Ordnung, die $A_1, A_2, A_3, A_4, 0_1, 0_2, 0_3$ enthält, alle in Betracht kommenden Punkte 0_4 auf. Im allgemeinen kann man die Punkte 0_5 und 0_6 so wählen, daß sie zwei voneinander verschiedene Raumkurven vierter Ordnung der genannten Art bestimmen

---

man mit Föppl in einer Nebenzeichnung das Polygon der Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 herauszeichnet. Eine andere zeichnerische Lösung der Aufgabe, bei welcher die Diagonalpunkte P, Q, R nicht benutzt werden, hat Müller-Breslau gegeben. Wird nämlich eine Seite des Kräftepolygons beliebig gegeben, so kann die gegenüberliegende Seite nach bekannten Methoden der Darstellenden Geometrie gefunden werden, da sie eine bestimmte Richtung besitzt und zwei gegebene zueinander windschiefe Gerade schneidet. Vergl.: Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks, Centralblatt der Bauverwaltung, Bd. 11, Berlin 1891, S. 437 (Figuren 2 und 3). Schlink (Statik der Raumfachwerke, Art. 25, S. 54) hat vorgeschlagen, um eine Kraft nach drei gegebenen Wirkungslinien zu zerlegen, auf die Konstruktion des ursprünglichen Parallelepipedons zurückzugreifen. Man kann aber die Einführung einer neuen Vertikalebene, deren sich Schlink bedient, vermeiden. Giebt man sich in Horizontal- und Vertikalprojektion die Träger l, m, n der Strecken SL, SM, SN der Figur 9. (S. 60), so hat man durch 0 eine Parallele zu l zu ziehen und diese in L_1 mit mn zu schneiden, um sofort die Komponenten SL $(= L_1 0)$, SM, SN der Kraft $S0$ in beiden Projektionen zu finden. Eine Hilfsgerade, deren Vertikalprojektion mit der der Parallelen zusammenfällt, die aber in der Ebene mn liegt und also m und n schneidet, trifft die Parallele in dem Punkte L_1. Vergl.: Hauck, Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd. 1, Leipzig, Berlin 1912, S. 44. Bekanntlich ist die zeichnerische oder rechnerische Lösung der Aufgabe für die Berechnung der Raumfachwerke von der größten Bedeutung. Sie hat dementsprechend die eingehendste Behandlung nach den verschiedensten Gesichtspunkten gefunden.

und folglich auch eine Oberfläche zweiter Ordnung $F_{5,6}$ festlegen, die beide Raumkurven zugleich trägt. Bestimmt man mit Hilfe eines außerhalb $F_{5,6}$ liegenden Punktes 0_7 die beiden Flächen $F_{5,7}$ und $F_{6,7}$, so ist von den beiden Raumkurven die erste die Schnittkurve von $F_{5,6}$ und $F_{5,7}$, die zweite haben $F_{5,6}$ und $F_{6,7}$ miteinander gemein. Für 0_4 kommt also lediglich ein von $A_1, A_2, A_3, A_4, 0_1, 0_2, 0_3$ verschiedener Schnittpunkt der Flächen $F_{5,6}, F_{5,7}, F_{6,7}$ in Betracht. Im allgemeinen handelt es sich um einen einzigen Punkt, doch können alle drei Flächen auch $\rho (= 1, 2, 3)$ Gerade, einen Kegelschnitt, eine Gerade und einen Kegelschnitt oder endlich eine Raumkurve dritter Ordnung, die Durchdringungskurve zweier Kegel zweiten Grades mit einer gemeinschaftlichen Mantellinie, miteinander gemein haben. $F_{5,6}$ hat dann mit $F_{5,7}$ und $F_{6,7}$ außer dieser Kurve k^{ter} Ordnung $(k = 1, 2, 3)$ noch je eine Restkurve $(4 - k)^{\text{ter}}$ Ordnung gemein.

Jedenfalls bilde man, wenn 0_4 beiden Raumkurven vierter Ordnung zugleich angehört, aus den 10 Knotenpunkten $0_1, 0_2, 0_3, 0_4, 0_5, 0_6, A_1, A_2, A_3, A_4$ und den 24 Stäben $A_\alpha 0_\beta$, $(\alpha = 1, 2, 3, 4, \beta = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ ein Fachwerk. Sind für 0_4 die Relationen (33.) nicht erfüllt, so liegen für das Fachwerk zwei wesentlich verschiedene Einspannungen vor, bei deren einer 0_5, aber nicht 0_6 beansprucht ist, während bei der zweiten 0_5 und 0_6 ihre Rollen vertauschen. Durch passende Zusammensetzung beider gewinnt man eine Einspannung des Fachwerks, bei der 0_4 unbeansprucht ist, und schließt, daß zwei beliebige Punkte 0_5 und 0_6 mit den sieben gegebenen Punkten einer Raumkurve vierter Ordnung angehören müßten. Die Relationen (33.) bestehen also entweder für jeden Punkt, der von $A_1, A_2, A_3, A_4, 0_1, 0_2, 0_3$ in der beschriebenen Art abhängt, oder, wie leicht zu sehen ist, für jeden Punkt 0_4 in der Art, daß er unbeansprucht bleibt[1]. Man folgert:

XVI. *Bezeichnet man die acht Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung in irgendeiner Reihenfolge mit* $A_1, A_2, A_3, A_4, 0_1, 0_2, 0_3, 0_4$, *so ist das*

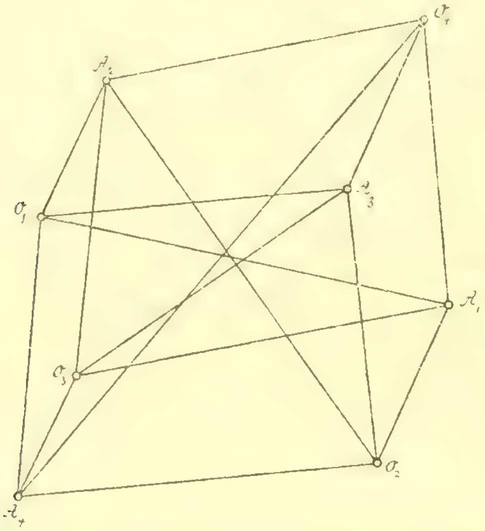
---

[1] Eine Schlußweise, die zu der obigen analog ist, zeigt uns in der Tat, daß das Stabwerk aus den zwölf Stäben $A_\alpha 0_\beta$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4;\ \beta = 1, 2, 3)$ in sich einspannbar sein muß, wenn die sieben Punkte mit irgend drei Raumpunkten durch eine Oberfläche zweiter Ordnung verbunden werden können. Entweder liegen dann, während einer der Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 unbeansprucht bleibt, die drei anderen mit $0_1, 0_2, 0_3$ auf einem Kegelschnitt, oder $0_1, 0_2, 0_3$ liegen mit einem der vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 in einer Geraden. Endlich kann noch einer der Punkte $0_1, 0_2, 0_3$ unbeansprucht bleiben; dann müssen aber die beiden anderen mit zweien der Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 auf einer Geraden liegen. Festzuhalten ist, daß A_1, A_2, A_3, A_4 ein Tetraeder bilden sollten.

Stabwerk aus den 16 Stäben $A_\alpha 0_\beta$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4)$ *in sich einspannbar, das zwei Stäbe weniger enthält als ein statisch bestimmtes Fachwerk aus acht Knotenpunkten*[1].

Insbesondere bilden die zwölf Kanten und die vier Hauptdiagonalen eines Hexaeders allgemeinster Art stets ein in sich einspannbares Stabwerk (Fig. 13.)[2].

Fig. 13.



53. Die oben durchgeführten Betrachtungen geben eine neue Bestätigung eines sehr bekannten Satzes: alle Oberflächen zweiter Ordnung, die

---

[1] Auf ein in sich einspannbares Stabwerk von nur $8n$ Stäben bei $4n$ Knotenpunkten führen sofort Föppls Untersuchungen über Netzwerkkuppeln. Man bilde zuerst ein Hilfsstabwerk aus den Seiten zweier regelmäßigen $2n$-Ecke $A_1 A_3 \ldots A_{4n-1}$ und $A_2 A_4 \ldots A_{4n}$ und aus $4n$ Stäben $A_1 A_2, A_2 A_3, \ldots, A_{4n-1} A_{4n}, A_{4n} A_1$ von gleicher Länge. Wenn nun 0 der gemeinsame Punkt der Ebenen $A_1 A_2 A_3$, $A_3 A_4 A_5, \ldots, A_{4n-1} A_{4n} A_1$ ist, so ersetze man die Seiten des zweiten $2n$-Ecks durch die Geraden $A_2 0, A_4 0, \ldots, A_{4n} 0$. Vergl. Föppl, Über das räumliche Fachwerk, Schweizerische Bauzeitung, Bd. 11, 1888, S. 115 (Art II).

[2] Die Richtigkeit dieses Zusatzes springt bei einem Parallelepipedon in die Augen, man braucht nur jeder Kante eine ihrer Länge gleiche Zugkraft, jeder Hauptdiagonale eine ihrer Länge gleiche Druckkraft zu erteilen, um in jeder Ecke des Parallelepipedons Gleichgewicht herzustellen. In der oben (S. 47 [1]) erwähnten Arbeit habe ich erwiesen, daß die zwölf Kanten und vier Hauptdiagonalen eines rechtwinkligen Parallelepipedons ein in sich unverschiebliches Gebilde ergeben, wenn sie als Stäbe von unveränderlicher Länge, die Knotenpunkte aber als vollkommene, räumliche Gelenke ausgebildet werden. In Fig. 13. besteht das eine Ebenenpaar des Hexaeders aus zwei parallelen Ebenen.

sieben Punkte ($A_1, A_2, A_3, A_4, 0_1, 0_2, 0_3$) enthalten, haben im allgemeinen noch einen achten Punkt 0_4 miteinander gemein. Der Satz gilt eben mit der Einschränkung, daß jede der bezeichneten Oberflächen durch die sieben genannten und irgend zwei andere Punkte 0_5 und 0_6 festgelegt werden kann. Sie fällt dann mit der Grenzfläche eines Fachwerks bezüglich 0 zusammen, von dessen Stäben jeder einen der Punkte $0, 0_1, 0_2, 0_3, 0_5, 0_6$ mit einem der Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 verbindet. Das Fachwerk ist in sich eingespannt, wenn 0 mit 0_4 zusammenfällt; dieser Punkt gehört also der Oberfläche an. Die Konstruktion des notwendigen Punktes aus den sieben gegebenen gewinnt also eine erhöhte Bedeutung. Die Aufgabe ist, seitdem sie Hesse[1] zuerst gelöst hat, vielfach behandelt worden. Da man ein Ebenenpaar als Oberfläche zweiter Ordnung ansehen kann, so stehen die acht Ecken eines Hexaeders in der genannten Beziehung zueinander. Liegen Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 der Reihe nach auf den Ebenen $A_2A_3A_4$, $A_3A_1A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$ eines Tetraeders, so ist der Schnittpunkt R_4 von $Q_2Q_3A_1$, $Q_3Q_1A_2$, $Q_1Q_2A_3$ der $A_1, A_2, A_3, A_4, Q_1, Q_2, Q_3$ zugeordnete notwendige Punkt und gehört also gleich den analogen Punkten R_1, R_2, R_3 der Raumkurve vierter Ordnung an, die $A_1, A_2, A_3, A_4, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ festlegen.

Man kann weiter folgern:

XVII. *Das aus acht Knotenpunkten* $A_1, A_2, A_3, A_4, 0_1, 0_2, 0_3, 0_4$ *und 16 Stäben* $A_\alpha 0_\beta$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$) *bestehende Stabwerk ist in sich einspannbar, wenn alle acht Knotenpunkte einer Raumkurve dritter Ordnung angehören, ferner, wenn* $0_1, 0_2, 0_3, 0_4$ *einer Geraden angehören oder einem Kegelschnitte, der zwei der vier Punkte* A_1, A_2, A_3, A_4 *enthält.*

Die Oberflächen zweiter Ordnung, welche die sieben Punkte $A_1, A_2, A_3, A_4, 0_1, 0_2, 0_3$ enthalten, nehmen nämlich alle die Raumkurve dritter Ordnung, die Gerade oder den Kegelschnitt auf.

54. Die oben benutzten Regeln führen auch im allgemeinsten Falle zur Feststellung der Grenzfläche eines Fachwerks bezüglich eines vierstäbigen Knotenpunktes 0. Auf jeden Punkt derselben wirken die Kräfte

$$P_\alpha = u_1 P_{\alpha,1} + u_2 P_{\alpha,2} + u_3 P_{\alpha,3} + u_4 P_{\alpha,4} + u_5 P_{\alpha,5} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

---

[1] Hesse, De curvis et superficiebus secundi ordinis, Crelles Journal, Bd. 20, Berlin 1840, S. 285 und: Über die lineäre Construction des achten Schnittpunctes dreier Oberflächen zweiter Ordnung, wenn sieben Schnittpuncte derselben gegeben sind, Crelles Journal, Bd. 26, 1843, S. 147 (Gesammelte Werke, München 1897, S. 21 und S. 73. Vergl.: Lehrsatz 3, S. 81).

einer Gruppe, die aus den fünf Hauptgruppen $P_{1,\beta}\, P_{2,\beta}\, P_{3,\beta}\, P_{4,\beta}$ zusammengesetzt ist. Auch hier stehen die Kräfte P_1, P_2, P_3 im Gleichgewicht und wirken auf einen der Ebene $A_1 A_2 A_3$ angehörenden Punkt Q der Grenzfläche, wenn $u_1 P_{4,1}, u_2 P_{4,2}, u_3 P_{4,3}, u_4 P_{4,4}, u_5 P_{4,5}$ einander das Gleichgewicht halten. Gehören die Wirkungslinien von $P_{4,1}, P_{4,2}, P_{4,3}, P_{4,4}, P_{4,5}$ einer Ebene an, so bildet sie mit der Ebene $A_1 A_2 A_3$, die nun ganz von Punkten Q erfüllt ist, die Grenzfläche. Bilden die Wirkungslinien von $P_{4,1}, P_{4,2}, P_{4,3}$ ein Dreikant, so führen die Annahmen $u_5 = 0$, $u_4 = 0$ auf zwei spezielle Gruppen, aus denen sich alle übrigen zusammensetzen lassen. Die zugehörigen Punkte Q_4, Q_4' legen mit A_1, A_2, A_3 einen Kegelschnitt der Grenzfläche fest. Dieselben Annahmen führen im allgemeinen auf Punktpaare Q_1, Q_1'; Q_2, Q_2'; Q_3, Q_3', die mit A_2, A_3, A_4; A_3, A_1, A_4; A_1, A_2, A_4 Kegelschnitte der Grenzfläche bestimmen[1].

55. $0A_1, 0A_2, 0A_3, 0A_4$ können, wenn sie von einem speziellen Punkte der Grenzfläche ausgehen, mit einzelnen Stäben zweiter und dritter Art des Fachwerks ein in sich eingespanntes Stabwerk bilden, anstatt mit allen ein in sich eingespanntes Fachwerk zu bestimmen. Wir wollen ε den Index der Einspannung nennen, wenn das Stabwerk ε Stäbe weniger enthält, als ein statisch bestimmtes Fachwerk mit der gleichen Anzahl von Knotenpunkten. Liegt 0 mit A_1, A_2, A_3 auf einem Kegelschnitt der Grenzfläche, so bleibt z. B. $0A_4$ ohne Spannkraft, und es bilden $0A_1, 0A_2, 0A_3$ im allgemeinen mit den Stäben zweiter und dritter Art des Fachwerks ein in sich eingespanntes Stabwerk vom Index 1. Gelangt 0 in den Punkt Q_4, so ist der fünfte Hauptstab ebenfalls ohne Spannkraft, und es ist im allgemeinen $\varepsilon \geqq 2$.

Soll überhaupt der fünfte Hauptstab, an dessen Stelle wir jeden Stab zweiter oder dritter Art bringen können, entspannt sein, so ist im allgemeinen $\varepsilon \geqq 1$, 0 bewegt sich offenbar über die Raumkurve vierter Ordnung, die $A_1, A_2, A_3, A_4, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ festlegen. Auf jeden ihrer Punkte wirken die Kräfte

$$P_\alpha = v_1 P_{\alpha,1} + v_2 P_{\alpha,2} + v_3 P_{\alpha,3} + v_4 P_{\alpha,4} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

einer Gruppe, die sich aus den vier ersten Hauptgruppen allein zusammensetzen läßt. Ersetzt man die fünfte Hauptgruppe durch eine andere, deren

---

[1] Wenn A_1, A_2, A_3, A_4 einer Ebene angehören, so liegen im allgemeinen alle Punkte $Q_4, Q_4', Q_1, Q_1', Q_2, Q_2', Q_3, Q_3'$ mit ihnen auf einem Kegelschnitt.

Kräfte in den Stäben $0_5 A_1, 0_5 A_2, 0_5 A_3, 0_5 A_4$ wirken, so bestimmt sie mit den vier ersten Gruppen eine Grenzfläche, die 0_5 enthält und mit der gegebenen Fläche die gesuchte Kurve gemein hat. Sie enthält alle Stäbe zweiter Art, die sich in der Reihe der vier ersten Hauptstäbe vorfinden.

Die beiden Raumkurven, welche den Annahmen $u_5 = 0, u_4 = 0$ entsprechen, haben außer A_1, A_2, A_3, A_4 noch die Punkte der Grenzfläche miteinander gemein, bei deren Einspannung die beiden letzten Hauptstäbe außer Betracht bleiben. An die Stelle des vorletzten Hauptstabes kann man jeden festen Stab rücken, der nicht zugleich mit dem fünften Hauptstab die Spannkraft Null erhält. Es kann sich im allgemeinen um ein Quadrupel von Punkten, in speziellen Fällen um eine beiden Raumkurven angehörende Teilkurve handeln. Jedenfalls enthält sie alle Stäbe zweiter Art, die sich unter den drei ersten Hauptstäben noch befinden. Für jeden der bezeichneten Punkte ist im allgemeinen $\varepsilon \geqq 2$.

56. Ich erörtere diese Frage bei dem allgemeinsten statisch bestimmten Fachwerk. An der Einspannung, die zu einem Punkte 0_0 der Grenzfläche eines $(k+2)$-stäbigen Knotenpunktes gehört, seien m_0 Stäbe und n_0 Knotenpunkte beteiligt, nämlich: $k+2-\alpha$ von den Stäben erster Art $0_0 A_1, 0_0 A_2, \cdots, 0_0 A_{k+2}$, $2k+1-l-\beta$ von den $2k+1-l$ Stäben zweiter Art, deren jeder von zwei Punkten der Reihe $A_1 A_2 \cdots A_{k+2}$ begrenzt wird. Die Einspannung werde zum Abschluß gebracht durch ein Teilstabwerk aus Stäben dritter Art, deren jeder einen der Punkte $B_1, B_2, \cdots, B_r$ mit einem der Punkte $A_1, A_2, \cdots, A_{k+2}, B_1, B_2, \cdots, B_r$ verbindet. Es ist so eingespannt, daß in jedem seiner r_1 der Reihe $B_1 B_2 \cdots B_r$ angehörenden Knotenpunkte Gleichgewicht besteht. Aus den Formeln (21.), (21a.) folgt die allgemeinste Einspannung der $3r+l$ Stäbe dritter Art, bei der in allen Punkten $B_1, B_2, \cdots, B_r$ Gleichgewicht besteht. Für spezielle Spannkräfte der l Hauptstäbe dritter Art muß also jeder Stab des Teilstabwerks die ihm zukommende Spannkraft, jeder außerhalb desselben liegende Stab dritter Art die Spannkraft Null erhalten. Für die Auswahl der Hauptstäbe gilt nun die Regel, daß der ρ^{te} unabhängig von den $\rho-1$ vorhergehenden sein muß, also außerhalb des Aggregats der Stäbe liegt, die zugleich mit den $\rho-1$ schon ausgewählten Hauptstäben die Spannkraft Null annehmen. Man kann die Auswahl so treffen, daß, abgesehen von den überhaupt nicht eingespannten Stäben dritter Art, alle die und nur die Stäbe dritter Art außerhalb des Teilstabwerks liegen, welche von den γ ersten Haupt-

stäben abhängen. Außer den $l-\gamma$ übrigen Hauptstäben enthält das Teilstabwerk noch höchstens $3r_1$ von den $3r$ Stäben dritter Art, die nach Beseitigung der l Hauptstäbe zurückbleiben. Diese $3r$ Stäbe können nämlich auf keine Weise so eingespannt werden, daß in $B_1, B_2, \cdots, B_r$ Gleichgewicht besteht, auch nicht in der Art, daß nur von r_1 dieser Punkte wirklich eingespannte Stäbe ausgehen. Offenbar ist nun:

$$m_0 \leqq 3r_1 + 3k + 3 - \alpha - \beta - \gamma \quad ; \quad n_0 = r_1 + k + 3 - \delta,$$

wenn $\delta (\leqq \alpha)$ von den Punkten $A_1, A_2, \cdots, A_{k+2}$ bei der Einspannung unbeteiligt sind. Augenscheinlich ist

$$\varepsilon = 3n_0 - 6 - m_0 \geqq \alpha + \beta + \gamma - 3\delta, \qquad (34.)$$

und insbesondere

$$\varepsilon \geqq \alpha + \beta + \gamma,$$

wenn alle Knotenpunkte $A_1, A_2, \cdots, A_{k+2}$ bei der Einspannung erfaßt werden. Jede Annahme $\alpha + \beta + \gamma = 1$ kann durch Punkte einer Kurve, jede Annahme $\alpha + \beta + \gamma = 2$ durch einzelne (reelle oder nichtreelle) Punkte der Grenzfläche befriedigt werden, für ganz besondere Stellen kann die Zahl $\alpha + \beta + \gamma$ bedeutend höhere Werte annehmen.

57. Um ein Beispiel für diese Theorie zu gewinnen, betrachten wir ein Fachwerk aus 8 Knotenpunkten und 18 Stäben. Außer den Stäben zweiter Art A_2A_3 und A_1A_4 soll es 16 Stäbe enthalten, deren jeder einen der Punkte $0, 0_1, 0_2, 0_3$ mit einem der Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 verbindet. Seine Grenzfläche bezüglich 0 ist ein einschaliges Hyperboloid, welches A_2A_3 und A_1A_4, den vierten und den fünften Hauptstab, und die Punkte 0_1, $0_2, 0_3$ enthält; als ersten, zweiten und dritten Hauptstab können wir je einen der von $0_1, 0_2, 0_3$ ausgehenden Stäbe betrachten. Der Grenzfläche gehört ganz die Gerade o_1 an, welche 0_1 enthält und die windschiefen Geraden A_2A_3 und A_1A_4 zugleich trifft. Einem Punkte 0 von o_1 entspricht eine Einspannung, bei der alle von 0_2 und 0_3 ausgehenden Stäbe ohne Spannkraft bleiben ($u_2 = 0, u_3 = 0$). Im Einklang mit der allgemeinen Regel (56.) entsteht ein in sich eingespanntes Stabwerk von 6 Knotenpunkten, aber nur 10 Stäben ($\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 2, \delta = 0, \varepsilon = 2$). Ganz ähnliches gilt von den Geraden o_2 und o_3, die von 0_2 und 0_3 ausgehen, dabei A_2A_3 und A_1A_4 zugleich treffen. o_2, o_3, A_2A_3, A_1A_4 bilden die Raumkurve vierter Ordnung, für deren Punkte der erste Hauptstab entspannt ist ($u_1 = 0$). Bleibt A_2A_3 ohne Spannkraft ($u_4 = 0$), so zerfällt

diese Raumkurve in A_1A_4 und eine Raumkurve dritter Ordnung, welche $A_2, A_3, 0_1, 0_2, 0_3$ enthält, A_1A_4 zur Sehne hat, und durch diese Annahmen eindeutig bestimmt ist. Sie trifft sich mit der bei Entspannung von A_1A_4 ($u_5 = 0$) entstehenden Raumkurve dritter Ordnung in dem Quadrupel von Punkten $0_1, 0_2, 0_3, 0_4$, die der Annahme $u_4 = 0$, $u_5 = 0$ entsprechen. Der letzte (vergl. Theorem XVI.) ist der notwendige zu $A_1, A_2, A_3, A_4, 0_1, 0_2, 0_3$ gehörende Punkt. Soll $0A_4$ entspannt sein, so ist der Ort für 0 die Gerade des Hyperboloids, welche außer A_1A_4 von A_1 ausgeht und also A_2A_3 schneidet. Der Index der Einspannung ist im allgemeinen gleich 1, steigt aber auf den Wert 2 an, wenn A_2A_3 entspannt ist, also 0 in den Schnittpunkt der Geraden mit der ersten Raumkurve dritter Ordnung gelangt. In der Tat hat man dann bei 8 Knotenpunkten nur 16 eingespannte Stäbe ($\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0, \delta = 0, \varepsilon = 2$). Die Formel (34.) bewährt sich auch dann, wenn 0 z. B. auf die Gerade A_2A_3 gelangt und nur die drei Stäbe A_2A_3, $0A_2$, $0A_3$ eingespannt sind:

$$\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 3, \delta = 2; \ \varepsilon \geqq \alpha + \beta + \gamma - 3\delta = 0.$$

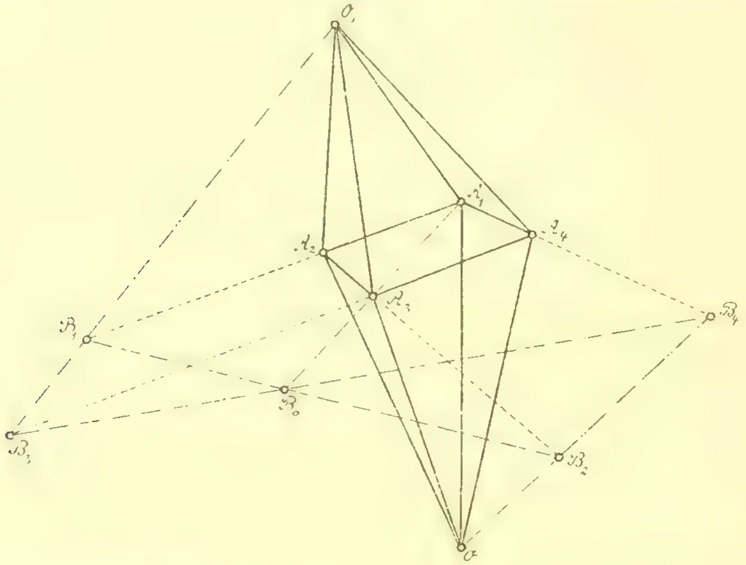
VIII.

58. Die Kanten einer n-seitigen Doppelpyramide, also die Seiten eines ebenen oder unebenen n-Ecks $A_1A_2 \cdots A_n$ und die $2n$ Verbindungsstäbe $0_0A_1, 0_0A_2, \cdots, 0_0A_n, 0A_1, 0A_2, \cdots, 0A_n$ seiner Ecken mit den Spitzen 0_0 und 0 der Doppelpyramide bilden ein im allgemeinen statisch bestimmtes Fachwerk von $n+2$ Knotenpunkten und $3n$ $(= 3(n+2) - 6)$ Stäben. Seine Grenzfläche bezüglich 0 ist nach Theorem XIV. ($k = n - 2$) eine Fläche $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche 0_0 zum $(n-3)$-fachen Punkt hat.

Für $n = 4$ handelt es sich offenbar um ein Oktaeder allgemeinster Art mit den Paaren $0, 0_0$; A_1, A_3; A_2, A_4 gegenüberliegenden Ecken. Es ist dann und nur dann in sich einspannbar, wenn 0 und 0_0 mit den Seiten des Vierecks $A_1A_2A_3A_4$ einem einschaligen Hyperboloid angehören. Auf einem zweiten Hyperboloid liegen dann von selbst A_1 und A_3 mit den Geraden $0A_2$, A_20_0, 0_0A_4, A_40, auf einem dritten A_2 und A_4 mit den Geraden $0A_1$, A_10_0, 0_0A_3, A_30.

Eine von 0_0 ausgehende Gerade mag A_1A_2 in B_1, A_3A_4 in B_3 schneiden, eine von 0 ausgehende Gerade A_2A_3 in B_2, A_4A_1 in B_4 treffen. Handelt es sich um ein Grenzfachwerk, so gehört B_1B_3 mit A_2A_3 und A_4A_1 in die eine Geradenschar des ersten Hyperboloids, B_2B_4 aber mit A_1A_2 und A_3A_4 in seine andere Geradenschar. B_1B_3 und B_2B_4 schneiden sich also in einem Punkte S; B_1, B_2, B_3, B_4 liegen in einer Ebene. Man schließt (Fig. 14.):

Fig. 14.



XVIII. *Schneidet man die Seiten* A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 *eines unebenen Vierecks* $A_1A_2A_3A_4$ *mit einer beliebigen Ebene in den Punkten* B_1, B_2, B_3, B_4, *nimmt* 0_0 *auf* B_1B_3, 0 *auf* B_2B_4 *beliebig an, so sind* 0 *und* 0_0, A_1 *und* A_3, A_2 *und* A_4 *gegenüberliegende Ecken eines in sich einspannbaren Oktaeders*[1].

---

[1] Man kann dem Theorem XVIII. auch folgende Form geben: *Bilden die Kanten eines Oktaeders ein Grenzfachwerk, so treffen sich in einem Punkte je vier Flächen des Oktaeders, von denen keine zwei längs einer Kante aneinandergrenzen.* In der Tat schneiden sich $A_1 A_2 0_0$ und $A_3 A_4 0_0$ in der Geraden $B_1 B_3$, $A_2 A_3 0$ und $A_4 A_1 0$ in der Geraden $B_2 B_4$. Den in Fig. 14. nicht zugänglichen Schnittpunkt S von $B_1 B_3$ und $B_2 B_4$ haben alle vier Ebenen miteinander gemein.

Ist das vorliegende Fachwerk in sich einspannbar, so greifen die Stäbe, welche nicht Seiten der beiden Dreiecke $0_0 A_1 A_2$ und $0 A_3 A_4$ sind, in den Ecken des einen wie des anderen mit Kräften an, die einander das Gleichgewicht halten (vergl. Föppl, Das Fachwerk im Raume, Leipzig 1892, S. 20). Hieraus kann man den angeführten Satz ebenfalls sofort ableiten. Diese so naheliegenden Zusammenhänge habe ich erst während der Drucklegung dieser Abhandlung aufgefunden.

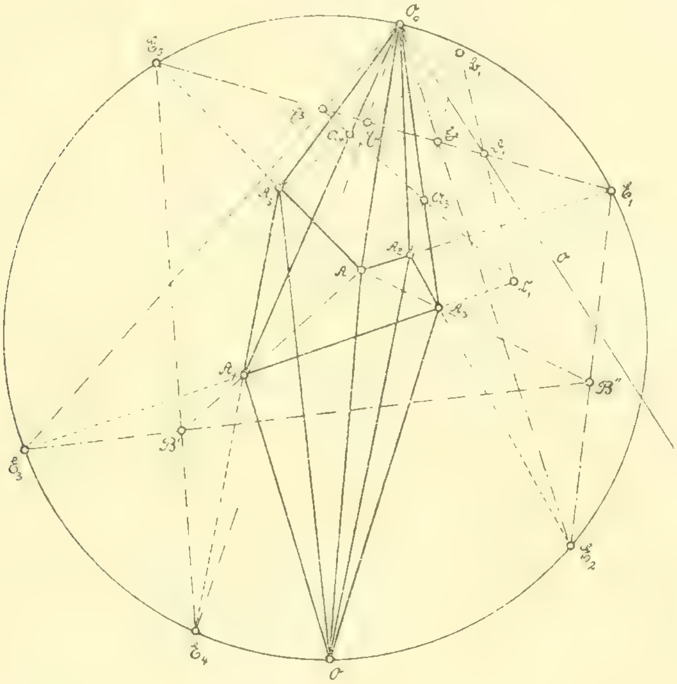
Fig. 14. stellt die Horizontalprojektion einer in sich einspannbaren vierseitigen Doppelpyramide dar, wobei die Horizontalebene mit der Hilfsebene zusammenfällt, also außer B_1, B_2, B_3, B_4 auch die Spitzen 0 und 0_0 der Doppelpyramide enthält. Die Horizontalspur B_0 von $A_3 A_1$ fällt deshalb mit dem Schnittpunkt von $B_1 B_2$ und $B_3 B_4$ zusammen. Die Vertikalprojektion des Körpers würde völlig gegeben sein, wenn man sich die Entfernung

Ist $A_1A_2A_3A_4$ ein ebenes Viereck, so fallen B_1 und B_3 in den Schnittpunkt von A_1A_2 und A_3A_4, B_3 und B_4 in den von A_2A_3 und A_4A_1 hinein. Man kann folgern:

XIX. *Eine vierseitige Doppelpyramide mit ebenem Mittelviereck* $A_1A_2A_3A_4$ *ist dann in sich einspannbar, wenn eine der beiden Spitzen in die Ebene des Vierecks gelangt oder beide in einer Ebene mit den Punkten liegen, in deren jedem zwei gegenüberliegende Seiten des Vierecks sich schneiden.*

59. Für fünfseitige Doppelpyramiden ergibt sich der Satz (Fig. 15):

Fig. 15.



XX. *Treffen die Seiten* A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1 *eines unebenen Fünfecks* $A_1A_2A_3A_4A_5$ *irgendeine Ebene in den Punkten* E_1, E_2, E_3, E_4, E_5,

---

des Punktes A_1 von der Zeichenebene gäbe. Von ihrer Einzeichnung wurde Abstand genommen.

Ganz ähnliches gilt von Fig. 15. Die sieben Punkte 0_0, 0, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 wurden auf einem der Horizontalebene angehörenden Kreise beliebig angenommen; bei der Einzeichnung der Doppelpyramide war zu beachten, daß die Horizontalspuren B' und B'' von A_1A_4 und A_1A_3 den Geraden E_3E_4 und E_1E_2 angehören, indes E_3, B', B'' ebenfalls in einer Geraden, der Horizontalspur der Ebene $A_1A_3A_4$ liegen.

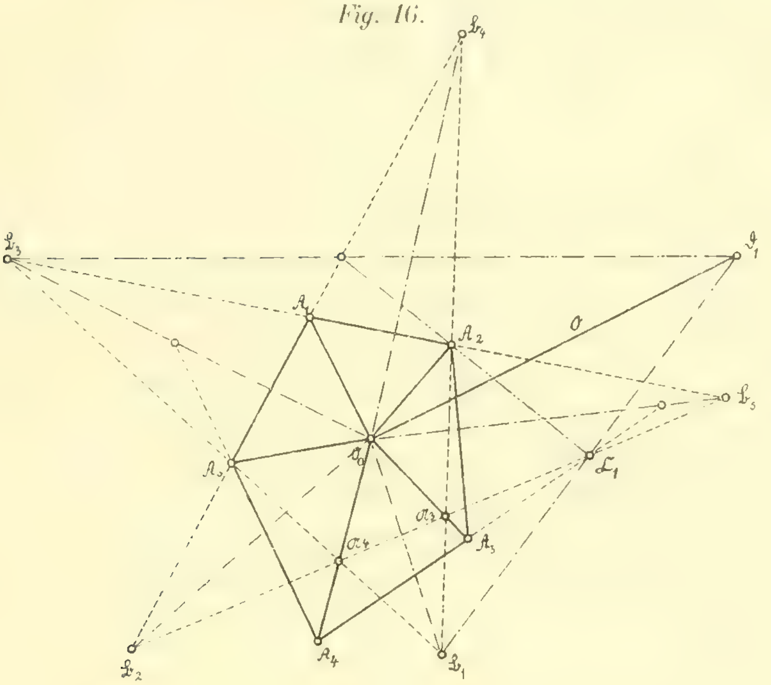
so sind zwei beliebige Punkte 0 *und* 0_0 *des Kegelschnittes, den diese Punkte festlegen, die Spitzen einer in sich einspannbaren Doppelpyramide mit dem Mittelpolygon* $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$.

Betrachtet man 0_0 auf dem erwähnten Kegelschnitt als gegeben, 0 als frei beweglich, so ist die Grenzfläche des Fachwerks bezüglich 0 eine Fläche dritter Ordnung, die 0_0 zum Doppelpunkt hat und die Seiten des Fünfecks enthält. Der Kegelschnitt trifft die Fläche dritter Ordnung einfach in den Punkten E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, in zwei aufeinanderfolgenden Punkten in 0_0 und gehört mithin der Grenzfläche ganz an, weil er mehr als sechs Punkte mit ihr gemein hat. Jeder Punkt 0 desselben ist also die zweite Spitze einer in sich einspannbaren Doppelpyramide. Die Ebene des Kegelschnittes enthält noch eine von 0_0 ausgehende Gerade o der Grenzfläche, denn sie muß eine (zerfallende) Kurve dritter Ordnung mit dem Doppelpunkt 0_0 aus ihr herausschneiden. Jeder Punkt 0 von o liefert mit 0_0 zusammen eine in sich einspannbare Doppelpyramide, liegt aber auch, im Einklang mit unserem Satz, auf einem bestimmten der Kegelschnitte, welche die durch o gelegten Ebenen aus der Grenzfläche herausschneiden.

Um o festzulegen, wenn 0_0 und das Fünfeck $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ vorliegen, schneide man die Ebene $A_5 A_1 A_2$ mit $0_0 A_3$ und $0_0 A_4$ in den Punkten $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{A}_4$. Es mögen sich jetzt (Fig. 16.) $\mathfrak{A}_4 A_5$ und $A_2 \mathfrak{A}_3$ in $\mathfrak{B}_1$, $A_5 A_1$ und $\mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}_4$ in $\mathfrak{B}_2$, $A_1 A_2$ und $\mathfrak{A}_4 A_5$ in $\mathfrak{B}_3$, $A_2 \mathfrak{A}_3$ und $A_5 A_1$ in $\mathfrak{B}_4$, $\mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}_4$ und $A_1 A_2$ in $\mathfrak{B}_5$ treffen, so gehört jede der Geraden $0_0 \mathfrak{B}_1$, $0_0 \mathfrak{B}_2$, $0_0 \mathfrak{B}_3$, $0_0 \mathfrak{B}_4$, $0_0 \mathfrak{B}_5$, da sie zwei Seiten des Fünfecks $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ trifft und in 0_0 zwei aufeinanderfolgende Punkte der Grenzfläche ausschneidet, ihr ganz an. Wirklich liefert z. B. jeder Punkt 0 von $0_0 \mathfrak{B}_1$ eine in sich einspannbare Doppelpyramide mit den Spitzen 0 und 0_0 und dem Mittelpolygon $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$, nur sind $A_4 A_5$ und alle von A_1 ausgehenden Stäbe ohne Spannkraft. Da nämlich $0_0 \mathfrak{B}_1$ die Schnittlinie der Ebenen $0_0 A_2 A_3$ und $0_0 A_4 A_5$ ist, so bilden $0_0 A_2$, $0_0 A_3$, $0 A_2$, $0 A_3$, $A_2 A_3$, $0\,0_0$ ein ebenes statisch unbestimmtes Fachwerk aus sechs Stäben und vier Knotenpunkten; von $0_0 A_4$, $0_0 A_5$, $0 A_4$, $0 A_5$, $A_4 A_5$, $0\,0_0$ gilt das gleiche. Man spanne nun beide Fachwerke so in sich ein, daß $0\,0_0$ entgegengesetzt gleiche Spannkräfte erhält. Nach Fortnahme von $0\,0_0$ sind dann die übrigen zehn Stäbe so eingespannt, daß in allen Punkten 0, 0_0, A_2, A_3, A_4, A_5 Gleichgewicht besteht. Dasselbe Stabwerk begegnete uns schon oben (57.).

Die dritte Gerade, welche $A_5 A_1 A_2$ außer $A_5 A_1$ und $A_1 A_2$ mit der Grenzfläche gemein hat, enthält $\mathfrak{B}_1$ und den Schnittpunkt $\mathfrak{C}_1$ von $A_3 A_4$

Fig. 16.



und $\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$. Sie treffe in den Punkten $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{D}_1$ den Kegelschnitt, welchen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_4, \mathfrak{B}_5$ bestimmen. Alsdann fällt $0_0\mathfrak{D}_1$ mit der gesuchten Geraden o zusammen. Offenbar gehört nämlich $0_0\mathfrak{D}_1$ dem Tangentialkegel der Grenzfläche in 0_0 an, den ja $0_0\mathfrak{B}_1$, $0_0\mathfrak{B}_2$, $0_0\mathfrak{B}_3$, $0_0\mathfrak{B}_4$, $0_0\mathfrak{B}_5$ festlegen, und kann deshalb die Grenzfläche außerhalb 0_0 (in $\mathfrak{D}_1$) nicht treffen, ohne ihr ganz anzugehören. Schneidet jetzt eine durch $\mathfrak{D}_1$ gelegte Gerade A_1A_2 $A_2\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{A}_4A_5$, A_5A_1 der Reihe nach in den Punkten $E_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3, \mathfrak{E}_4, E_5$ und treffen $0_0\mathfrak{E}_2$, $0_0\mathfrak{E}_3$, $0_0\mathfrak{E}_4$ der Reihe nach A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 in den Punkten E_2, E_3, E_4, so gehören $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, 0_0$ einem Kegelschnitte der Grenzfläche an, und es ist die Lage der Figur 15. wiederhergestellt. Der Zusammenhang ist benutzt worden, um die Gerade o in sie einzutragen.

Ist $A_1A_2A_3A_4A_5$ ein ebenes Fünfeck, so zerfällt die Grenzfläche in die Ebene desselben und den soeben konstruierten Tangentialkegel. Man schließt:

XXI. *Hält man von den beiden Spitzen* 0_0 *und* 0 *einer fünfseitigen Doppelpyramide mit ebenem Mittelfünfeck die erste fest, so wird die Doppelpyramide in sich einspannbar sein, wenn* 0 *in der Ebene des Fünfecks liegt, und alle von* 0_0 *ausgehenden Stäbe ohne Spannkraft sind, oder wenn* 0 *einem Kegel zweiten*

Grades mit der Spitze 0_0 *angehört. Jeder Punkt, in dem sich zwei nicht anstoßende Seiten des Fünfecks treffen, legt eine Mantellinie des Kegels fest.*

60. Bei einer n-seitigen Doppelpyramide mit den Spitzen 0 und 0_0 und dem Mittelpolygon $A_1 A_2 \cdots A_n$ gehören der Grenzfläche bezüglich 0 außer den Seiten dieses n-Ecks die $\frac{1}{2} n (n-3)$ von 0_0 ausgehenden Geraden an, deren jede zwei nicht anstoßende Seiten des n-Ecks trifft. Sie genügen zur Festlegung des Tangentialkegels der Grenzfläche in dem $(n-3)$-fachen Punkte 0_0. $2(n-3)$ dieser Geraden treffen $A_n A_1$ und $A_1 A_2$. Die übrigen, wie auch die Geraden $A_3 A_4, A_4 A_5, \cdots, A_{n-2} A_{n-1}$, schneiden $A_n A_1 A_2$ in Punkten der Kurve $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die Grenzfläche außer $A_n A_1$ und $A_1 A_2$ mit der Ebene $A_n A_1 A_2$ gemein hat. Zu ihrer Bestimmung liegt gerade die genügende Zahl von $\frac{1}{2}(n-4)(n-1)$ Punkten vor. Von 0_0 aus wird sie durch einen Kegel projiziert, der — außer schon bekannten — noch $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)$ neue Gerade mit der Grenzfläche und deren Tangentialkegel in 0_0 gemein hat; keine von ihnen trifft die Seiten des n-Ecks. Die Grenzfläche ist nun völlig bestimmt. Man folgert beiläufig:

XXII. *Gehört* 0 *der Fläche* $(n-2)^{\text{ter}}$ *Ordnung an, welche die Seiten eines n-Ecks* $A_1 A_2 \cdots A_n$ *enthält und* 0_0 *zum* $(n-3)$*-fachen Punkt hat, so liegt* 0_0 *umgekehrt auf der Fläche* $(n-2)^{\text{ter}}$ *Ordnung, welche die Seiten des n-Ecks* $A_1 A_2 \cdots A_n$ *enthält und* 0 *zum* $(n-3)$*-fachen Punkt hat.*

IX.

61. Da es bekanntlich statisch bestimmte Raumfachwerke gibt, bei denen von jedem Knotenpunkt mehr als vier Stäbe ausgehen, soll im folgenden die Grenzfläche eines Fachwerks von n Knotenpunkten und $3n-6$ Stäben hinsichtlich eines Knotenpunktes 0 näher untersucht werden, welcher die fünf Stäbe erster Art $0A_1, 0A_2, 0A_3, 0A_4, 0A_5$ entsendet. Von selbst werden sich hierbei Ausblicke auf den allgemeinen Fall ergeben. Es seien $(k = 3\,, 2k+1 = 7)$ die sieben Hauptgruppen

$$P_{1,\beta}\, P_{2,\beta}\, P_{3,\beta}\, P_{4,\beta}\, P_{5,\beta} \qquad (\beta = 1, 2, \cdots, 7)$$

ermittelt. Jede besteht aus fünf in A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 angreifenden, einander das Gleichgewicht haltenden Kräften. Die Hauptgruppen seien voneinander unabhängig, es sei nicht möglich, $v_1, v_2, \cdots, v_7$ so anzunehmen, daß

$$v_1 P_{\alpha,1}\,,\; v_2 P_{\alpha,2}\,,\; \cdots,\; v_7 P_{\alpha,7} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4, 5)$$

einander das Gleichgewicht halten, ohne daß alle v verschwinden. Auf jeden Punkt der Grenzfläche wirken (41.) die fünf Kräfte einer Gruppe, die nach den Regeln

$$P_\alpha = u_1 P_{\alpha,1} + u_2 P_{\alpha,2} + \cdots + u_7 P_{\alpha,7} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4, 5)$$

aus den sieben Hauptgruppen zusammengesetzt ist.

Stehen $u_1 P_{5,1}$, $u_2 P_{5,2}$, $\cdots$, $u_7 P_{5,7}$ miteinander im Gleichgewicht, so läßt die Gruppe A_5 unbeansprucht. Alle Gruppen dieser Art lassen sich aus vier von ihnen im allgemeinen zusammensetzen. Fallen die Wirkungslinien von $P_{5,5}$, $P_{5,6}$, $P_{5,7}$ nicht in eine Ebene, so können schon $u_1 P_{5,1}$, $u_5 P_{5,5}$, $u_6 P_{5,6}$, $u_7 P_{5,7}$ in Gleichgewicht gebracht werden, es entsteht eine A_5 nicht beanspruchende Gruppe $P_1' P_2' P_3' P_4' 0$. Drei weitere Gruppen ergeben sich, wenn wir statt der ersten der Reihe nach die zweite, dritte, vierte Hauptgruppe mit den drei letzten zusammensetzen. Die allgemeinste A_5 nicht beanspruchende Gruppe wird dann aus den vier so erhaltenen Gruppen nach der Regel zu bilden sein:

$$P_\alpha = v' P_\alpha' + v'' P_\alpha'' + v''' P_\alpha''' + v^{(4)} P_\alpha^{(1)}. \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4).$$

Der Punkt, auf den alle Kräfte einer solchen Gruppe wirken, durchläuft (55.) eine Raumkurve R_5 vierter Ordnung (erster Art), welche der Grenzfläche angehört. Sollten alle Kräfte $P_{5,\beta}$ in einer Ebene ϕ wirken, so könnten fünf voneinander unabhängige Kräftegruppen abgeleitet werden, die A_5 unbeansprucht lassen. An die Stelle von R_5 träte eine Oberfläche zweiter Ordnung, welche zusammen mit ϕ die Grenzfläche bildet. Lassen wir zerfallende Grenzflächen beiseite, so können also nicht alle Kräfte $P_{5,1}$, $P_{5,2}$, $\cdots$, $P_{5,7}$ in einer Ebene wirken.

Im allgemeinen können $w' : w'' : w''' : w^{(4)}$ nur in einer Art so gewählt werden, daß $w' P_4'$, $w'' P_4''$, $w''' P_4'''$, $w^{(4)} P_4^{(1)}$ einander das Gleichgewicht halten. Alsdann wirken die drei Kräfte

$$P_\alpha = w' P_\alpha' + w'' P_\alpha'' + w''' P_\alpha''' + w^{(4)} P_\alpha^{(1)} \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

auf einen Punkt $Q_{4,5}$ der Ebene $A_1 A_2 A_3$, da sie miteinander im Gleichgewicht stehen. Wirken die Kräfte P_4', P_4'', P_4''', $P_4^{(4)}$, soweit sie von Null verschieden sind, in einer Ebene ψ, so gibt es unzählig viele einen Kegelschnitt erfüllende Punkte $Q_{4,5}$; er bildet mit einem zweiten ψ angehörigen Kegelschnitt die Raumkurve R_5. Diesen speziellen Fall, welcher sich leicht der allgemeinen Entwicklung unterordnet, soll beiseite gelassen werden. Wenn wir anstatt A_5 den Punkt A_4 ausscheiden, ergibt sich eine neue der Grenzfläche angehörige Raumkurve R_4, welche mit R_5 offenbar die Punkte $A_1, A_2, A_3, Q_{4,5}$ gemein hat. Insgesamt erhält man fünf Raumkurven R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 und zehn Punkte $Q_{2,3}, Q_{3,1}, Q_{1,2}, Q_{1,4}, Q_{2,4}, Q_{3,4}, Q_{1,5}, Q_{2,5}, Q_{3,5}, Q_{4,5}$. R_5 ist durch die Punkte $A_1, A_2, A_3, A_4, Q_{1,5}, Q_{2,5}, Q_{3,5}, Q_{4,5}$ im allgemeinen festgelegt.

62. Die Gruppe $P_{1,0} P_{2,0} P_{3,0} P_{4,0} P_{5,0}$ bestehe aus fünf in A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 angreifenden, einander das Gleichgewicht haltenden Kräften, lasse sich aber nicht aus unseren sieben Hauptgruppen zusammensetzen. Aus der erweiterten Mannigfaltigkeit der Gruppen $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$, die sich aus allen acht Gruppen nach der Regel zusammensetzen lassen:

$$P_\alpha = u_0 P_{\alpha,0} + u_1 P_{\alpha,1} + \cdots + u_7 P_{\alpha,7}, \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4, 5)$$

kann man fünf voneinander unabhängige Gruppen ausscheiden, die A_5 nicht beanspruchen; der Ort der Punkte, auf welche die vier anderen Kräfte einer solchen Gruppe wirken, ist also eine Oberfläche F_5 zweiter Ordnung, welche R_5 aufnimmt (XIVa.). Der in der Ebene $A_1 A_2 A_3$ liegende Kegelschnitt (A_1, A_2, A_3) von F_5 enthält die Punkte, auf welche die Kräfte einer A_4 und A_5 nicht beanspruchenden Gruppe der erweiterten Mannigfaltigkeit wirken. Scheiden statt A_5 der Reihe nach A_1, A_2, A_3, A_4 aus, so ergeben sich die ganz analog gebildeten Flächen F_1, F_2, F_3, F_4. Außer (A_1, A_2, A_3) haben F_4 und F_5 noch einen zweiten Kegelschnitt K miteinander gemein. Er gehört der Grenzfläche ganz an. Auf einen Punkt 0 von K wirkt eine Gruppe $\mathfrak{P}_1' \mathfrak{P}_2' \mathfrak{P}_3' \mathfrak{P}_4' 0$ der erweiterten Mannigfaltigkeit, die A_5 unbeansprucht läßt, und eine andere $\mathfrak{P}_1'' \mathfrak{P}_2'' \mathfrak{P}_3'' 0 \mathfrak{P}_5''$, die A_4 unbeansprucht läßt; in den Strahlen $0A_1, 0A_2, 0A_3, 0A_4, 0A_5$ wirken daher unzählig viele Kräftegruppen der erweiterten Mannigfaltigkeit, wobei

$$P_1 = w'\mathfrak{P}_1' + w''\mathfrak{P}_1'',\ P_2 = w'\mathfrak{P}_2' + w''\mathfrak{P}_2'',\ P_3 = w'\mathfrak{P}_3' + w''\mathfrak{P}_3'',\ P_4 = w'\mathfrak{P}_4',\ P_5 = w''\mathfrak{P}_5''$$

ist. Jedenfalls hat man

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_\alpha' &= w_0' P_{\alpha,0} + w_1' P_{\alpha,1} + \cdots + w_7' P_{\alpha,7}, \\ \mathfrak{P}_\alpha'' &= w_0'' P_{\alpha,0} + w_1'' P_{\alpha,1} + \cdots + w_7'' P_{\alpha,7} \end{aligned} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4, 5)$$

zu setzen. Macht man jetzt $w' = w_0''$, $w'' = -w_0'$, so entsteht eine Gruppe, die allein aus den sieben Hauptgruppen abgeleitet ist. 0 gehört der Grenzfläche an, somit auch K. Man kann ferner w' und w'' so bemessen, daß $w'\mathfrak{P}_\beta'$ und $w''\mathfrak{P}_\beta''$, die in $0A_\beta$ wirken, einander aufheben ($\beta = 1, 2, 3$), K gehört also auch den Flächen F_1, F_2, F_3 an. Ein beliebiger Punkt 0 der

Grenzfläche Φ kann zur Festlegung von K benutzt werden. Man braucht nur alle Gruppen in Gleichgewicht stehender Kräfte in die erweiterte Mannigfaltigkeit aufzunehmen, die in $0A_1, 0A_2, 0A_3, 0A_4, 0A_5$ wirken können. Die Ebene von K schneidet die Grenzfläche, außer in K, in einer Geraden, die wir als ihre Hauptgerade bezeichnen wollen.

Die Gleichung der Grenzfläche ergab sich oben (47.) bei der Elimination der $m+2$ Größen $u, u', u_1, u_2, \cdots, u_m$ aus $m+2$ Gleichungen von der Form

$$uX_{\lambda,\mu} + u'y_{\lambda,\mu} + u_1S'_{\lambda,\mu} + u_2S''_{\lambda,\mu} + \cdots + u_mS^{(m)}_{\lambda,\mu} \equiv S_{\lambda,\mu} = 0. \qquad (29.)$$

Erfüllt man diese Gleichungen unter der Annahme $u = 0$, so gelangt man zu der Hauptgeraden der Grenzfläche, soll $u' = 0$ sein, so stellen die Gleichungen die Kurve R_5 dar, endlich ergibt sich für $u_\alpha = 0$ eine spezielle der weiter unten eingeführten Raumkurven siebenter Ordnung.

63. Bekanntlich enthält eine allgemeine Fläche dritter Ordnung 27 Gerade. Man kann beweisen:

XXIII. *Eine gegebene Oberfläche* Φ *dritter Ordnung kann als Grenzfläche eines Fachwerks von 13 Knotenpunkten und 33 Stäben* ($33 = 3.13 - 6$) *hinsichtlich eines fünfstäbigen Knotenpunktes gedeutet werden. Irgendeine Gerade der Fläche kann als Hauptgerade angesehen werden;* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, *die Stützpunkte des Knotenpunktes, können mit beliebigen Flächenpunkten zusammenfallen.*

Eine beliebige durch die Hauptgerade gelegte Ebene treffe die Fläche in dem Kegelschnitt K. Man verbinde seine der Ebene $A_1A_2A_3$ angehörenden Punkte mit den Punkten A_1, A_2, A_3 selbst durch den Kegelschnitt (A_1, A_2, A_3). Er hat außer seinen fünf Bestimmungspunkten noch einen Punkt $Q_{4,5}$ mit der Fläche gemein. So erhalten wir zehn Kegelschnitte und zehn Punkte $Q_{\lambda,\mu}$. $Q_{2,3}$ liegt z. B. auf dem Kegelschnitt (A_1, A_4, A_5). Die Oberfläche zweiter Ordnung F_5, welche außer K und (A_1, A_2, A_3) den Punkt A_4 aufnimmt, enthält auch $(A_2, A_3, A_4), (A_3, A_1, A_4), (A_1, A_2, A_4)$ und schneidet bekanntlich Φ, außer in K, in einer Raumkurve vierter Ordnung R_5; sie ist durch die Punkte $A_1, A_2, A_3, A_4, Q_{1,5}, Q_{2,5}, Q_{3,5}, Q_{4,5}$ festgelegt: nach Vertauschung von A_4 und A_5 gelangt man zu einer zweiten Fläche F_4, welche ebenfalls K und (A_1, A_2, A_3) enthält. Sie hat außer K mit Φ eine Raumkurve R_4 vierter Ordnung gemein, die $A_1, A_2, A_3, A_5, Q_{1,4}, Q_{2,4}, Q_{3,4}, Q_{4,5}$ aufnimmt.

Man wähle jetzt auf R_5 die Punkte $0_1, 0_2, 0_3, 0_4$, auf R_4 die Punkte $0_5, 0_6, 0_7$ beliebig aus und betrachte das Fachwerk, das die fünf Stäbe erster Art $0A_1, 0A_2, 0A_3, 0A_4, 0A_5$ enthält, sodann 16 Stäbe, deren jeder einen der Punkte $0_1, 0_2, 0_3, 0_4$ mit einem der Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 verbindet, endlich 12 Stäbe, deren jeder einen der Punkte $0_5, 0_6, 0_7$ mit einem der Punkte A_1, A_2, A_3, A_5 verbindet. Es enthält also 13 Knotenpunkte und $33 = 5 + 16 + 12 = 3.13 - 6$ Stäbe. Jede der sieben Hauptgruppen

$$P_{1,\beta}\,P_{2,\beta}\,P_{3,\beta}\,P_{4,\beta}\,P_{5,\beta} \qquad (\beta = 1, 2, \cdots, 7)$$

besteht aus Kräften, die auf 0_β wirken, und zwar reduziert sich $P_{5,\beta}$ für $\beta = 1, 2, 3, 4$ auf Null, hingegen $P_{4,\beta}$ für $\beta = 5, 6, 7$. Alle sieben Hauptgruppen liegen also vor. Offenbar nimmt (61.) die Grenzfläche des Fachwerks die Raumkurven vierter Ordnung R_5 und R_4 auf, da die erste durch $0_1, 0_2, 0_3, 0_4, A_1, A_2, A_3, A_4$, die zweite durch $Q_{4,5}, 0_5, 0_6, 0_7, A_1, A_2, A_3, A_5$ festgelegt wird. 0_4 muß also verschieden von dem notwendigen Punkte sein, den die sieben anderen Punkte der ersten Folge bestimmen, und eine ähnliche Regel gilt für die Wahl von $0_5, 0_6, 0_7$. In einem Kegelschnitt K der Grenzfläche schneiden sich nun nach den obigen Entwicklungen zwei Oberflächen zweiter Ordnung, die R_4 und R_5 enthalten und die Ebene $A_1A_2A_3$ in demselben $A_1, A_2, A_3, Q_{4,5}$ aufnehmenden Kegelschnitte treffen. Diese Konstruktion gilt aber für jeden Kegelschnitt von Φ, dessen Ebene die Hauptgerade enthält; Φ fällt also mit der Grenzfläche zusammen.

64. Man leite die Grenzfläche Φ aus sieben voneinander unabhängigen Gruppen unserer Mannigfaltigkeit ab, hierauf ersetze man die siebente Gruppe durch die Hilfsgruppe $P_{1,0}\,P_{2,0}\,P_{3,0}\,P_{4,0}\,P_{5,0}$ und suche (XIVa.) die Grenzfläche Φ' auf. Ist 0 ein Schnittpunkt von Φ und Φ', so tragen $0A_1, 0A_2, 0A_3, 0A_4, 0A_5$ eine Gruppe, die sich aus den sieben gegebenen Gruppen zusammensetzen läßt und eine Gruppe, die sich aus den sechs ersten von ihnen und der Hilfsgruppe zusammensetzen läßt. Unzählig viele Gruppen der erweiterten Mannigfaltigkeit tragen die Strahlen $0A_1$, $0A_2, 0A_3, 0A_4, 0A_5$, wenn jene beiden Gruppen voneinander verschieden sind. Dann gehört (62.) 0 dem Kegelschnitt K an. Für einen Punkt der Raumkurve siebenter Ordnung $C^{(7)}$, die Φ und Φ' außer K miteinander gemein haben, fällt notwendig die zweite mit der ersten Gruppe zusammen; sie ist aus den sechs ersten Gruppen allein zusammengesetzt. Die beiden Hauptgeraden von Φ und Φ' treffen sich, da sie beide in der Ebene des Kegelschnittes K liegen, in einem Punkte von $C^{(7)}$, ihrem »Hauptpunkte«. Mit dem Kegelschnitt K hat sie deshalb sechs Punkte gemein; auch jede

andere, den Hauptpunkt enthaltende Ebene trifft $C^{(7)}$ in sechs Punkten, die auf einem Kegelschnitt liegen. Dies wird ersichtlich, sobald man alle zu den sechs ersten Gruppen gehörigen Grenzflächen einführt und benutzt, daß sich ihre Hauptgeraden in dem Hauptpunkte von $C^{(7)}$ treffen.

Zu irgend sechs voneinander unabhängigen Gruppen unserer Mannigfaltigkeit gehört eine Kurve $C^{(7)}$, die auf verschiedene Arten zerfallen kann, z. B. in die Raumkurve R_5 und einen beliebigen, A_5 enthaltenden ebenen Schnitt der Grenzfläche. Aus irgend sechs Gruppen läßt sich also **eine** Gruppe ableiten, deren Kräfte auf einen Punkt der Hauptgeraden wirken. Man kann daraus schließen, daß aus zwei solchen speziellen Gruppen alle übrigen sich zusammensetzen lassen. Da man (XXIII.) jede Gerade zur Hauptgeraden machen kann, so folgt beiläufig:

XXIV. *Verbindet man jeden der Punkte A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 mit drei Punkten 0_1, 0_2, 0_3 einer Geraden, so entsteht ein in sich einspannbares Stabwerk von acht Knotenpunkten und 15 Stäben*[1]. *Der Index ε der Einspannung ist gleich 3.*

65. Aus sechs Gruppen unserer Mannigfaltigkeit lassen sich drei voneinander unabhängige Gruppen zusammensetzen, bei denen A_5 unbeansprucht bleibt; $C^{(7)}$ hat also mit R_5 im allgemeinen außer A_1, A_2, A_3, A_4 noch vier Punkte gemeinsam. Eine leichte Betrachtung zeigt, daß zwei verschiedene Kurven $C^{(7)}$ außer A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 noch zehn reelle oder nicht reelle Punkte miteinander gemein haben. Aus fünf voneinander unabhängigen Gruppen unserer Mannigfaltigkeit kann man also zehn Gruppen zusammensetzen, bei deren jeder alle fünf Kräfte auf einen Punkt wirken. Man schließt hiernach (56.):

XXV. *Ein Fachwerk von n Knotenpunkten und $3n-6$ Stäben besitze hinsichtlich eines fünfstäbigen Knotenpunktes, der die Stäbe $0A_1$, $0A_2$, $0A_3$, $0A_4$, $0A_5$ entsendet, eine Grenzfläche. Soll ein Stab entspannt bleiben, während das Fachwerk in sich eingespannt ist, so durchläuft 0 eine Raumkurve siebenter oder vierter Ordnung, je nachdem der Stab fest ist, oder von 0 ausgeht. Das Stabwerk der wirklich eingespannten Stäbe enthält im allgemeinen $\varepsilon_1 (\geq 1)$ Stäbe weniger, als ein statisch bestimmtes Fachwerk mit der gleichen Anzahl von Knotenpunkten. Entspannt man jetzt noch einen der bisher beanspruchten Stäbe, so hat man zehn oder vier Punkte oder nur einen Punkt der Grenzfläche zur*

---

[1] Die Art der Einspannung ist sehr leicht aus den Formeln (26.) zu erkennen.

Verfügung, je nachdem die beiden voneinander unabhängigen Stäbe fest sind, oder einer von ihnen von 0 *ausging, oder dies von beiden gilt. Das Stabwerk der jetzt noch eingespannten Stäbe enthält im allgemeinen* $\varepsilon_2 (\geqq 2)$ *Stäbe weniger, als ein statisch bestimmtes Fachwerk mit der gleichen Anzahl von Knotenpunkten. Dies gilt sicher, wenn alle fünf Punkte* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 *Stäbe des Stabwerks entsenden.*

In besonderen Fällen können statt der Kurven Flächen zweiter Ordnung und Ebenen eintreten, die der Grenzfläche angehören, statt der Punktgruppen aber Kurven, die einen Bestandteil von einer Kurve $C^{(7)}$ *oder* R_α *bilden.*

Jede der besonderen Raumkurven $C^{(7)}$ stützt sich auf sechs von den oben eingeführten Hauptgruppen. Sie enthält also alle Stäbe zweiter Art, wenn ein Stab dritter Art entspannt wird, oder alle bis auf einen, der ohne Spannkraft bleiben soll.

66. Aus den neun Hauptgruppen, die zur Definition der Grenzfläche Ψ eines Fachwerks hinsichtlich eines sechsstäbigen Knotenpunktes mit den Stützpunkten $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ dienen, kann man sechs voneinander unabhängige Gruppen ableiten, die A_6 unbeansprucht lassen, und deren drei, die A_5 und A_6 unbeansprucht lassen. Aus den sechs Gruppen ergeben sich unzählig viele andere, bei deren jeder alle fünf Kräfte auf einen Punkt 0 wirken. 0 durchläuft eine Raumkurve R_6 siebenter Ordnung der eben betrachteten Art, die Ψ angehört. Aus den drei Gruppen lassen sich vier andere zusammensetzen, bei deren jeder alle vier Kräfte auf einen Punkt wirken. Das Quadrupel dieser Punkte gehört nicht nur R_6, sondern auch der bei Ausscheidung von A_5 entstehenden Kurve R_5 an. Nehmen wir noch eine zehnte von den vorliegenden unabhängige Hauptgruppe hinzu, so treten an die Stelle von R_5, R_6 die Grenzflächen Φ_5, Φ_6 dritter Ordnung; anstatt des Quadrupels entsteht eine Raumkurve vierter Ordnung, die Φ_5 und Φ_6 miteinander gemein haben. Φ_5 und Φ_6 schneiden sich noch in einer zweiten Kurve $(A_1, A_2, \cdots, A_6)_0$ fünfter Ordnung. $0A_1, 0A_2, \cdots, 0A_6$ enthalten, sobald 0 auf dieser Kurve liegt, unzählig viele Gruppen der erweiterten Mannigfaltigkeit, so daß alle Flächen $\Psi, \Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_6$ die Kurve miteinander gemein haben. Es läßt sich leicht zeigen, daß sie auf einer Oberfläche zweiter Ordnung liegt; einer Geradenschar derselben gehören die Hauptgeraden der Flächen $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_6$ an. Die Hauptpunkte von $R_1, R_2, \cdots, R_6$ legen aber die Raumkurve dritter Ordnung fest, welche die Oberfläche zweiter Ordnung außer $(A_1, A_2, \cdots, A_6)_0$ mit der Fläche Ψ gemein hat. Wir bezeichnen sie als die Hauptkurve von Ψ.

Wirken die Kräfte einer Gruppe, die sich aus acht voneinander unabhängigen Gruppen der gegebenen Mannigfaltigkeit zusammensetzen läßt, auf einen Punkt 0, so durchläuft derselbe eine Raumkurve elfter Ordnung. Sie wird zusammen mit $(A_1, A_2, \cdots, A_6)_0$ auf Ψ von anderen Grenzflächen Ψ' ausgeschnitten.

Die Gleichung von Ψ ergab sich (48.) bei Elimination der $m+3$ Größen $u, u', u'', u_1, u_2, \cdots, u_m$, die nicht alle verschwinden, aus $m+3$ Gleichungen von der Form:

$$S_{\lambda,\mu} \equiv u X_{\lambda,\mu} + u' y_{\lambda,\mu} + u'' z_{\lambda,\mu} + u_1 S'_{\lambda,\mu} + u_2 S''_{\lambda,\mu} + \cdots + u_m S^{(m)}_{\lambda,\mu} = 0. \quad (31.)$$

Die $X_{\lambda,\mu}$ sind Formen zweiten Grades, $y_{\lambda,\mu}$ und $z_{\lambda,\mu}$ aber Formen ersten Grades der Größen x_1, x_2, x_3, x_4. Die Gleichungen stellen die eben erwähnte Raumkurve dritter Ordnung dar, wenn $u = 0$ gesetzt wird, dagegen die Raumkurven R_5 und R_6, wenn wir erst $u' = 0$, dann $u'' = 0$ setzen. Verschwinden u und u' zugleich, so wird der Hauptpunkt von R_5 dargestellt, ebenso der von R_6 bei den Annahmen $u = 0$ und $u'' = 0$. Setzen wir u_α gleich Null, so stellen die Gleichungen eine spezielle Kurve elfter Ordnung der erwähnten Art dar. Auf jeden Punkt derselben wirken die Kräfte einer Gruppe, die sich nach Ausscheidung der α^{ten}, aus den acht übrigen Hauptgruppen zusammensetzen läßt. Die Kurve enthält alle Hauptstäbe zweiter Art, wenn α nicht größer als l ist, alle Hauptstäbe zweiter Art bis auf einen, dessen Hauptgruppe ausscheidet, wenn α größer als l ist.

67. Die allgemeine Grenzfläche k^{ter} Ordnung enthält offenbar eine Hauptkurve der Ordnung $\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$, durch welche unzählig viele Oberflächen $(k-2)^{\text{ter}}$ Ordnung hindurchgehen. Jede von ihnen schneidet die Grenzfläche in einer Raumkurve $\frac{1}{2}(k+1)\,(k-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, durch welche man unzählig viele Flächen $(k-1)^{\text{ter}}$ und k^{ter} Ordnung legen kann. Sie schneiden auf der Grenzfläche Kurven $\frac{1}{2}(k^2-k+2)^{\text{ter}}$ und $\frac{1}{2}(k^2+k+2)^{\text{ter}}$ Ordnung aus, die zu der Hauptkurve nach wohlbekannten Theoremen über algebraische Flächen korresidual sind. Wir erhalten stets dieselben Kurvenscharen, welche Fläche $(k-2)^{\text{ter}}$ Ordnung wir auch durch die Hauptkurve legen mögen.

Soll bei der Einspannung des Fachwerks in sich einer der Stäbe $0A_1, 0A_2, \cdots, 0A_{k+2}$, etwa $0A_\alpha$, ohne Spannkraft bleiben, so durchläuft 0 eine der Kurven $\frac{1}{2}(k^2-k+2)^{\text{ter}}$ Ordnung; sie enthält von den $k+2$ Punkten $A_1, A_2, \cdots, A_{k+2}$ allein A_α nicht. Soll ein fester Stab des Fachwerks ohne Spannkraft sein, oder soll allgemeiner eine lineare homogene Gleichung

$$A_1 S_1 + A_2 S_2 + \cdots + A_\rho S_\rho = 0$$

für die Spannkräfte von irgend ρ festen Stäben bestehen, so bewegt sich 0 über eine der Kurven $\frac{1}{2}(k^2 + k + 2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche $A_1, A_2, \cdots, A_{k+2}$ enthält.

Inhaltsverzeichnis.

Seite
Übersicht über den Inhalt der Arbeit 3

I.—IV. Ebene Fachwerke.

I. (1.—10.) Diskussion von $2n-3$ Determinanten $(2n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, die zu einem Fachwerk von n Knotenpunkten und $2n-3$ Stäben gehören.

(1.) Einspannung eines Fachwerks von n Knotenpunkten und $2n-3$ Stäben durch äußere, im Gleichgewicht stehende Kräfte 5
(2., 3.) Beispiel eines Fachwerks aus 7 Knotenpunkten und 11 Stäben. Jedem Stabe ist eine Determinante 10^{ter} Ordnung zugeordnet. Sie nimmt dann und nur dann den Wert Null an, wenn das Fachwerk nicht mehr statisch bestimmt ist. Der allgemeine Fall: Theorem I. 6
(4., 5.) Ein Fachwerk von n Knotenpunkten und $2n-3$ Stäben wird instabil, wenn es nicht mehr statisch bestimmt ist: Theorem II. 10
(6.—8.) Die 11 Gleichungen der Grenzkurve des behandelten Beispiels hinsichtlich seines vierstäbigen Knotenpunktes 12
(9.) Übertragung der Resultate auf den allgemeinen Fall: Theorem III. 14
(10.) Ergänzung des Satzes vom Grenzkegelschnitt. Neuer Beweis des Satzes vom Pascalschen Sechseck: Theorem IV. 15

II. (11.—19.) Behandlung der Grenzkurven mittels eines Ersatzstabverfahrens.

(11., 12.) Die Grenzkurve eines statisch bestimmten Fachwerks hinsichtlich eines $(k+1)$-stäbigen Knotenpunktes hängt allein von k Hauptgruppen ab 17
(13.) Für jeden Punkt der Grenzkurve nimmt eine Determinante k^{ter} Ordnung den Wert Null an 19
(14.—17.) Eigenschaften der Grenzkurven. Regeln zur Ermittlung der Hauptgruppen 21
(18.) Konstruktion eines Grenzkegelschnittes des oben eingeführten Beispiels mittels seiner beiden Hauptgruppen 25
(19.) Allgemeine Regel zur Ermittlung eines Grenzkegelschnittes: Theorem V. . . . 26

III. (20.—29.) Die Kurve dritter Ordnung als Grenzkurve eines statisch bestimmten Fachwerks nach einem vierstäbigen Knotenpunkt.

(20., 21.) Ableitung von vier singulären — aus nur drei Kräften bestehenden — Gruppen aus den drei Hauptgruppen, die zur Festlegung der Grenzkurve eines vierstäbigen Knotenpunktes dienen 28
(22.) Bei der Ermittlung der Grenzkurve eines vierstäbigen Knotenpunktes kann das vorliegende Fachwerk durch ein Normalfachwerk von acht Knotenpunkten und 13 Stäben ersetzt werden: Theorem VI. 30

Seite
(23.) Ableitung der vierten singulären Gruppe aus den drei ersten. Ihre Auffindung mittels eines in sich einspannbaren Stabwerks von 8 Knotenpunkten und 12 Stäben: Theorem VII. 31
(24.) Bestimmung eines Grenzkegelschnittes des Normalfachwerks 31
(25.—27.) Festlegung der Grenzkurve eines Normalfachwerks nach einem vierstäbigen Knotenpunkt durch eine größere Anzahl von Punkten: Theoreme VIII.—VIIIc. 33
(28.) Projektive Erzeugungen der Grenzkurve 40
(29.) Die Grenzkurve mit Doppelpunkt 40

IV. (30.—34.) In sich einspannbare Stabwerke von $2n$ (dreistäbigen) Knotenpunkten und $3n$ Stäben.

(30.—32.) Durch Einflechtung von Seilpolygonen können in sich einspannbare Stabwerke gewonnen werden, die aus den Seiten und n Diagonalen eines $2n$-Ecks bestehen. Beispiele: Theoreme IX. und X. 42
(33.) In sich einspannbare Stabwerke, die aus den Seiten zweier n-Ecke und n Verbindungsstäben gebildet sind. Beispiel: Theorem XI. 47
(34.) k von einander unabhängige Hauptgruppen führen stets auf die Grenzkurve eines statisch bestimmten Fachwerks nach einem $(k+1)$-stäbigen Knotenpunkt: Theorem XII. 48

V.—IX. Raumfachwerke.

V. (35.—40.) Diskussion von $(3n-6)^2$ Determinanten $(3n-7)^{\text{ter}}$ Ordnung, die zu einem Raumfachwerk von n Knotenpunkten und $3n-6$ Stäben gehören.

(35.) Einspannung eines Fachwerks von n Knotenpunkten und $3n-6$ Stäben durch äußere, im Gleichgewicht stehende Kräfte. Aufstellung von $3n$ Gleichungen hierzu 49
(36., 37.) Diskussion der $3n-6$ Gleichungen, in denen eine der $3n-6$ Spannkräfte nicht vorkommt. Kennzeichen der statischen Bestimmtheit: Theorem XIII. . . 50
(38.) Ein Raumfachwerk von n Knotenpunkten und $3n-6$ Stäben ist instabil, wenn es nicht mehr statisch bestimmt ist 54
(39., 40.) Die $(3n-6)^2$ Gleichungsformen der Grenzfläche eines statisch bestimmten Fachwerks. Sie ist für einen $(k+2)$-stäbigen Knotenpunkt eine Fläche k^{ter} Ordnung: Theorem XIV. 55

VI. (41.—49.) Ermittlung der Grenzflächen eines statisch bestimmten Raumfachwerks durch ein Ersatzstabverfahren.

(41., 42.) Die Grenzfläche eines $(k+2)$-stäbigen Knotenpunktes hängt allein von seinen $2k+1$ Hauptgruppen ab. Regeln zu ihrer Ermittlung 57
(43.—48.) Für jeden Punkt der Grenzfläche nach einem $(k+2)$-stäbigen Knotenpunkt nimmt eine Determinante s^{ter} Ordnung $(s \leqq 3k)$ den Wert Null an. Eingehende Behandlung der besonderen Fälle $k=2$ (43.—45.) und $k=3$ (46., 47.) . . . 59
(49.) Eigenschaften der Grenzflächen: Theorem XIVa. 69

Seite

VII. (50.—57.) Die Oberfläche zweiter Ordnung als Grenzfläche eines statisch bestimmten Fachwerks nach einem vierstäbigen Knotenpunkt.

(50.—53.) In sich eingespannte Fachwerke ($n=5$) und Stabwerke ($n=4$, $n=3$) aus $4(n+1)$ Stäben, deren jeder einen der Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 mit einem der Punkte $0_0, 0_1, \ldots, 0_n$ verbindet. Konstruktion der durch neun Knotenpunkte festgelegten Oberfläche zweiter Ordnung als Grenzfläche (51.). Alle Knotenpunkte sind für $n=4$ oder $n=3$ Grundpunkte eines Büschels oder eines Bündels von Oberflächen zweiter Ordnung: Theoreme XV., XVI., XVII. 70

(54.) Die Grenzfläche eines allgemeinen Fachwerks nach einem vierstäbigen Knotenpunkt 77

(55.) Punkte der Grenzfläche, für welche eine Entspannung einzelner Stäbe dieses Fachwerks eintritt 78

(56., 57.) Erläuterung dieser Verhältnisse an der Grenzfläche eines $(k+2)$-stäbigen Knotenpunktes; Beispiel 79

VIII. (58.—60.) Die n-seitigen Doppelpyramiden als Fachwerke.

(58.) Die vierseitige Doppelpyramide: Theoreme XVIII., XIX. 81

(59.) Die fünfseitige Doppelpyramide: Theoreme XX., XXI. 83

(60.) Die n-seitige Doppelpyramide: Theorem XXII. 86

IX. (61.—67.) Die Grenzfläche eines statisch bestimmten Fachwerks nach einem fünfstäbigen Knotenpunkt. Hinweis auf den allgemeinen Fall.

(61., 62.) Die Grenzfläche (dritter Ordnung) eines statisch bestimmten Fachwerks nach einem fünfstäbigen Knotenpunkt enthält fünf Raumkurven vierter Ordnung erster Art, die zur »Hauptgeraden« der Fläche korresidual sind. Ableitung dieser Kurven aus den sieben Hauptgruppen des Knotenpunktes 86

(63.) Eine Fläche dritter Ordnung kann als Grenzfläche eines Fachwerks von 13 Knotenpunkten und 33 Stäben betrachtet werden, wenn man eine ihrer Geraden kennt: Theorem XXIII. 89

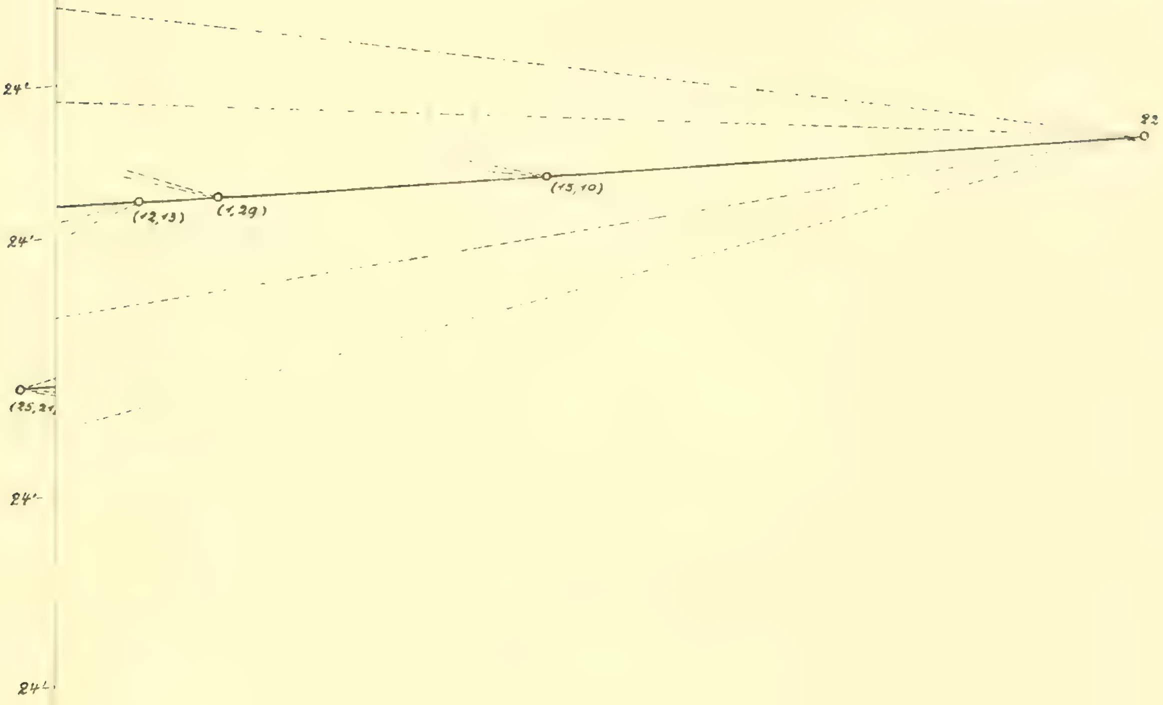
(64.) Erfüllen bei einem in sich eingespannten Fachwerk die Spannkräfte der festen Stäbe eine homogene lineare Gleichung, so beschreibt der fünfstäbige Knotenpunkt auf seiner Grenzfläche eine Raumkurve siebenter Ordnung, welche zur Hauptgeraden korresidual ist und sie in ihrem Hauptpunkte trifft: Theorem XXIV. 90

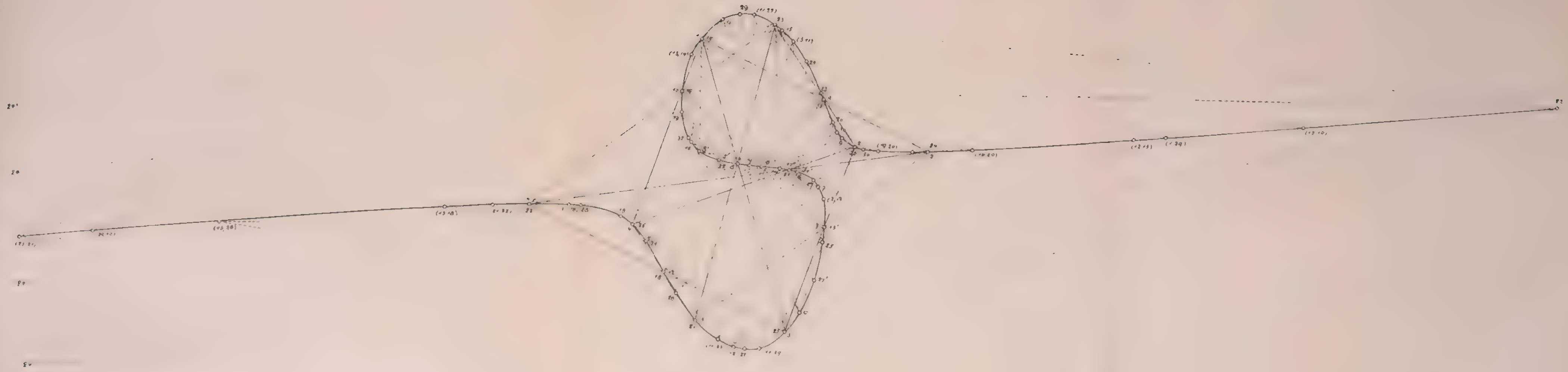
(65.) Besondere Einspannungen des Fachwerks: Theorem XXV. 91

(66.) Die Grenzfläche (vierter Ordnung) eines sechsstäbigen Knotenpunktes. Ihre Hauptkurve (dritter Ordnung) wird durch die Hauptpunkte von sechs zu ihr korresidualen Kurven siebenter Ordnung festgelegt 92

(67.) Die Grenzfläche eines $(k+2)$-stäbigen Knotenpunktes enthält eine Hauptkurve $\frac{1}{2}(k-1)$ $(k-2)^{\text{ter}}$ Ordnung. Zu ihnen korresiduale Kurven $\frac{1}{2}(k^2-k+2)^{\text{ter}}$ und $\frac{1}{2}(k^2+k+2)^{\text{ter}}$ Ordnung der Grenzfläche entsprechen speziellen Bedingungen für die Einspannungen der festen Stäbe 93

Inhaltsverzeichnis 95


24ᶜ
(12,13)
(1,29)
(15,10)
22
24'
(25,21
24'
24ᴸ



E. Kötter: Über Grenzfachwerke in der Ebene und im Raume.

Die Gesteine der Inseln S. Pietro und S. Antioco (Sardinien).

Von

Prof. Dr. ARRIEN JOHNSEN
in Kiel.

Vorgelegt von Hrn. Liebisch in der Sitzung der phys.-math. Klasse am 27. Juni 1912.
Zum Druck verordnet am 11. Juli 1912, ausgegeben am 26. Oktober 1912.

Einleitung.

Mit Unterstützung der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften wurden die Gesteine der Inseln S. Pietro und S. Antioco südwestlich von Sardinien während der Monate März und April 1909 an Ort und Stelle studiert und das gesammelte Material sodann petrographisch untersucht.

Der mikroskopischen Beobachtung dienten 100 Dünnschliffe. Das Laboratorium des Hrn. Prof. Dittrich in Heidelberg fertigte 15 quantitative Gesteinsanalysen an, 8 quantitative chemische und optische Feldspatanalysen wurden der Dissertation Herzenberg[1] entnommen.

Als kartographische Unterlage fungierten die geologischen Karten von La Marmora[2] (1 : 500 000) und von Bertolio[3] (1 : 100 000; nur S. Pietro) sowie die 5 Blätter der topographischen Carta d' Italia del istituto geografico militare (1 : 25 000; Florenz 1897).

Eine eingehende und vielseitige, jedoch in petrographischer Hinsicht jetzt veraltete Beschreibung beider Inseln verdankt man La Marmora (a. a. O.), der 2 Analysen eines Liparits der Insel S. Antioco von Delesse[4] mitteilt. Über S. Pietro veröffentlichte G. vom Rath[5] eine kurze petrographisch-geologische Reiseschilderung. Eigel[6] gab flüchtige Mitteilungen über seine mikroskopische und chemische Untersuchung einiger Gesteine von S. Pietro, und Rudler[7] beschrieb anhangsweise und kurz wenige Dünnschliffe von

---

[1] Herzenberg, Beiträge zur Kenntnis der Kalinatronfeldspäte. Dissert. Kiel 1911.

[2] La Marmora, Voyage en Sardaigne, Part. 3, T. 1, 2. Turin 1857. Atlas.

[3] Bertolio, Boll. R. Com. Geol. Ital. **27**. 420. Roma 1896. Taf. V.

[4] Delesse, Bull. Soc. géol. France (2) **11**. 108. Paris 1854.

[5] G. vom Rath, Sitzungsber. niederrhein. Gesellsch. f. Natur- u. Heilkunde **40**. 149. Bonn 1883.

[6] Eigel, Min. Petr. Mitt. **8**. 62. 1887.

[7] Halse, Transact. north of Engl. Inst. of mining and mechanical engineers **34**. 159. Newcastle upon Tyne 1884—85.

Gesteinen der gleichen Insel. Rosenbusch[1] machte seinen mikroskopischen Befund und eine Analyse des Comendit von Comende (S. Pietro) bekannt.

Eingehendere moderne Studien hat lediglich Bertolio[2] über S. Pietro publiziert.

Auf Grund mikroskopischer Studien und mehrerer, allerdings nicht ganz einwandfreier Analysen unterscheidet Bertolio auf S. Pietro Comendite, deren Typus er in der Gegend Comende entdeckte, ferner »rötliche Trachyte«, »glasige Trachyte mit schwarzen Einschlüssen«, »Trachyte mit Oligoklas« und schließlich »Tuffe nebst Breccien«; auch schildert er die Lagerung dieser Gesteinsarten, diskutiert ihr Altersverhältnis und entwirft eine Karte ihrer Verbreitungsgebiete.

In der folgenden Arbeit über die Inseln S. Pietro und S. Antioco habe ich versucht, besonders durch quantitative Untersuchung der Gesteine und ihrer Gemengteile, diese von Bertolio gelieferte Beschreibung der ersteren Insel zu vervollständigen.

Wegen der vielfachen Ähnlichkeit beider Inseln würde eine geographische Zweiteilung des Folgenden unzweckmäßig sein; daher umfaßt auch meist ein petrographischer Typenname Gesteine beider Gebiete.

Alle folgenden Ortsnamen findet man auf der Kartenskizze und in den zugehörigen Erläuterungen. Bei Beschreibung der petrographischen Typen sind stets die Orte des anstehenden Gesteins genannt.

Petrographische Beschreibung.

Comendite.

a. Typus Comende

(Mikrophoto s. Taf. I, Fig. 1 nebst Erläuterung).

Comendite von Le Comende, Le Bocchette und Guardia dei Mori auf S. Pietro sind im frischen Zustand helle, weiß und blaugrün gesprenkelte, feinkörnige bis kleinkörnige Gesteine von großer Festigkeit und Kompaktheit, ohne schlierige, fluidale und drusige Texturen. Zuweilen bemerkt man eine dunkelgraue, dichte, hornfelsartige, 1 cm dicke Rinde, der jedoch die Feldspat- und Quarzeinsprenglinge keineswegs fehlen.

---

[1] H. Rosenbusch, Mikrosk. Physiogr. 2. 839. 1908, und Gesteinslehre 1910. 332.

[2] Bertolio, Boll. R. Com. Geol. Ital. **25**. 407. Roma 1894, und **27**. 181, 405. 1896 sowie Atti R. Accad. Linc., Rendic. (5) 4, 2. Sem. 48. Roma 1895, und (5) **5**. 150. 1896, ferner Bull. Soc. géol. France **24**. 496. Paris 1896.

Die Feldspateinsprenglinge irisieren stets auf $\{\bar{8}01\}$ etwa und zerfallen parallel dieser Fläche äußerst leicht in viele bis herab zu 0.5 mm dünne Täfelchen. Ihr Durchmesser bleibt meist unter 4 mm und geht selten über 10 mm hinauf. Sie zeigen $\{010\}$, $\{001\}$, $\{\bar{2}01\}$, $\{110\}$, $\{130\}$, $\{021\}$ und sind mehr oder weniger tafelig $\parallel \{010\}$ und oft nach c' (sehr selten nach (021)) verzwillingt, wobei die Verwachsungsfläche annähernd eben und $\parallel \{010\}$ ist. Eine außerhalb der Messungsfehler von $\pm 5'$ liegende Abweichung des $\measuredangle (010):(001)$ von 90° ergab das Reflexionsgoniometer an Spaltungsstücken niemals, während diese Abweichung bei Anorthoklasen mindestens 29′ betragen soll[1]. Dementsprechend ist auch der Auslöschungswinkel Θ_{001}, gemessen gegen [100], stets 0°, während auf $\{010\}$ von Herzenberg[2] mittels Mikroskops und vierfacher Quarzplatte nach Bertrand-Soleil (Gelb 1. Ordnung) bei Natriumlicht gemessen wurde:

1. $\Theta_{010} = +8°\,32' \pm 5'$ (Comende),
2. » $= +8\;\;10 \pm 5$ (Bocchette),
3. » $= +9\;\;17 \pm 5$ (Guardia dei Mori).

Die optische Achsenebene fand ich stets $\perp \{010\}$ und die Dispersion der optischen Achsen dementsprechend $\rho > v$ wie bei Adular. Die Mikroreaktion von 2. mit HF gab viel Na_2SiF_6 und K_2SiF_6, wenig $CaSiF_6$, dessen Nadeln übrigens, was in der Literatur anscheinend nirgends erwähnt ist, $\mathfrak{c}$ parallel der Längsrichtung (im Gegensatz zu Na_2SiF_6) haben.

Die Analysen dieser 3 Feldspäte von Herzenberg (a. a. O.), die nur mit sehr kleinen Einwagen angefertigt werden konnten, im übrigen aber sehr sorgfältig ausgeführt sind, ergaben

	1	2	3
SiO_2	67.74	66.05	67.71
Al_2O_3	17.18	17.22	16.96
Fe_2O_3	1.44	2.16	1.69
MgO	—	0.30	—
CaO	0.40	0.40	—
Na_2O	6.22	6.46	6.24
K_2O	6.13	5.86	6.22
Summa	99.11	98.45	98.82

---

[1] Rosenbusch-Wülfing, Mikrosk. Physiogr. d. Miner. **2.** 326. 1905.

[2] Herzenberg, Beiträge zur Kenntnis der Kalinatronfeldspäte. Dissert. Kiel 1911.

Hieraus ergeben sich folgende Molekularprozente:

	1	2	3
Orthoklas	38.5	37.0	40.0
Albit	59.5	61.0	60.0
Anorthit	2.0	2.0	0.0
Summa	100.0	100.0	100.0

Diesen Verhältnissen von (Albit + Anorthit) : Orthoklas < 2 entspricht erfahrungsgemäß instabil-monokline Symmetrie, die durch langsame Entmischung obiger zwei Komponenten in die stabil-trikline übergeht; das Irisieren dürfte den Beginn dieser Entmischung andeuten. Übrigens findet man in den Feldspateinsprenglingen dieser Gesteine oft auch Entmischung von $(Al, Fe)_2O_3$, wobei sich die Fe-Feldspatkomponente zersetzt und das frei werdende Fe_2O_3 die Kristalle bräunt; hierbei vermindert sich das Irisieren anscheinend nicht. Der Grundmassefeldspat zeigt diese Bräunung nie, weil offenbar alles verfügbare Fe_2O_3 von den zuerst gebildeten Feldspäten aufgenommen wurde; so gibt ja auch nach Day und Allen[1] eine durch etwas Fe_2O_3 verunreinigte Plagioklasschmelze bei der Ausscheidung von Plagioklasen sogleich fast alles Fe_2O_3 an diese ab.

Bertolio[2] gibt irisierenden Anorthoklas mit der Dichte 2.58—2.59 und folgender Zusammensetzung an: SiO_2—66.1, Al_2O_3—18.2, CaO—0.1, Na_2O—11.4, K_2O—3.5, Sa.—99.3. Das ergäbe 18 Mol.-Prozent Orthoklas + 82 Mol.-Prozent Albit, also Albit : Orthoklas > 4; dieses Verhältnis würde wie alle diejenigen, die > 2, erfahrungsgemäß in die Anorthoklasreihe fallen, und lediglich hierauf gründet sich anscheinend Bertolios Bestimmung als Anorthoklas. Da jedoch sämtliche Analysenangaben Bertolios einen im Vergleich mit unsern Gesteinsanalysen sowie Herzenbergs Feldspatanalysen abnorm großen Überschuß von Na_2O über K_2O aufweisen und ich überdies in keinem dieser Comendittypen von S. Pietro und S. Antioco Anorthoklas auffand (im Gegensatz zu den folgenden Lipariten, deren Anorthoklas aber viel CaO reicher ist als Bertolios), so müssen wir von Bertolios Anorthoklas vollständig absehen.

Als mittlere Dichten von je 3 homogenen Feldspatspaltungsstücken wurden mittels Suspension in Thouletlösung und Mohrscher Wage erhalten:

	1	2	3
Herzenberg	2.575	2.582	2.585
Johnsen	—	2.582	—

Berechnet man die Dichten dieser Mischkristalle 1, 2 und 3 unter Annahme additiven Verhaltens der spezifischen Volumina aus

$D = 2.57$ (Goldschmidt, Adular-Schweiz),
$D = 2.62$ (Becke, Albit-Amelia),
$D = 2.75$ (Fouqué, Anorthit-Vesuv),

---

[1] Day und Allen, Amer. Journ. Science **19**, 93, 1905.

[2] Bertolio, Boll. Com. Geol. Ital. **27**, 405, Roma 1896; Rendiconti R. Accad. Linc. (5) **5**, 2. Sem., 4. Fasc., 150, Roma 1896.

so ergeben sich durchweg — ebenso wie bei den Natronsanidinen aller weiter unten folgenden Gesteine — höhere Werte:

1	2	3
2.601	2.603	2.598

Es scheint also bei der Vermischung von Orthoklas und Plagioklas zu monoklinen Mischkristallen eine Dilatation einzutreten oder, wie man wohl ebensogut sagen darf: die instabile monokline Modifikation von Kalknatronfeldspat hat eine geringere Dichte als die stabile trikline.

Dem Natronsanidin 3 von Guardia dei Mori, der übrigens dem Vogtschen[1] Orthoklas-Albit-Eutektikum (42 : 58) sehr nahesteht und wohl eben deswegen keine Zonarstruktur zeigt, ist anscheinend verwandt ein solcher aus einem Tuff des benachbarten Porto Scuso (Südwestküste von Sardinien), den Fouqué[2] und Riva[3] chemisch und optisch untersuchten; sie haben ihn zwar als Anorthoklas gedeutet, doch scheint nur etwas trikliner Feldspat orientiert eingewachsen gewesen zu sein. Formen: $\{010\}$, $\{001\}$, $\{\bar{1}01\}$, $\{\bar{2}01\}$, $\{110\}$, $\{130\}$, $\{\bar{1}11\}$ und tafelig $\|$ $\{010\}$ oder auch gestreckt $\|$ c'; $D = 2.582$; $\alpha_{\mathrm{Na}} = 1.5239$, $\beta_{\mathrm{Na}} = 1.5291$, $\gamma_{\mathrm{Na}} = 1.5303$, $2V_{\mathrm{Na}} = 51^\circ 11'$ oder (an andern Kristallen) $\alpha_{\mathrm{Na}} = 1.5224$, $\beta_{\mathrm{Na}} = 1.5280$, $\gamma_{\mathrm{Na}} = 1.5290$, $2V_{\mathrm{Na}} = 45^\circ 41'$; $\Theta_{001} < 1^\circ$, $\Theta_{010} = +9^\circ$; $SiO_2 - 68.3$, $Al_2O_3 - 19.5$, $Na_2O - 7.1$, $K_2O - 5.7$, Summe — 100.6. Das ergibt 34.5 Mol.-Prozent Orthoklas + 65.5 Mol.-Prozent Albit.

Bemerkenswert erscheint die große Auslöschungsschiefe dieser beiden CaO-freien Natronsanidine (Guardia dei Mori und Porto Scuso) auf $\{010\}$, nämlich $\Theta_{010} \geqq 9^\circ$, während z. B. der CaO-reichste ($CaO = 2.50$ Prozent) Natronsanidin unsrer Gesteine, nämlich der später zu beschreibende des Liparittyps »Birincampo«, die kleinste aller von uns beobachteten Schiefen, nämlich $\Theta_{010} = +6^\circ 56'$, bei folgender Zusammensetzung hat: 43.0 Mol.-Prozent Orthoklas + 43.0 Mol.-Prozent Albit + 14.0 Mol.-Prozent Anorthit. Nimmt man für reinen Kalifeldspat $\Theta_{010} = +7^\circ$ und für einen Oligoklas mit 80 Mol.-Prozent Albit + 20 Mol.-Prozent Anorthit den gleichen Wert $\Theta_{010} = +7^\circ$ an, so wird der Schluß naheliegen, daß diejenigen Plagioklase, welche albitreicher sind als dieser Oligoklas und daher eine größere positive Auslöschungsschiefe auf $\{010\}$ besitzen, durch ihre Vermischung mit Kalifeldspat obige Normalschiefe desselben vergrößern, dagegen diejenigen Plagioklase, die anorthitreicher sind als jener Oligoklas und daher eine kleinere positive (oder gar eine negative) Auslöschungsschiefe auf $\{010\}$ haben, die genannte positive Normalschiefe des Kalifeldspats verkleinern und bei steigendem Anorthitgehalt sogar in eine negative verwandeln können; letzteres, d. h. negative Schiefe, zeigt sich infolge der hierzu nötigen großen Anorthitmenge nur in triklinen Mischungen, wie z. B. unten in dem Kaliplagioklas des Liparittyps »Birincampo«.

---

[1] I. H. L. Vogt, Min. Petr. Mitt. **24**. 524. 1905.

[2] Fouqué, Bull. Soc. minér. France **17**. 409. 1894.

[3] Riva, Zeitschr. f. Krist. **35**. 274. 1902.

Die Quarzeinsprenglinge dieses Comendittyps *a* (Comende) bilden rauchbraune bis farblose Dihexaeder mit etwas gerundeten Kanten und Ecken; ihr Durchmesser bleibt meist unter 2 mm und geht sehr selten über 3 mm hinauf. Zuweilen zeigen sich im Dünnschliff mehrere Quarzkörner aggregiert, zuweilen auch mehrere Feldspatkristalle, jedoch nie Quarz + Feldspat, so daß sich das Altersverhältnis beider nicht wohl ermitteln läßt. Nach Vogt[1] ist das Eutektikum von Quarz : Orthoklas = 27.5 : 72.5 und ebenso dasjenige von Quarz : Albit = 27.5 : 72.5; daß dasselbe durch Hinzutritt von Anorthit erheblich verschoben wird, spielt in diesen anorthitarmen Gesteinen keine Rolle, auch der farbige Gemengteil ist wohl zu geringfügig. Die weiter unten folgenden 2 Gesteinsanalysen und ihre mineralogische Auswertung ergeben im einen Fall einen gewaltigen Feldspatüberschuß, im andern einen merklichen Quarzüberschuß über das eutektische Verhältnis, das auch von Tschirwinsky[2] = 28 : 72 gefunden wurde. Hiernach dürfte die Kristallisation des Feldspates bald vor, bald nach derjenigen des Quarzes eingesetzt haben.

Die blaugrünen Putzen, die jüngste magmatische Ausscheidung, sind einheitliche, aber unregelmäßig umgrenzte Kristalle von Arfvedsonit mit Durchmessern von 0.5—1.0 mm; er zeigt u. d. M. bei 30 μ Dicke den Pleochroismus 𝔞 tiefblau, 𝔟 gelblichgrün, 𝔠 dunkelbraunviolett; manche Schnitte haben ein an Glaukophan erinnerndes Violblau; $\measuredangle\, \mathfrak{a} : c' = 5—8°$ mit nicht zu ermittelndem Vorzeichen und $\mathfrak{c} \parallel [010]$, also normalsymmetrischer Achsenebene, was bisher nur an den Fe_2O_3-reicheren Riebeckiten und Crossiten beobachtet wurde und was Bertolio an jenem Amphibol entging. Ferner ist $\measuredangle\, \mathfrak{a}_\rho : c' < a_v : c'$, wie auch Kreutz[3] an Arfvedsonit und Mügge und ich am Riebeckit von El Paso (Colorado) fanden, während Rosenbusch[1] für Riebeckit die entgegengesetzte Dispersion angibt und desgleichen Freudenberg[1] für seine Hornblenden des Shonkinit vom Katzenbuckel (Odenwald). Übrigens fand ich am Riebeckit des Trachyts von Berkum 𝔟 ‖ [010], also parallelsymmetrische Achsenebene, so daß sowohl Arfvedsonit wie Riebeckit bald diese, bald jene der beiden Orientierungen zeigen.

---

[1] Vogt, Min. Petr. Mitt. **25**. 385. 1906.

[2] P. Tschirwinski, Quantitative mineralogische und chemische Zusammensetzung der Granite und Greisen. Moskau 1911 (russisch), deutsches Resumé S. 605.

[3] St. Kreutz, Sitzungsber. Wien. Akad. Wiss. math. phys. Kl. **117**. 887. 1908.

Die Doppelbrechung unseres Arfvedsonits ist äußerst gering und ergibt zusammen mit der sehr starken Absorption zwischen gekreuzten Nicols eigentümliche bronzefarbene Töne. Zuweilen verwächst regelmäßig mit diesem Arfvedsonit eine wohl katophoritische Hornblende von höherer Doppelbrechung, mit 𝔠 : $c' = 17°$ (+ oder — ?), 𝔞 hellbraun, 𝔟 schwarz, 𝔠 dunkelolivgrün und 𝔟 ‖ $\bar{b}$; hierbei bildet bald dieser, bald jener Amphibol den Saum.

An dem Arfvedsonit fand Bertolio die Dichte $D > 3.33$ und die Formen $\{110\}$, $\{001\}$, $\{010\}$, $\{\bar{1}11\}$, Habitus zuweilen tafelig ‖ $\{010\}$ und Prismenwinkel etwas über 123°; ich fand $\measuredangle\,(110):(1\bar{1}0) = 55°45' \pm 3'$ an Spaltflächen.

Bertolios Analyse des Arfvedsonits von Comende ergab die Gewichtsprozente I, woraus man die Molekularprozente II erhält:

	I	II
SiO_2	49.10	55.19
Al_2O_3	5.50	3.63
Fe_2O_3	4.20	1.77
FeO	27.70	25.94
MnO	0.50	0.47
MgO	0.17	0.28
CaO	0.13	0.16
Na_2O	10.50	11.42
K_2O	1.60	1.14
Summa	99.40	100.00

Soellner[2] deutet diesen Arfvedsonit (1.), den Ainigmatit von Grönland (2.) und seinen Cossyrit von Pantelleria (3.) wie folgt:

		1	2	3
Mol.	$\overset{''}{R}\overset{'''}{R}_2SiO_6$	12	2	2
	$(\overset{''}{R},\overset{'}{R}_2)_2SiO_4$	4.5	8	15
	$(\overset{''}{R},\overset{'}{R}_2)_2Si_3O_8$	34.5	12	23

---

[1] Rosenbusch-Wülfing, Mikrosk. Phys. **2.** 245, 247. 1905.

[2] J. Soellner, Zeitschr. f. Krist. **46.** 558. 1909.

Es ergeben also hiernach 3 Molekülarten in wechselndem Verhältnis gemischt, obige 3 Amphibolarten, unter denen der Arfvedsonit von Comende am reichsten an Trisilikaten und Alumosilikaten, am ärmsten an Orthosilikaten ist; im Hinblick hierauf mag jedoch hervorgehoben werden, daß unser schwammiger Arfvedsonit u. d. M. von winzigen Quarzen und Feldspäten reichlich durchspickt erscheint.

U. d. M. zeigen die Feldspateinsprenglinge zuweilen unregelmäßige Flecken von etwas abweichender Interferenzfarbe und Auslöschungsrichtung, aber sehr selten eine kleine nach dem Albitgesetz lamellierte Partie, oft zackige Ränder und in der äußersten Schicht zuweilen Einschlüsse von Quarzkörnchen — beides wohl infolge von Fortwachsung zu einer Zeit, als die Grundmasse mindestens zum Teil bereits kristallin war. Die Quarze weisen öfters orientierte Aureolen auf, die einen rauhen Außenrand besitzen und durch ihre feinen Grundmasseeinschlüsse gegen den klaren Kern abstechen, der hier und da einen größeren Grundmasseeinschluß von Dihexaederform birgt.

Die Grundmasse stellt ein Aggregat von Sanidin und Quarz dar; auch dieser Quarz bildet meist idiomorphe, etwas gerundete Dihexaeder, häufig mit feinsten zonar geordneten Körnchen, die wohl entglastes Glas repräsentieren. Die Quarze 2. Generation haben Durchmesser von 0.05 mm an abwärts, selten über 0.1 mm (mit Okularschraubenmikrometer gemessen). Das Sanidin, durchschnittlich von geringerer Größe als der Quarz, tritt zum Teil in Leisten || [100] oder in Tafeln || {010} und in letzterem Falle nach dem Karlsbader Gesetz verzwillingt, zum Teil allotriomorph auf. Die Grundmassenstruktur nähert sich also der panidiomorphen. Außer einem Teil des Feldspats ist nur der Arfvedsonit, dieser aber fast durchweg, heteromorph; seine schwammigen Massen sind wie die Arfvedsonite oder die Riebeckite der unsern Gesteinen chemisch äußerst nahestehenden Paisanite vom Paisano-Paß und vom Mosquez-Cañon in Westtexas sowie derjenigen von Mynydd Mawr in Wales vielfach durchlocht und von Quarz- und Feldspatkriställchen durchspickt. Hinzu treten spärliche Flitter von farblos bis hellgelb pleochroitischem Glimmer, der etwas Ilmenit einschließt, welcher seinerseits kleine dichte Aggregate von Titanomorphit ausgeschieden hat. Die äußerste Spärlichkeit von primärem Titanit ist typisch für unsere Comendittypen wie Liparittypen; im allgemeinen fehlt ja der Titanit sowohl den sauersten wie den basischsten Eruptivgesteinen, während er in den syenitischen und dioritischen Magmen und bemerkenswerterweise ebenso in den diesen analogen Gesteinen der Alkalireihe fast stets auftritt.

In dem Comendit von Guardia dei Mori vollziehen sich Strukturübergänge zu den beiden folgenden Comendittypen, in dem die Grundmasse vielfach ein Pflaster unregelmäßig umgrenzter Quarzkörnchen darstellt, die von kreuz und quer liegenden Feldspatleistchen (|| [100] gestreckt) durchsetzt sind, und zwar oft so reichlich, daß man die optische Einheitlichkeit des Wirtes kaum mehr erkennt.

Von diesem Comendittyp liegen 2 Analysen vor, 1. von Bertolio (a. a. O.), 2. von Rosenbusch[1].

	1	2
SiO_2	68.5	74.76
TiO_2	—	—
Al_2O_3	14.5	11.60
Fe_2O_3	1.0	3.50
FeO	3.0	0.19
MgO	0.1	0.18
CaO	—	0.07
Na_2O	9.2	4.35
K_2O	3.0	4.92
Glühverlust	—	0.64
P_2O_5	—	—
Summa	99.3	100.21

Die Analyse 2 ergab TiO_2 und P_2O_5 in Spuren

Hieraus erhält man nach Osanns Verfahren folgende Molekularprozente:

	1	2
SiO_2	75.4	81.68
Al_2O_3	9.4	7.45
Fe_2O_3	0.4	0.58
FeO	2.7	1.88
MgO	0.2	0.30
CaO	—	0.08
Na_2O	9.8	4.60
K_2O	2.1	3.43
Summa	100.0	100.00

	1	2
S	75.4	81.68
A	11.9	8.03
C	0.0	0.00
F	0.8	2.26
k	1.0	1.62
n	8.2	5.7
a	19.0	15.5
c	0.0	0.0
f	1.0	4.5
Alkalireihe	α	β
An Al_2O_3	ungesättigt	ungesättigt

Dieses Ungesättigtsein an Al_2O_3, das auf Alkali-Amphibole oder -Pyroxene hinweist, ist charakteristisch für Comendite und Pantellerite wie

---

[1] Rosenbusch, Gesteinslehre 332. 1910.

überhaupt für Alkaligesteine und findet sich nie in der Alkalikalkreihe Rosenbuschs.

Als Durchschnittsfeldspat ergibt sich für 1., wenn man die 2.5 Mol.-Prozent Alkali, die im Überschuß über Al_2O_3 und daher an das Fe des Arfvedsonits zu binden sind, als Na_2O annimmt, was durch den geringen K_2O-Gehalt des Arfvedsonits (1.60 Prozent gegenüber 10.50 Prozent Na_2O) gerechtfertigt wird, 22.5 Mol.-Prozent Orthoklas + 77.5 Mol.-Prozent Albit, was mit der oben mitgeteilten Feldspatanalyse Bertolios gut übereinstimmt; doch hat Bertolio vielleicht bei dieser Gesteinsanalyse ebenso wie bei jener Feldspatanalyse den Na_2O-Betrag auf Kosten des K_2O-Betrages zu hoch bestimmt, wofür außer unsern obigen Feldspatuntersuchungen auch Rosenbuschs Comenditanalyse (2) spricht. Aus letzterer ergibt sich als Durchschnittsfeldspat

47.5	Mol.-Prozent	Orthoklas
52.0	»	Albit
0.5	»	Anorthit
100.0	Mol.-Prozent	Summa

Da Herzenbergs obige Analyse der Feldspateinsprenglinge dieses Comendits von Comende

38.5	Mol.-Prozent	Orthoklas
59.5	»	Albit
2.0	»	Anorthit
100.0	Mol.-Prozent	Summa

ergab, so scheinen die Feldspäte der Grundmasse etwas ärmer an Albit und vor allem an Anorthit zu sein als die Einsprenglinge, was ja der bekannten Erfahrung entspricht. Schätzt man die Masse der Grundmassefeldspäte auf das Doppelte derjenigen des Einsprenglingsfeldspats, so erhält man als Zusammensetzung der ersteren:

52.0	Mol.-Prozent	Orthoklas
48.0	»	Albit
0.0	»	Anorthit
100.0	Mol.-Prozent	Summa

Aus obigen Oxydmolekülprozenten erhält man folgende Mineralmolekülprozente:

		1	2
Orthoklas $K_2Al_2Si_6O_{16}$		16.8	27.44
Albit $Na_2Al_2Si_6O_{16}$		58.4	31.52
Anorthit $CaAl_2Si_2O_8$		—	0.32
Quarz SiO_2		11.1	33.33
Arfvedsonit	$\overset{''}{Fe}\overset{'''}{Fe}_2SiO_6$	1.2	1.74
	$(Fe, Mg, Na_2)_2Si_3O_8$	10.0	4.52
	Summa	97.5[1]	98.87

---

[1] Die Differenzen gegenüber 100 erklären sich daraus, daß die eine Arfvedsonitkomponente in ihrer Formel den Ausdruck $(FeO, MgO, Na_2O)_2$ führt, während die zur Berechnung verwendeten Oxydmolekülprozente die nicht verdoppelten Molekeln FeO, MgO Na_2O betreffen.

Nach Bertolios Arfvedsonitanalyse würden die beiden Arfvedsonitkomponenten $\overset{''}{Fe}\overset{'''}{Fe}_2SiO_6$ und $(\overset{''}{Fe}, Mg, Na_2)_2Si_3O_8$ in dem Molekularverhältnis 1.74 : 5.00 statt 1.74 : 4.52 stehen, welch letzteres wir soeben aus Rosenbuschs Comenditanalyse (2.) berechneten, was eine gute Übereinstimmung bedeutet, während Bertolios Comenditanalyse (1.) für jene Proportion den stark abweichenden Wert 1.2 : 10.0 ergibt.

Daß das CaO der Comenditanalyse (2.), wie oben geschehen, auf Anorthit zu verrechnen ist, beweist Herzenbergs Analyse der Feldspateinsprenglinge dieses Gesteins, welche 0.4 Prozent CaO gegenüber den 0.1 Prozent CaO des Arfvedsonits ergab, der ja überdies in viel geringerer Menge auftritt. Daher müßte man eigentlich auch bei der Berechnung der Osannparameter dieser (und ähnlicher) Gesteine außer dem K_2O auch das ganze (oder doch das meiste) CaO an Al_2O_3 binden, so daß dem Na_2O noch etwas mehr Al_2O_3 entzogen wird als bereits ohnedies, wodurch die Arfvedsonitmenge ein wenig steigt. Anderseits hat man das K_2O insgesamt an Al_2O_3 zu binden, da der Arfvedsonit nur 1.6 Prozent K_2O gegenüber 10.5 Prozent Na_2O führt. Bei obiger Berechnung der Osannparameter habe ich jedoch (im Gegensatz zur Berechnung der Mineralmolekularprozente) in Anlehnung an Osann das CaO nicht zu C, sondern zu F gefügt, damit die Bedeutung der Ziffern von C und F keine andere als die übliche und ein direkter Vergleich mit den Parametern andrer Gesteine möglich würde.

Das Fe_2O_3 wurde vollständig auf Arfvedsonit verrechnet, wodurch die berechnete Arfvedsonitmenge ein klein wenig zu hoch ausfällt, da der Fe_2O_3-Gehalt dieses Minerals 4.20 Prozent, derjenige der drei analysierten Feldspäte aber immerhin 1.44, 1.69 und 2.16 Prozent beträgt und die Feldspatmenge über die Arfvedsonitmenge stark überwiegt.

Schließlich erhält man folgende Gewichtsprozente:

	1	2
Orthoklas	22.5	44.0
Albit	73.7	47.6
Anorthit	—	0.2
Quarz	1.6	5.8
Arfvedsonit	2.2	2.4
Summa	100.0	100.0

Anhangsweise seien der Vollständigkeit wegen noch zwei Comenditanalysen Bertolios mitgeteilt, in denen Al und Fe nicht getrennt wurden (Atti R. Accad. Linc. Rendic. [5] **5**, 2. Sem., Roma 1896):

	1	2
SiO_2	74.6	75.1
Al_2O_2 Fe_2O_3	14.8	16.8
MgO	0.2	0.1
Na_2O	7.4	6.8
K_2O	2.5	2.0
Summa	99.5	100.8

b. Typus Mercureddu

(Mikrophoto s. Taf. I, Fig. 2 und 3 nebst Erläuterung).

In der Gegend Mercureddu auf S. Antioco tritt ein sehr fester, weiß und schwarz gesprenkelter Comendit von andesitähnlichem Aussehen auf, der nicht sehr zahlreiche Einsprenglinge von Natronsanidin und Quarz führt.

Der Natronsanidin ist tafelig || {010} mit einem Maximaldurchmesser von 0.5 cm und öfters nach dem Karlsbader Gesetz verzwillingt; er zeigt Murchisonitteilung und typisches Irisieren.

Der Quarz tritt in Dihexaedern von 0.2 cm Maximaldurchmesser auf.

U. d. M. bemerkt man neben diesen Einsprenglingen solche von Cossyrit als unregelmäßige, tiefbraune Körner, die 0.01 cm Maximaldurchmesser haben und zuweilen Spaltrisse || {110} und || $\{1\bar{1}0\}$ mit etwa 66° Winkel und für Schwingungen parallel der längeren Diagonale des Spaltungsrhomboids stärkere Absorption als parallel der kürzeren zeigen. Daneben sind Spuren von hellem Pyroxen vorhanden.

Die Grundmasse stellt ein Pflaster von feinzackig ineinandergreifenden Quarzkörnern mit 0.01 cm Maximaldurchmesser dar; sie sind bald spärlich, bald reichlich von Sanidinleisten (gestreckt || [100]) unregelmäßig durchspickt; oder es liegt in einem Quarzkorn ein Sanidinsphärokristall eingebettet, dessen || [100] gestreckte, nach außen divergierende Stengel keilförmige Zwischenräume bilden; oft sind alle diese Zwickel mit Arfvedsonit sozusagen ausgegossen, der daher ebenfalls als Sphärokristall erscheint, in Wahrheit aber einen einzigen Kristall darstellt, der innerhalb des umgebenden Quarzkorns in viele kleine Zipfel ausläuft; der Arfvedsonit hat die oben beschriebenen optischen Eigenschaften. Oft legt sich die sanidindurchsetzte Quarzmasse aureolenartig als orientierte Fortwachsung um die Quarzeinsprenglinge herum und verkittet zuweilen zwei Dihexaeder gleicher Orientierung; hieraus ergibt sich, daß ein Teil der Dihexaeder erst während der Herausbildung einer kristallinen Grundmasse entstanden ist. Die Bildungsfolge der Grundmassemineralien ist Feldspat, Arfvedsonit, Quarz.

Die Gesteinsanalyse (neu) ergab:

SiO_2	75.25
TiO_2	0.50
Al_2O_3	10.39
Fe_2O_3	1.57
FeO	2.43
MnO	—
MgO	0.08
CaO	0.25
Na_2O	4.39
K_2O	4.35
Glühverl.	0.61
P_2O_5	0.0
Summa	99.82

Molekularprozente	
SiO_2	82.13
Al_2O_3	6.76
Fe_2O_3	0.65
FeO	2.25
MgO	0.13
CaO	0.30
Na_2O	4.71
K_2O	3.07
Summa	100.00

Osannparameter	
S	82.13
A	7.78
C	—
F	2.31
k	1.68
n	6.1
a	15.5
c	—
f	4.5

Alkalireihe β

An Al_2O_3 ungesättigt.

[1] $H_2O- = 0.08$
$H_2O+ = 0.29$
Summa $= 0.37$

Der Glühverlust überwiegt das H_2O um 0.24 Prozent.

Als Durchschnittsfeldspat ergibt sich, wenn man das CaO wieder wie oben (entgegen der Osannschen Berechnung) dem Feldspat zuerteilt:

Orthoklas	46.0	Mol.-Prozent
Albit	51.5	» »
Anorthit	2.5	» »
Summa	100.0	Mol.-Prozent.

Da auch hier wieder die Summe von Albit- und Anorthitmolekeln (bei weitem) nicht das Doppelte der Orthoklasmolekeln ausmacht, so ist auch dieser Feldspat — in Übereinstimmung mit dem mikroskopischen Befund — der monoklin erstarrenden Mischungsreihe zuzurechnen, was natürlich sekundäre Mikroperthitisierung nebst Mikroklinbildung stets möglich erscheinen läßt, wenn nur der Zeitraum hierzu reichte oder die äußeren Bedingungen günstig waren; übrigens ist vielleicht mit jeder Perthitbildung eine Umwandlung von Orthoklas in Mikroklin ursächlich verknüpft. In den vorliegenden Feldspäten sind die Symptome von Perthitisierung, vom Irisieren abgesehen, sehr spärlich.

Aus den Oxydmolekülprozenten erhält man folgende Mineralmolekülprozente:

Orthoklas	$K_2Al_2Si_6O_{16}$	24.56
Albit	$Na_2Al_2Si_6O_{16}$	27.12
Anorthit	$CaAl_2Si_2O_8$	1.20
Quarz	SiO_2	37.99
Arfvedsonit Cossyrit	$\overset{''}{Fe}\overset{'''}{Fe}_2SiO_6$	1.95
	$(\overset{''}{Fe}, Na_2)_2Si_3O_8$	5.20
	$(Mg, \overset{''}{Fe}, Na_2)_2SiO_4$	0.46
	Summa	98.48

---

[1] »H_2O-« bedeutet das unterhalb, »H_2O+« das oberhalb 110° entweichende Wasser.

Hierbei wurde alles Fe_2O_3 auf die farbigen Gemengteile verrechnet, da der Fe_2O_3-Gehalt der Feldspäte sehr gering erscheint; anderseits wurde alles Al_2O_3 den Feldspäten zugewiesen, denn der Durchschnittsfeldspat enthält 19.50 Prozent Al_2O_3, der von Bertolio analysierte Arfvedsonit 5.50 Prozent Al_2O_3 und der von Soellner (a. a. O.) analysierte Cossyrit des Pantellerits von Cuddia Mida (Pantelleria) nur 0.20 Prozent Al_2O_3, was bei der gegenüber dem Feldspat sehr geringen Menge dieser farbigen Gesteinskomponenten keine Rolle spielt; auch ist der relativ hohe Al_2O_3-Wert der Arfvedsonitanalyse Bertolios vielleicht zum Teil auf innig eingewachsenen Feldspat zurückzuführen. Auch der H_2O-Gehalt des Cossyrits, nach Soellner (a. a. O.) = 1.29 Prozent, kann unberücksichtigt bleiben, derjenige des Arfvedsonits ist anscheinend sogar verschwindend klein. Die Verteilung von Na_2, $\overset{''}{Fe}$, Mg auf Trisilikat und Orthosilikat erfolgte nach Maßgabe von Bertolios Arfvedsonitanalyse und von Soellners Cossyritanalyse und auf Grund der Annahme eines Massenverhältnisses von Arfvedsonit : Cossyrit = 4 : 1.

Die 0.50 Prozent TiO_2 der Analyse sind wohl auf etwas Ilmenit zurückzuführen, der in dem einen einzigen Dünnschliff vielleicht nur zufällig fehlte; zwar enthält der Cossyrit Soellners 8.22 Prozent TiO_2 neben 40.80 Prozent SiO_2, da der Cossyrit jedoch nach der folgenden Mineralberechnung (sowie nach dem mikroskopischen Befund) nur etwa 0.5 Gewichtsprozente des Gesteins beansprucht, so kann nur $^1/_{10}$ von dem TiO_2 der Gesteinsanalyse im Cossyirit stecken. Der Arfvedsonit von S. Pietro führt ebensowenig wie derjenige von Grönland merkliche Mengen TiO_2.

Schließlich ergeben sich folgende Gewichtsprozente:

Orthoklas	43.7
Albit	45.4
Anorthit	1.0
Quarz	7.3
Arfvedsonit	2.1
Cossyrit	0.5
Summa	100.0

Zu diesem Comendittyp darf man vielleicht auch pechsteinartige Gesteine von Mercureddu (S. Antioco) sowie von Guardia dei Mori (S. Pietro) rechnen, in denen schwarze kokkolithische bis perlitische, pechsteinartige Schlieren mit grauen schaumigen Schlieren abwechseln; die Natronsanidineinsprenglinge sind tafelig || {010}, sie irisieren nicht, zeigen aber milchige Opaleszenz und Murchisonitteilung. Sie ergaben bei Herzenbergs (a. a. O.) Untersuchung $\Theta_{001} = 0°$ und $\Theta_{010} = +8°38' \pm 2'$ im Natriumlicht sowie folgende Analysenwerte:

SiO_2	66.81	Prozent
Al_2O_3	20.61	»
Fe_2O_3	0.64	»
CaO	1.30	»
Na_2O	6.25	»
K_2O	6.22	»
Summa	101.83	Prozent

Hieraus folgen die Molekularproportionen:

Orthoklas	37.0
Albit	56.0
Anorthit	6.5
Summa	100.0

Der Anorthitgehalt ist gegenüber demjenigen der aus dem vorigen Comendittyp beschriebenen und der aus dem folgenden zu beschreibenden Natronsanidine erheblich, der Fe_2O_3-Gehalt dagegen gering, weshalb wohl auch diese Feldspäte die oben geschilderte Bräunung nicht aufweisen.

Von Herzenberg (a. a. O.) wurde die Dichte $D = 2.585$ bestimmt, $= 2.607$ unter der Annahme additiven Verhaltens der spezifischen Volumina obiger drei Mischungskomponenten berechnet.

U. d. M. sieht man außer diesen großen Feldspäten und einzelnen gerundeten Quarzdihexaedern mit konformen Glaseinschlüssen kleinere Sanidinleisten und spärliche Dihexaederchen von Quarz und nicht selten ein $\parallel c'$ gestrecktes winziges, schlankes Cossyritsäulchen mit $\measuredangle \mathfrak{c} : c' = 36°$ etwa und der Absorption $\parallel \mathfrak{c} > \perp \mathfrak{c}$ bei braunen bis gelben, ins Grünliche spielenden Tönen. Dieses alles liegt in einer feinschaumigen, fast farblosen Glasbasis. Die Entglasung hörte anscheinend sehr bald nach der Bildung der ersten spärlichen und noch kleinen Quarzeinsprenglinge auf, zur Bildung von Arfvedsonit konnte es daher nicht wohl kommen, während Feldspat und Cossyrit schon ziemlich reichlich vorhanden waren, letzterer entsprechend seiner auch im holokristallinen Gestein geringen Größe noch im Stadium winziger Nadeln. Es dürften daher auch in dem obigen holokristallinen Gestein die Einsprenglinge von Cossyrit und Feldspat zum großen Teil früher entstanden sein als diejenigen des Quarzes.

c. Typus Fontane

(Mikrophoto s. Taf. I, Fig. 4 nebst Erläuterung).

Comendite von Le Fontane, Pescetti, Guardia dei Mori, Gioia und Canale del Baccio auf S. Pietro sowie solche von Cala Lunga, Mercureddu und Stagno Cirdu auf S. Antioco sind mehr oder weniger dichte, oft etwas schlierige und drusige Gesteine, die hellbläuliche bis hellgrünliche (Mercureddu hat zum Teil die spangrüne Farbe des Pantellerit von Cuddia Mida auf Pantelleria) oder auch wohl infolge von Umwandlungen hellrötlichgelbe Farbe, seltener schwärzlich-glasiges und dann schlieriges oder perlitisches

Gepräge haben und oft nur spärliche Einsprenglinge von Quarz und Feldspat besitzen. Die bläulichen und grünlichen Varietäten sind vor den rötlichen und gelblichen durch besonderen Arfvedsonit- oder Ägirinreichtum ausgezeichnet, wobei zu bemerken ist, daß auch der Ägirin mit seinem oft bläulichen Grün dem Gestein eine blaue Tönung verleihen kann.

Die miarolithischen, blasigen Schlieren der glasigen Varietäten sind meist stärker entglast und auch heller als die kompakten. Auf den Drusenwänden sitzen oft kleine wasserhelle Bergkristalle mit $\{\bar{2}11\}$, $\{100\}$, $\{22\bar{1}\}$ (die beiden letzteren gleich groß), seltener winzige Arfvedsonitnädelchen, die zum Teil nach $\{100\}$ verzwillingt sind.

Die Hohlraumwände des hellgelblichen bis rötlichen, makroskopische Natronsanidine und Quarzdihexaeder zeigenden Comendit vom Canale del Baccio sind häufig mit traubigem Psilomelan überzogen, der von Quarz und Sanidinkristallen durchsetzt ist; diese im ganzen klaren Quarze umschließen zuweilen etwas Psilomelan und zeigen die gleich großen Flächen $\{100\}$ und $\{22\bar{1}\}$ mit je einer dreieckigen, dem Flächenumriß konformen Einsenkung in der Mitte und einer wie geflossenen Oberfläche, $\{\bar{2}11\}$ ist selten und dann nur schmal; die Teilbarkeit $\parallel$ $\{100\}$ ist gut ausgeprägt. Die in die mit Psilomelan überkrusteten Hohlräume frei hineinragenden Sanidinkristalle zeigen öfters nur $\{001\}$, $\{010\}$, $\{\bar{2}01\}$ ungefähr gleich groß, wodurch ein würfelähnlicher Habitus entsteht (da $\measuredangle\ 001 : \bar{2}01 = 80^\circ\ 18'$), zuweilen treten noch $\{110\}$ und $\{130\}$ hinzu; Opaleszenz, Irisieren und Murchisonitteilung fehlen, die optische Achsenebene ist normalsymmetrisch. Die eigentlichen Einsprenglinge von Sanidin zeigen die gewöhnlichen, unten zu beschreibenden Formen und sind oft durch Manganerz partiell oder total pseudomorphosiert, dann ist zugleich das Gestein zur Reibungsbreccie umgestaltet, zum Teil auch in rötlichen bis gelblichen Kaolin verwandelt. Nachschübe von flüssigen Magmaresten, in denen sich Wasser und (das im Arfvedsonit zu 0.50 Prozent enthaltene) Mangan angereichert hatten, lieferten vielleicht diese letzten Bildungen, deren Sanidin bezeichnenderweise Na-arm ist.

Die Feldspateinsprenglinge dieses Comendittyps gehören wieder zum Natronsanidin und zeigen $\{010\}$, $\{001\}$, $\{110\}$, $\{130\}$, $\{\bar{2}01\}$, $\{021\}$, $\{\bar{1}11\}$, während $\{\bar{1}01\}$ wieder fehlt; sie sind isometrisch oder gestreckt $\parallel$ $[100]$ oder tafelig $\parallel$ $\{010\}$, selten etwas tafelig $\parallel$ $\{001\}$; zuweilen bilden sie Zwillinge nach $[001]$, verwachsen $\parallel$ $\{010\}$ etwa, vom gleichen Habitus wie die einfachen Individuen, aber meist etwas größer. Optische Achsenebene ⊥ {010} mit der Achsendispersion $\rho > v$ wie bei Adular, aber mit kleinerem Achsenwinkel; optisch negativ.

Die Natronsanidine des Comendit vom Canale del Baccio (d. h. die normalen Einsprenglinge im Gegensatz zu den oben geschilderten, den Psilomelan durchspickenden Kristallen) besitzen zwar auch die Murchisonitteilung, aber im Gegensatz zu allen andern kein Irisieren; ihre Achsenebene liegt ⊥ {010} mit der Achsendispersion $\rho > v$; $\Theta_{010} = +8^1/_2{}^\circ$, $\Theta_{001} = 0^\circ$, $\measuredangle\,(001):(010) = 89^\circ 59' \pm 3'$ gemessen.

Herzenberg (a. a. O.) ermittelte an den Natronsanidinen der Comendite von Gioia (I) und Mercureddu (II) folgende Auslöschungsschiefen:

I	II
$\Theta_{010} = +9^\circ 12' \pm 3'$	$\Theta_{010} = +8^\circ 25' \pm 5'$

und folgenden chemischen Bestand:

	I	II
SiO_2	68.10	69.44
Al_2O_3	16.63	15.68
Fe_2O_3	1.20	1.77
CaO	0.70	0.53
Na_2O	5.27	5.23
K_2O	7.13	6.07
Summa	99.03	98.72

Hieraus findet man folgende Molekularprozente:

	I	II
Orthoklas	45.5	42.0
Albit	51.0	55.0
Anorthit	3.5	3.0
Summa	100.0	100.0

Die Dichten wurden von Herzenberg (a. a. O.) experimentell bestimmt sowie aus den Dichten von reinem Adular, Albit und Anorthit (vgl. S. 6) unter Annahme additiven Verhaltens der spezifischen Volumina berechnet:

	I	II
Bestimmt	2.583	2.574
Berechnet	2.597	2.599

Also auch hier wieder Dilatation (vgl. S. 7).

Der Arfvedsonit, der in diesen Comenditen im Gegensatz zu den vorigen beiden Typen ‖ $\mathfrak{c}$ gestreckte Nadeln, meist äußerst fein und winzig, statt schwammige Massen bildet, hat ∡ (110) : (1$\bar{1}$0) = 56° 6′ ± 1′, Pleochroïsmus im Dünnschliff wie oben $\mathfrak{a}$ tiefbau, $\mathfrak{b}$ grüngelb, $\mathfrak{c}$ dunkelgrauviolett, zuweilen aber statt dessen, besonders in den inneren Partien des Kristalls $\mathfrak{a}$ tiefbraunschwarz, $\mathfrak{b}$ rötlichgelb, $\mathfrak{c}$ tiefbraun; $\mathfrak{c} \parallel \bar{b}$, ∡ $\mathfrak{a} : c' = 6^1/_2$° mit (unbekanntem Vorzeichen und) starker Dispersion ∡ $\mathfrak{a}_\rho : c' < \mathfrak{a}_v : c'$. Eine andre Hornblende, die zuweilen auftritt und $\parallel c'$ gestreckte bis 1 cm lange und 0.1 cm dicke braunschwarze Einsprenglinge bildet, hat die Formen {010}, {110}, {100} sehr schmal, {001}, {$\bar{1}$01}, {$\bar{1}$21}; ∡ (110) : (1$\bar{1}$0) = 55° 58′ und = 55° 46′ (an 2 Kristallen gemessen) und ∡ ($\bar{1}$21) : (010) = 60° 0′; $\mathfrak{b} \parallel b$, ∡ $\mathfrak{c} : c'$ = 6—11° mit (unbekanntem Vorzeichen und) ∡ $\mathfrak{c}_\rho : c' < \mathfrak{c}_v : c'$, Doppelbrechung ziemlich schwach, jedoch stärker als bei Arfvedsonit, Pleochroïsmus im Dünnschliff $\mathfrak{a}$ graugelb, $\mathfrak{b}$ dunkelbraunviolett, $\mathfrak{c}$ blaugrün. Der Ägirin, der stets äußerst feine und kleine Nadeln oder gedrungene Stengel bildet, hat ∡ $\mathfrak{a} : c'$ = 2—3° mit ∡ $\mathfrak{a}_\rho : c' < \mathfrak{a}_v : c'$, Pleochroismus im Dünnschliff $\mathfrak{a}$ grün ins bläuliche (wie in den Gesteinen von Låven und von Saerna), $\mathfrak{b}$ hellgelbgrün, $\mathfrak{c}$ hellgelb. Bisweilen (Gioia) scheint der Ägirin pseudomorph nach Hornblende zu sein, dann ist er oft fleckenweise und namentlich im Innern braun mit $\parallel \mathfrak{a}$ rotbraun, $\perp \mathfrak{a}$ gelbbraun; die Zone der Längsachse dieser stengeligen Pseudomorphosen ergab 4 Winkel von 62° 52′ und 2 Winkel von 54° 55′. Pseudomorphosen von Ägirin nach Arfvedsonit (sowie nach Barkevikit) sind von Brögger[1] in grönländischen (und südnorwegischen) Alkaligesteinen sowie von Cross[2] in solchen von Colorado beobachtet worden.

U. d. M. sieht man Quarz- und Natronsanidineinsprenglinge, letztere nicht selten granophyrisch von Quarz durchwachsen, äußerst selten einen zwillingslamellierten Feldspat, bisweilen Einsprenglinge von obiger Hornblende, hier und da auch wohl einmal von Cossyrit sowie anscheinend Pseudobrookit, wenig Magnetit, Ilmenit und Zirkon.

Die Grundmasse ist bald holokristallin, bald glasreich, im letzteren Falle schlierig oder gekröseartig mit abwechselnden braunen glasigen Schlieren und hellen aus dichtem Quarzsanidinaggregat bestehenden Schlieren; oder sie ist reich an (optisch positiven) Mikrofelsitsphärolithen oder -axiolithen, in welch letzterem Falle konkavbogig begrenzte, an Aschenstruktur erinnernde Glasreste randlich in Mikrofelsit übergegangen sind. Nädelchen von Arfvedsonit oder von Ägirin oder beide gleichzeitig sind oft längs Schlierengrenzen axiolithisch oder büschelförmig geordnet, sonst liegen sie kreuz und quer, bisweilen zu dichtem Filz zusammengedrängt. Das Glas ist manchmal reich an Tridymittäfelchen. Bei holokristalliner Struktur besteht die Grundmasse meist aus unregelmäßigen Quarzfeldern, in denen neben Nadeln von Ägirin oder von Arfvedsonit zahllose Sanidinsäulchen, $\parallel [100]$ gestreckt, liegen; oder es sind Sphärokristalle von Sanidin, je einer in ein Quarzfeld eingebettet, wobei der Quarzwirt oft aufs feinste granophyrisch in die einzelnen Sanidinleisten hineinragt; an der Peripherie des Feldspatsphärokristalls sind oft Nadeln von Arfvedsonit radial in den Quarz eingebettet. Oder das rundliche Scheibchen des Feldspatsphärokristalls zerfällt in einige wenige Sektoren, die irgendwie ganz schief zum Radius auslöschen und oft um ein zentrales Feldspatleistchen herumgruppiert sind.

---

[1] Brögger, Zeitschr. f. Kristallogr. **16.** 405. 1890.

[2] Cross, Amer. Journ. Science **39.** 359. 1890.

Sekundärer Entstehung sind außer Limonit wohl Flitter von hellem Glimmer. Die Nadeln von Arfvedsonit und Ägirin sind im allgemeinen jünger als der Grundmassenfeldspat, älter als der Grundmassenquarz.

Einige, durch Fe_2O_3 rötlich gefärbte, einsprenglingsarme Gesteine von Le Fontane leiten durch häufigeres Erscheinen von Kali führendem Oligoklas und etwas Biotit u. d. M. vielleicht zu den Lipariten des nächsten Kapitels über; ihre Grundmasse besteht wesentlich aus Mikrofelsit, dessen (optischpositive) Sphärolithe und palmwedelartige Gebilde an Eisblumen erinnern; der Mikrofelsit ist, besonders an der Peripherie der Sphärolithe, von vielen Glaströpfchen, pulverigem Fe_2O_3 und feinsten durch Fe_2O_3 geröteten Nädelchen erfüllt, welch letztere, mit $\mathfrak{c}$ fast $\parallel c'$, vielleicht Tremolit darstellen; die Sphärolithe haben bis 0.5 cm Durchmesser und sind oft durch ein makroskopisches Sanidintäfelchen zentriert. Wenn jener fragliche Tremolit nebst dem Fe_2O_3 — wie im südafrikanischen Tigerauge — aus Alkaliamphibol hervorging, so sind diese Gesteine den Comenditen beizuzählen.

Von diesem Typ liegen fünf neue Analysen (2—6) und eine von Bertolio[1] angefertigte (1) Analyse vor; sie betreffen folgende, nach abnehmendem SiO_2-Gehalt geordnete Gesteine:

---

[1] Bertolio, Boll. R. Com. Geol. Ital. **27.** 417. Roma 1894. Eine 2. von Bertolio ebenda veröffentlichte Analyse bezieht sich auf Comendit von Gioia, läßt sich aber hier nicht diskutieren, da Al_2O_3 und Fe_2O_3 nicht getrennt wurden: SiO_2 — 80.3, $Al_2O_3 + Fe_2O_3$ — 9.2, MgO — 0.6, Na_2O — 5.5, K_2O — 3.9, Summa — 99.5.

1. Zwischen Comende und Miniera del Becco (S. Pietro); grüner Perlit mit Natronsanidineinsprenglingen und Quarzdihexaedern.

2. Mercureddu (S. Antioco); spangrünes Gestein mit Nadeln von Arfvedsonit und etwas Ägirin sowie fluidaler Grundmasse.

3. Guardia dei Mori (S. Pietro); dichtes, graues, poröses Gestein mit Nadeln von Arfvedsonit und etwas Ägirin sowie sphärolithischer Grundmasse.

4. Le Fontane (S. Pietro); schwärzliches, schlieriges Gestein mit Arfvedsonitnadeln und sphaerolithischer Grundmasse.

5. Cala Lunga (S. Antioco); hellgraues, dichtes Gestein mit Ägirinnadeln und feldspatdurchspicktem Quarzpflaster.

6. Canale del Baccio (S. Pietro); graugelbes, zuweilen von Psilomelan überzogenes Gestein mit wenig Arfvedsonit und mikrogranitischer Grundmasse.

	1	2	3	4	5	6
SiO_2	79.1	74.73	74.09	73.65	73.35	73.23
TiO_2	—	—	—	0.29	—	—
Al_2O_3	8.9	10.39	10.88	9.52	13.08	12.25
Fe_2O_3	1.9	4.47	3.35	5.12	3.06	3.25
FeO	—	0.70	0.42	0.96	—	0.28
MnO	1.1	—	—	—	—	—
MgO	0.7	0.21	0.30	0.04	0.08	0.13
CaO	—	0.18	0.16	0.31	0.08	0.25
Na_2O	3.9	4.12	4.56	4.84	4.68	4.44
K_2O	3.1	4.38	4.45	4.30	4.99	4.32
Glühverl.	0.8	1.13	1.52	1.23	1.00	1.74
P_2O_5	—	—	—	—	—	—
Summa	99.5	100.31	99.73	100.26	100.32	99.89
H_2O-	—	0.15	0.24	0.29	0.07	0.56
H_2O+	—	0.50	0.51	0.51	0.50	0.71
Summa	—	0.65	0.75	0.80	0.57	1.27
Glühverl. außer H_2O	—	0.48	0.77	0.43	0.43	0.47

Subtrahiert man (in 2—6), wie soeben geschehen, den Wassergehalt vom Glühverlust, so bleibt ein positiver Rest von durchschnittlich 0.5 Prozent, der wohl auf H_2, CO_2, CO, CH_4, N_2 zurückzuführen ist, jedoch einen ziemlich hohen Betrag darstellt. Gautier[1] trieb aus 1 kg des bei 300° getrockneten Granits von Vire (Calvados) bei Rotglut 2 709 cm^3 obiger

---

[1] Gautier, Compt. rend. **132**. 58 und 189. 1901; **136**. 16. 1908; **143**. 7, 1382 und 1465. 1906.

Gase aus (auf 0° und 760 mm Hg reduziert); setzt man die durchschnittliche Dampfdichte derselben = 0.5, so ergeben sich nur 0.12 Gewichtsprozent Gas.

P_2O_5 fand sich in den Gesteinen 2, 3, 4 und 6 in Spuren, d. h. < 0.1 Prozent, in 5 gar nicht; in Gestein 1 ist wohl weder auf TiO_2 noch auf P_2O_5 geprüft worden. Die Spur P_2O_5 deutet wohl auf einen minimalen Apatitgehalt hin. Der TiO_2-Gehalt = 0.29 von Gestein 4 ist wohl wesentlich auf etwas Ilmenit zurückzuführen und nicht auf den Arfvedsonit dieses Gesteins, da der Arfvedsonit von S. Pietro nach Bertolios Analyse kein TiO_2 führt und letzteres auch in andern Arfvedsoniten nur spurenweise qualitativ[1] gefunden ist; auch war Titanit in den Dünnschliffen nicht zu beobachten.

Die MnO-Ziffer (1.1 Prozent) von Bertolios Analyse (1) ist abnorm hoch; Ägirin hat selten über 1 Prozent MnO. Verrechnet man die MnO-Ziffer (1.1 Prozent) auf Arfvedsonit, so ergibt sich für diesen nach Maßgabe seiner geringen Menge ein MnO-Gehalt von 31 Prozent, während er nach Bertolios Analyse (s. S. 9) nur 0.5 Prozent enthält.

Molekularprozente obiger 6 Gesteine.

	1	2	3	4	5	6
SiO_2	85.1	81.72	81.82	81.88	80.32	80.74
Al_2O_3	5.6	6.71	7.14	6.24	8.46	7.98
Fe_2O_3	0.6	0.74	0.94	2.04	0.03	—
FeO	0.4	2.83	1.33	1.12	2.48	2.96
MnO	1.0	—	—	—	—	—
MgO	1.1	0.34	0.50	0.07	0.13	0.21
CaO	—	0.21	0.19	0.37	0.09	0.30
Na_2O	4.1	4.38	4.92	5.22	4.99	4.76
K_2O	2.1	3.07	3.16	3.06	3.50	3.05
Summa	100.0	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00

Osannparameter.

	1	2	3	4	5	6
S	85.1	81.72	81.82	81.88	80.32	80.74
A	6.2	7.45	8.08	8.28	8.49	7.81
C	—	—	—	—	—	0.17
F	2.5	3.38	2.02	1.56	2.70	3.30
k	2.1	1.70	1.62	1.60	1.50	1.60
n	6.6	5.9	6.1	6.3	5.9	6.1
a	14.5	14.0	16.0	17.0	15.0	14.0
c	—	—	—	—	—	0.5
f	5.5	6.0	4.0	3.0	5.0	5.5
Alkalireihe	β	β	β	β	β	β
An Al_2O_3	ungesättigt	ungesättigt	ungesättigt	ungesättigt	ungesättigt	gesättigt.

Die Sättigung von Gestein 6 an Al_2O_3 ist nur eine scheinbare und durch eine Eigentümlichkeit der Osannschen Berechnungsweise bedingt; im Gegensatz zu dieser verlangen die Comendite — wie oben bei Typ a dargelegt — Bindung fast allen Kalkes an Al_2O_3 im

---

[1] Rosenbusch-Wülfing, Mikrosk. Physiogr. 2. 242. 1905.

Sinne der Anorthitformel, dann aber reicht das Al_2O_3 zur Alkalibindung nicht aus, und es ergeben sich Alkalieisenverbindungen wie Ägirin, Arfvedsonit usw.

So wurde zur Berechnung des Durchschnittsfeldspates alles CaO benutzt, da der Arfvedsonit nur 0.13 Prozent CaO hat, im Ägirin zwar etwa 4.25 Prozent CaO (Ägirin des Nephelinsyenit von Barreiro in Brasilien1)) oder 4.27 Prozent CaO (Ägirin des Nephelingneis von Cevadaes in Portugal2)) vorhanden sein können, der Ägirin unserer Gesteine aber gegenüber dem Feldspat quantitativ vollkommen zurücktritt und dieser nach obigen 2 Analysen Herzenbergs immerhin 0.70 bzw. 0.53 Prozent CaO führt. Überdies dürfte der Ägirin unserer Gesteine, die nur $1/2$ bzw. $1/7$ soviel CaO haben als der erwähnte Nephelinsyenit bzw. Nephelingneis, entsprechend kalkärmer sein.

Ebenso ist alles K_2O auf die Feldspäte zu übertragen, da der Arfvedsonit nur 1.60 Prozent K_2O gegenüber 10.50 Prozent Na_2O und auch Ägirin nur sehr geringe Mengen K_2O enthält, z. B. obiger Ägirin von Barreiro 1.05 Prozent K_2O neben 8.89 Prozent Na_2O und obiger Ägirin von Cevadaes 0.13 Prozent K_2O neben 10.90 Prozent Na_2O.

Das Fe_2O_3 wurde gänzlich auf Ägirin oder Arfvedsonit verrechnet; ersterer hat etwa 25 Prozent Fe_2O_3 (Cevadaes), letzterer nach Bertolio etwa 4 Prozent Fe_2O_3; da die beiden analysierten Feldspäte 1.20 und 1.77 Prozent Fe_2O_3 führen, so ergibt jene Berechnungsweise infolge der großen Feldspatmenge einen etwas zu großen Gehalt an Ägirin und besonders an Arfvedsonit.

Zusammensetzung der Durchschnittsfeldspäte der 6 Comendite in Mol.-Prozenten

	1	2	3	4	5	6
Orthoklas	37.5	46.5	44.5	50.5	41.5	38.5
Albit	62.5	52.0	54.0	46.5	58.0	60.5
Anorthit	—	1.5	1.5	3.0	0.5	1.0
Summa	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

Vergleicht man den Durchschnittsfeldspat des Gesteins von Mercureddu (Nr. 2) mit dem oben analysierten Einsprenglingsfeldspat von ebendaher, so findet man letzteren — wie gewöhnlich — etwas reicher an Albit und Anorthit:

		Einsprenglingsfeldspat	Durchschnittsfeldspat
Mercureddu	Orthoklas	42.0	46.5
	Albit	55.0	52.0
	Anorthit	3.0	1.5

Schätzen wir die Menge des Grundmassenfeldspats etwa gerade gleich derjenigen des Einsprenglingsfeldspats, so ergeben sich für ersteren folgende Mol.-Prozente:

Orthoklas	51.0
Albit	49.0
Anorthit	—
Summa	100.0

---

[1] Machado, Min. Petr. Mitt. 9. 333. 1888.

[2] Osann, N. Jahrb. f. Min. usw. 1907. II. 116.

Aus den Oxydmolekülprozenten der 6 Comendite ergeben sich folgende Mineralmolekülprozente:

	1	2	3	4	5	6
Orthoklas $K_2Al_2Si_6O_{16}$	16.8	24.56	25.28	24.48	28.00	24.40
Albit $Na_2Al_2Si_6O_{16}$	28.0	27.44	30.32	22.48	38.96	37.04
Anorthit $Ca_2Al_2Si_2O_8$	—	0.84	0.76	1.48	0.36	1.20
Quarz SiO_2	45.4	36.49	35.77	38.78	25.81	29.11
Ägirin $Na_2Fe_2Si_4O_6$	3.6	—	—	5.52	0.72	—
Arfvedsonit $\overset{\prime\prime}{Fe}Fe_2SiO_6$	—	2.22	2.82	3.36	—	—
Arfvedsonit $(\overset{\prime\prime}{Fe}, Mg, Na_2)_2Si_3O_8$	5.0	6.76	4.04	3.12	4.84	6.60
Summa	98.8	98.31	98.99	99.22	98.69	98.35

Die hier erfolgte Verrechnung von Eisen usw. zielte möglichst auf Grund des mikroskopischen Befundes teils auf Ägirin, teils auf Arfvedsonit; doch spielt hier Willkür eine gewisse Rolle, erstens infolge des Glasgehalts mancher Gesteine, zweitens infolge von Osanns Methode, nach welcher ein Teil von Fe_2O_3 in FeO umgerechnet wurde, und drittens infolge des manchmaligen Nebeneinandervorkommens von Ägirin und Arfvedsonit in kaum zu ermittelndem Mengenverhältnis. Daher sind obige Proportionen der 3 Fe-haltigen Molekeln von Ägirin und Arfvedsonit nicht ganz naturgetreu. So ist Gestein 1 nach Bertolio ein Perlit ohne Ägirin- und Arfvedsonitausscheidungen, Gesteine 2 und 3 zeigen u. d. M. wenig Ägirin neben Arfvedsonit, Gestein 4 nur Arfvedsonit statt Ägirin und Gestein 5 nur Ägirin statt Arfvedsonit; dagegen ergab für diesen letzteren Comendit die Berechnung nur 0.72 Mol.-Prozent $Na_2Fe_2Si_4O_{12}$ neben 4.84 Prozent natronfreier Arfvedsonitmolekeln $(Fe,Mg)_2Si_3O_8$.

Gewichtsprozente:

	1	2	3	4	5	6
Orthoklas	31.3	41.1	40.8	41.7	39.5	36.5
Albit	49.1	43.3	46.4	36.1	51.6	52.3
Anorthit	—	0.7	0.6	1.2	0.2	0.8
Quarz	9.1	6.6	6.4	7.1	3.9	4.7
Ägirin	5.5	—	—	7.8	0.9	—
Arfvedsonit	5.0	8.3	5.8	6.1	3.9	5.7
Summa	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

Zu diesem Typ gehört vielleicht ein von Bertolio (Boll. Com. Geol. Ital. **27.** 181. Roma 1896) analysierter Perlit von Pescetti (S. Pietro), der nach Lamarmora rote Granaten führen soll, die aber weder Bertolio noch Lovisato (Atti R. Accad. Linc. Rendic. **5.** 1. Sem. 56. Roma 1896) fanden; er ist schwarz mit grünen Schlieren, mit grauen porösen Einschlüssen, kugeligen rötlichen Konkretionen von 1 cm Maximaldurchmesser und spärlichem Sanidin; 1. bedeutet Gewichtsprozente, 2. Molekularprozente, nach Osanns Art berechnet.

	1	2
SiO_2	69.2	81.6
Al_2O_3	8.3	5.8
Fe_2O_3	5.4	2.4
CaO	0.1	0.1
Na_2O	6.9	7.9
K_2O	2.9	2.2
H_2O	7.0	—
Summa	99.8	100.0

Hiernach wären 1.9 Mol.-Prozent $(Na, K)_2O$ im Überschuß über $(Al, Fe)_2O_3$ und kein $(Fe, Mg)O$ zur Bindung des Überschusses vorhanden; das Eisen genügt auch bei partieller Umrechnung von Fe_2O_3 in FeO nicht, da

für Cossyrit (Pantelleria) $R_2O : RO : R_2O_3 = 3 : 15 : 2$ und
für Arfvedsonit (Comende) $R_2O : RO : R_2O_3 = 12.5 : 26 : 5.5$.

Auch ist die Natronvormacht wie in allen Analysen Bertolios abnorm groß.

Schließlich gehört hierher ein Ägirinmikrolithe führender Comendit von »Gioia. Ripa d'Oncampo ecc.«, von welchem Bertolio (Boll. R. Com. Geol. Ital. **25**. 407. Roma 1894) eine unvollständige Analyse mitteilt: SiO_2 75.1, $Al_2O_3 + Fe_2O_3$ 17.6, MgO 0.5, Na_2O 4.4, K_2O 2.2, Sa. 99.8.

Liparite.

A. Massige Gesteine.

a. Typus Calasetta

(Mikrophoto s. Taf. II, Fig. 5 nebst Erläuterung).

Dieser Typ von Lipariten findet sich an der Steilküste sowie bei dem alten Turm von Calasetta und in den Gegenden Bricco di Ciatti, Rocca della Guardia, Tupei, Mercureddu, Sisineddu (S. Antioco) sowie in den Gebieten Guardia dei Mori und Tacca Rossa (S. Pietro).

Es sind feste, kompakte, niemals trachytisch rauhe oder poröse Gesteine, die schwarze Farbe oder abwechselnd schwarze und rote, bis 3 mm dicke Schlieren oder in rote Masse schwarze Sphärolithe eingelagert zeigen, welch letztere oft durch Verwitterung kugelig oder kokkolithisch herauspräpariert sind. Das Gestein zeigt meist vielfache Absonderungen und zerfällt beim Schlagen des Handstücks häufig in unregelmäßige Polyeder von wenigen Zentimetern Durchmesser oder parallel den Schlierengrenzen in wellige Platten. Jene Absonderung ist durch Sprünge vorgezeichnet, längs denen sich eine bis 0.2 mm dicke weißliche bis gelbliche oder rötliche Verwitterungsschicht hinzieht.

Die in der Regel spärlichen Einsprenglinge sind farblose, nicht irisierende Feldspäte von 3 mm Maximaldurchmesser, und zwar klare Natronsanidine und trübe Kali-Plagioklase; Quarzeinsprenglinge fehlen, auch mikroskopisch, vollkommen. Der Kali-Plagioklas, der stets Zwillingslamellen nach dem Albitgesetz, selten solche nach dem Periklingesetz besitzt, liefert mit HF viel Na_2SiF_6, weniger $CaSiF_6$ und noch weniger K_2SiF_6. Den $\measuredangle$ (001) : (010) fand ich an 3 Kristallen des Gesteins der Steilküste von

Calasetta = $86^\circ 20'$, $86^\circ 26'$, $86^\circ 41'$; gewöhnlicher Oligoklas hat $86^\circ 32'$, Andesin $86^\circ 14'$.

Die Bestimmung der Auslöschungsschiefen Θ lieferte mir bei Natriumlicht folgende Mittelwerte

Gestein von	Calasetta [beim alten Turm] (rot mit schwarzen Sphärol.)	Calasetta [Steilküste] (schwarz)	Calasetta [Steilküste] (rot)	Rocca della Guardia (rot-schwarz schlierig)	Mercureddu (schwarz-rot schlierig)	Guardia dei Mori (schwarz)
Θ_{001}	$1^1/_2{}^\circ$	1°	$1^1/_2{}^\circ$	$1^1/_2{}^\circ$	$1^1/_2{}^\circ$	1°
Θ_{010}	$+5^\circ$ mit $\varrho < \upsilon$	$+3^\circ$ mit $\varrho < \upsilon$	$+5^\circ$ mit $\varrho < \upsilon$	$+4^1/_2{}^\circ$ mit $\varrho < \upsilon$	$+5^\circ$ mit $\varrho < \upsilon$	$+2^1/_2{}^\circ$ mit $\varrho < \upsilon$
Mol.-Proz. Albit	80	75	80	80	80	75
» » Anorthit	20	25	20	20	20	25

Die angeführten Mol.-Prozente Albit und Anorthit würden sich aus obigen Auslöschungsschiefen ergeben, falls es sich um Kalifreie Plagioklase handelte, was nicht zutrifft.

Die Vermutung, daß diese Feldspäte entsprechend den Foerstnerschen[1] Angaben über die durch ähnliche Auslöschungsschiefen ausgezeichneten Anorthoklase von Pantelleria bei höheren Temperaturen monoklin würden, konnte ich (mittels des Lehmannschen Erhitzungsmikroskops) bis zu 500° hinauf nicht bestätigen.

U. d. M. sieht man die Größe der Feldspäte bis zu den kleinsten Dimensionen hinabsinken, ihre Umgrenzung oft durch Korrosion wie angenagt, den Natronsanidin, der zuweilen etwas mikroperthitisch ist, häufig als orientierten Mantel um den Kaliplagioklas. Als »farbiger« Einsprengling tritt mikroskopisch spärlich Hypersthen auf, der die Formen $\{010\}$, $\{100\}$, $\{110\}$, $\{121\}$, $\{102\}$ und Streckung $\parallel c$ aufweist; sein optischer Charakter ist negativ, der Pleochroismus äußerst schwach: $\parallel \mathfrak{c}$ farblos mit Stich ins Grünliche, $\perp \mathfrak{c}$ farblos mit Stich ins Rötliche; zuweilen ist er pseudomorphosiert durch Serpentin oder auch Talk sowie durch Limonit. Akzessorisch treten hinzu etwas Ilmenit und Magnetit, zum Teil im Hypersthen, spärlich Zirkon sowie ziegeldachartige Aggregate von Tridymit.

Die schwarze, feuersteinartig aussehende Masse der Gesteine ist Glas, das im Dünnschliff rotbraun bei Durchsicht, blaugrau bei Aufsicht erscheint. Die schwarzen und roten Schlieren bieten u. d. M. eine dunkel- bis hellgraubraune Marmorierung dar, die an Achatstrukturen oder an feinste Fältelung erinnert; unabhängig von dieser treten — ebenfalls im gewöhnlichen Licht — dunklere rundliche Flecken hervor, durch welche die Schlieren ungestört hindurchgehen. Diese Kugeln, sekundäre Entglasungsformen, lassen häufig zwischen gekreuzten Nicols ein optisch negatives Brewstersches Kreuz erkennen. Auch die helleren Schlieren erscheinen zuweilen dicht entglast.

---

[1] Foerstner, Zeitschr. f. Krist. **19.** 560. 1891.

Ausscheidungsfolge: Zirkon, Erz, Hypersthen, Plagioklas, Sanidin; zur Ausscheidung von Quarz kam es bisher nicht. Die chemische Analyse (neu) des schwarzen glasreichen Gesteins der Steilküste von Calasetta ergab:

		Molekularprozente (wie stets nach Osanns Verfahren berechnet)		Osannparameter	
SiO_2	71.23	SiO_2	78.95	S	78.95
TiO_2	0.42	Al_2O_3	9.46	A	8.99
Al_2O_3	14.51	FeO	2.53	C	0.47
Fe_2O_3	1.56	MgO	0.07	F	2.13
FeO	1.27	Na_2O	4.86	*k*	1.38
MnO	—	K_2O	4.13	*n*	5.4
MgO	0.04	Summa	100.00	*a*	15.5
CaO	0.0			*c*	1.0
Na_2O	4.50			*f*	3.5
K_2O	5.86	H_2O — = 0.15		Alkalireihe γ	
Glühverlust	0.43	H_2O + = 0.16		Mit Al_2O_3 übersättigt	
P_2O_5	—	Summa = 0.31			
Summa	99.82				

Der Glühverlust beträgt also, von H_2O abgesehen, 0.12.
P_2O_5 war nur in Spuren vorhanden.

Durchschnittsfeldspat in Mol.-Prozenten:

Orthoklas	46.0
Albit	54.0
Summa	100.0

Der aus obiger Untersuchung der Einsprenglingsplagioklase fraglos folgende merkliche Anorthitgehalt derselben bringt also infolge ihrer Spärlichkeit keinen merklichen CaO-Gehalt des Durchschnittsfeldspates sowie des gesamten Gesteins mit sich. Die vorherrschende Glasbasis ist eben durch die Ausscheidung spärlicher Plagioklaseinsprenglinge praktisch bereits völlig von dem CaO des von vornherein offenbar sehr kalkarmen Magmas befreit. Analog scheint die ganze ebenfalls geringe MgO-Menge des Gesteins in den spärlichen Hyperstheneinsprenglingen konzentriert zu sein.

Das Gestein steht nach Gehalt an Alkalien und an SiO_2 sowie nach der Armut an CaO und MgO an der Grenze von Comendit und Pantellerit. Jedoch trifft der für diese letzteren Gesteine wie überhaupt für foyaitische Magmen charakteristische Überschuß von Alkali über Al_2O_3 nicht zu. Auch tritt Hypersthen innerhalb der Alkalimagmen im allgemeinen nur in den basischeren Gesteinen auf. So ähnelt unser Gestein chemisch wohl am meisten mexikanischen[1] Liparitobsidianen oder den Vitrophyren der Euganeen[1].

Aus obigen Oxydmolekülprozenten lassen sich folgende Mineralmolekülprozente herleiten, die aber zum größten Teil in der Glasbasis stecken würden.

Orthoklas	$K_2Al_2Si_6O_{16}$	33·04
Albit	$Na_2Al_2Si_6O_{16}$	38.88
Quarz	SiO_2	23·93
Augit oder Hornblende	$FeAl_2SiO_6$	1.41
Hypersthen	$FeSiO_3$	0.40
	$MgSiO_3$	0.14
Magnetit	Fe_3O_4	0.87
Ilmenit	$FeTiO_3$	0.68
Summa		99·35

Gewichtsprozente:

Orthoklas	44·9
Albit	49·9
Quarz	3·5
Hornblende oder Augit	0.8
Hypersthen	0.1
Magnetit	0.5
Ilmenit	0.3
Summa	100.0

b. Typus Sisineddu

(Mikrophoto s. Taf. II, Fig. 6 nebst Erläuterung).

Dieser Typ steht an in den Gegenden Sisineddu, Rocca della Guardia, Sottotorre, Bricco di Ciatti, Sa Scrocca Manna, Mercureddu, Merrixeddu, Seddas de Sa Murta (S. Antioco) sowie Guardia dei Mori, Punta Leone und Pescetti (S. Pietro).

Es sind helle, meist grauweiße, zuweilen rötlich oder graurot schlierige und schlackige Gesteine mit rauher Oberfläche und trachytischem Aussehen, welche mitunter (Guardia dei Mori, Carloforte) Fragmente eines schwärzlichen, schlackigen Pechsteins führen, der unweit Carloforte auch selbständig auftritt. Selten sieht man Quarzeinsprenglinge (Punta Leone, Mercureddu), aber oft zahlreiche, meist unter 0.5 cm große Einsprenglinge von Natronsanidin mit {010}, {001}, {110}, {021}, {$\bar{1}$11}, {$\bar{2}$01}, {130}, seltener solche von Kaliplagioklas auftreten. Ersterer ist tafelig || {010} und etwas gestreckt || $\grave{c}$ und besitzt stets Murchisonitteilung; gemessen wurde ∡ (001):(010) = 89° 59′ ± 2′, $\Theta_{001} = 0°$, $\Theta_{010} = +7^1/_2°$ bis $+8°$ mit $\rho < v$. Diese Natronsanidine irisieren niemals, sondern neigen zu milchiger Opaleszenz oder auch zu Mikroperthitbildung — wahrscheinlich geht in ihnen die Umwandlung monoklin-triklin infolge ihres gegenüber den Feldspäten der Comendite höheren CaO-Gehaltes etwas schneller vor sich.

---

[1] Rosenbusch, Gesteinslehre 1910, S. 327, Analyse 13 und S. 326, Analyse 1a.

Auf den Wandungen der miarolithischen Hohlräume des Liparit von der Punta Leone (S. Pietro) sind viele Kriställchen von Natronsanidin aufgewachsen; ihr Maximaldurchmesser ist 1 mm. Sie bilden sehr dünne (< 0.1 mm) Tafeln || {001}, die nach $\grave{a}$ gestreckt und mit einem Ende dieser Achse aufgewachsen sind. Sie zeigen {001} und sehr schmal {010}, {100}, {$\bar{1}$01}, {$\bar{2}$01}, so daß die Tafelfläche als Rechteck erscheint, doch treten öfters {110} und {130}, wenn auch sehr klein, hinzu. Da die Reflexe gut waren, wurden einige Winkel gemessen, das Achsenverhältnis berechnet und aus diesem ein Teil der Winkel zurückberechnet. Da sich bezeichnenderweise die Winkel, soweit es die monokline Symmetrie zuläßt, denjenigen des Albit nähern, so habe ich im folgenden neben die von mir an 5 Kristallen erhaltenen Durchschnittsdaten des Natronsanidin einige nach Dana (System. 1892, 316 ff.) berechnete Daten des normalen Orthoklas, des Albits und des Anorthits gestellt.

Winkel	Natronsanidin		Adular	Albit	Anorthit
	gemessen	berechnet	berechnet	berechnet	berechnet
(001):(010)	90° 1′ ± 2′	90° 0′	90° 0′	—	—
(001):(100)*	63 $37^1/_2$ ± 3	—	63 56 46″	63° 34′ 45″	63° 57′
(001):(101)	51 $13^1/_2$ ± 3		50 16 30	52 16	51 26
(001):($\bar{2}$01)	81 14 ± 3	81 16	80 18	82 7	81 14
(001):(110)	67 18 ± 3	67 $21^1/_2$	67 47	—	—
(110):(1$\bar{1}$0)*	59 52 ± 3	—	61 13	59 14	59 29
(10$\bar{1}$):(110)	68 29 ± 4	68 39	69 19	—	—
(110):(201)	44 31 ± 4	44 51	45 42	—	—
(010):(130)	30 6 ± 3	30 $3^1/_2$	29 24	—	—

Achsenverhältnisse.

	a	b	c	∡ β	∡ (001) : (100)
Natronsanidin	0.6429	1	0.5524	63° 37½′	63° 37½′
Adular	0.65851	1	0.55538	63 56 46″	63 56 46″
Albit............	0.63347	1	0.55771	63 31 10	63 34 45
Anorthit.........	0.63473	1	0.55007	64 4 30	63 57

Die chemische Zusammensetzung dieses Natronsanidins von der Punta Leone dürfte annähernd mit derjenigen der aus den Lipariten des Birincampotyp weiter unten zu beschreibenden ($Or_{43} Ab_{43} An_{14}$, s. S. 44) übereinstimmen. Seine optische Achsenebene fand ich stets ⊥ {010}, die Dispersion der optischen Achsen $\rho > v$, den optischen Charakter negativ und den Winkel $\mathfrak{a} : \dot{a} = + 7° 30' \pm 20'$. Die stets normalsymmetrische Achsenlage dieser Natronsanidine erscheint verständlich, wenn man dieselben nach obiger Analyse als Mischungen von Orthoklas mit einem Oligoklasalbit von 90 Mol.-Prozent Albit + 10 Mol.-Prozent Anorthit betrachtet und bedenkt, daß die optische Achsenebene dieses Kalknatronfeldspates bei großem Achsenwinkel um $\mathfrak{a}$ nur um etwa 7° von normalsymmetrischer Lage und ihre Spur auf {010} höchstens um 7° von derjenigen des Adular abweicht.

Der Kaliplagioklas ist infolge vieler Risse weißlich trübe, isometrisch und mit vielen feinen Lamellen nach dem Albitgesetz sowie mit Murchisonitabsonderung ausgestattet; ich erhielt folgende Daten:

	Sisineddu	Rocca della Guardia	Sa Scrocca Manna	Seddas de Sa Murta	Guardia dei Mori
Θ_{001}	2°	2°	2	1½	1½
Θ_{010}	$-7°$ mit $\rho > v$	$-6°$ mit $\rho > v$	$-6°$ mit $\rho > v$	$-6°$ mit $\rho > v$	$-4°$ mit $\rho > v$
∡ (001) : (010)	—	86° 51′	—	—	—
Mol.-Prozent Albit	60	60	60	60	65
» » Anorthit	40	40	40	40	35

Die angeführten Mol.-Prozente Albit und Anorthit ergeben sich aus den beobachteten Auslöschungsschiefen unter der Annahme, daß kein erheblicher Kaligehalt vorhanden ist, was jedoch nicht zutrifft; dieser Kaligehalt verursacht wohl auch die Vergrößerung des Spaltungswinkels (001) : (010) von 86° 14′ (Andesin) oder 86° 32′ (Oligoklas) bis auf obigen Wert von 86° 51′. Die Dispersion $\rho > v$ der Auslöschungsrichtung kleinerer Elastizität in (010), gemessen gegenüber [100] gilt für alle diejenigen Plagioklase, welche negative Auslöschungsschiefe auf (010) haben, die Dispersion

$\rho < v$ für alle Feldspäte mit positiver Schiefe Θ_{010}; die Dispersionsbestimmung kann daher oft zur Ermittlung des Vorzeichens der Auslöschungsschiefe dienen, während die Dispersion auf (001) oft, besonders bei kleinen Auslöschungsschiefen, sehr undeutlich ist.

Im Dünnschliff ist der Plagioklas oft von Sanidin orientiert umwachsen, wobei die beiderseitige Grenze bald kristallographisch, bald unregelmäßig ist, was auch von dem Außenrande des Sanidins gilt.

Die Rotfärbung einiger dieser Gesteine beruht auf sekundärer Bildung von Limonit und von Eisenglanz, welch letzterer zuweilen feine Krusten auf Kluftflächen bildet; die Kriställchen dieser Überzüge haben 0.15 mm Maximaldurchmesser und die Formen $\{100\}$, kleiner $\{10\bar{1}\}$ und sehr schmal $\{110\}$; sie sind gestreckt $\parallel [(100):(10\bar{1})] = [010]$; $\measuredangle (100):(10\bar{1}) = 42° 51^1/_2' \pm 5'$ gemessen, $= 43° 0'$ berechnet.

An dunklen Gemengteilen beobachtet man neben den hellen makroskopischen u. d. M. unregelmäßige Körner von Hornblende mit $\mathfrak{c} : c' = 15°$, $\mathfrak{b} \parallel \bar{b}$; $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ farblos bis lichtgraugelb, $\mathfrak{c}$ hellolivbraun bis dunkelbraunrot; die dunkleren Varietäten haben erheblich stärkere Doppelbrechung, wahrscheinlich sind in diesen dem Aktinolith merkliche Mengen Grünerit beigemischt; diese Hornblenden sind oft von so zahlreichen kleinen Magnetitkörnchen erfüllt, daß sie zwischen gekreuzten Nicols nur an einzelnen kleinen Stellen namentlich am Rande, aufhellen.

Nicht selten finden sich bastitartige Pseudomorphosen von hellgrüngelbem Serpentin, Talk, Eisenoxyd, häufig mit orientiert umrandeten oder auch kreuz und quer gestellten Stengeln einer sehr hellen Hornblendevarietät, die zuweilen ins Asbestartige übergeht. Der Serpentin, der zuweilen etwas faserig erscheint, zeigt auf der Absonderungsfläche senkrechten Austritt der negativen Bisectrix eines ziemlich kleinen spitzen Winkels der optischen Achsen mit der Dispersion $\rho > v$.

Diese Pseudomorphosen sind besonders häufig mit Magnetit oder Ilmenit, kurzen Säulen mit Pyramide von Zirkon und spärlicheren gedrungenen sechsseitigen Apatitstengeln vergesellschaftet.

Die Grundmasse ist in der Regel ein Pflaster von zackig ineinandergreifenden Quarzkörnern, die entweder von Feldspatleisten, $\parallel [100]$ gestreckt, wirr durchspickt sind oder auch einen Feldspatsphärokristall führen; oft sind auch die einzelnen Quarzkörnchen durch trachytoide Feldspataggregate voneinander getrennt. In diesen Grundmassen tritt zuweilen noch eine Hornblende auf, die, hier und da {010} und {110} erkennen lassend, meist mit je einem Individuum Zwickel zwischen den Grundmassefeldspäten ausfüllt; sie zeigt $\mathfrak{b} \parallel \bar{b}$ und $\mathfrak{c} : c' = 21°$ mit $\rho > v$ und den Pleochroismus $\mathfrak{a}$ hellgelb, $\mathfrak{b}$ rötlichbraun, $\mathfrak{c}$ grün.

Sehr häufig werden kleine Zwischenräume zwischen den Grundmassefeldspäten, die meist Sanidin, selten Plagioklas darstellen und häufig von zahllosen hellen winzigen Glaströpfchen erfüllt sind, durch Aggregate von Tridymitviellingen ausgefüllt. Seltener ist die Grundmasse ein dichtes, gleichmäßig mikrogranitisches oder schlierenartig abwechselnd gröberes und feineres Quarzfeldspatgemenge, das dann von Biotitflittern, vielen winzigen Eisenglanzkörnchen und nadelförmigen farblosen oder gelben Mikrolithen, vereinzelten grünen Augitnädelchen und spärlichen Mikrofelsitsphärolithen (opt. +) durchsetzt ist; noch seltener ist braunes Glas, im gewöhnlichen Licht fluidal schlierig, zwischen gekreuzten Nicols sphärolithisch mit optisch negativem Charakter.

Die Ausscheidungsfolge war, soweit zu erkennen: Zirkon und Apatit, Erz, Hornblende, Plagioklas, Sanidin, Quarz. Es wurden zwei neue Analysen ausgeführt:

1. Sisineddu (S. Antioco); weißes trachytoid aussehendes Gestein mit Pflasterstruktur.

2. Rocca della Guardia (S. Antioco), dem vorigen äußerst ähnlich.

	1	2
SiO_2	71.21	71.81
TiO_2	0.20	0.23
Al_2O_3	14.95	14.44
Fe_2O_3	1.81	2.77
FeO	—	—
MnO	—	—
MgO	0.15	—
CaO	0.63	0.60
Na_2O	3.97	3.37
K_2O	5.83	6.08
Glühverlust	1.13	1.00
P_2O_5	—	—
Summa	99.88	100.30
$H_2O -$ =	0.04	0.19
$H_2O +$ =	0.60	0.52
Summa =	0.64	0.71

Der Glühverlust außer H_2O beträgt demnach 0.49 bei 1 und 0.29 bei 2.

P_2O_5 und FeO fanden sich in beiden Gesteinen spurenweise, ebenso MgO in 2.

Molekularprozente

	1	2
SiO_2	79.53	79.65
Al_2O_3	9.49	9.41
FeO	1.52	2.27
MgO	0.25	—
CaO	0.75	0.73
Na_2O	4.30	3.61
K_2O	4.16	4.33
Summa	100.00	100.00

Osannparameter

	1	2
S	79.53	79.65
A	8.46	7.94
C	1.03	1.47
F	1.49	1.53
k	1.46	1.53
n	5.1	4.5
a	15.5	14.5
c	2.0	2.5
f	2.5	3.0
Alkalireihe	γ	γ
An Al_2O_3	übersättigt	übersättigt

Hiernach ähnelt dieser Typ dem Osannschen[1] Liparittypus »Red Mountain« mit

$$S = 82.5, \ a = 14.5, \ c = 2.0, \ f = 3.5.$$

Durchschnittsfeldspat in Molekularprozenten.

	1	2
Orthoklas	48.5	52.0
Albit	47.5	43.5
Anorthit	4.0	4.5
Summa	100.0	100.0

Hierbei wurde alles CaO der Analyse auf Anorthit verrechnet. Daß die Anorthitziffern trotzdem so niedrig ausfallen gegenüber den oben aus den Auslöschungsschiefen für die Kaliplagioklase geschätzten Anorthitwerten, erklärt sich aus der bereits erwähnten Spärlichkeit dieser Plagioklase gegenüber den Natronsanidinen.

Mineralmolekülprozente.

		1	2
Orthoklas $K_2Al_2Si_6O_{16}$		33.28	34.64
Albit $Na_2Al_2Si_6O_{16}$		34.40	28.88
Anorthit $CaAl_2Si_2O_8$		2.44	2.64
Quarz SiO_2		26.46	29.19
Hornblende und Hypersthen	$FeAl_2SiO_6$	1.26	2.43
	$MgSiO_3$	0.50	—
	$FeSiO_3$	0.22	0.36
	$CaSiO_3$	0.28	0.14
Eisenglanz Fe_2O_3		0.35	0.89
Ilmenit $FeTiO_3$		0.34	0.38
	Summa	99.53	99.55

---

[1] Osann, Min. Petr. Mitt. 20, 402, 1901.

Hierbei wurde $^1/_3$ so viel CaO als $(Mg, Fe)O$ als Metasilikat berechnet; statt der sekundären Minerale Bastit und Limonit wurden unter Rekonstruktion des ursprünglichen Gesteins Hypersthen und Eisenglanz angenommen.

Gewichtsprozente.

	1	2
Orthoklas	47.1	51.1
Albit	45.8	40.1
Anorthit	1.6	1.8
Quarz	4.1	4.7
Hornblende u. Hypersthen	1.0	1.7
Eisenglanz	0.2	0.4
Ilmenit	0.2	0.2
Summa	100.0	100.0

Zu diesem Liparittyp gehört vielleicht auch der von Bertolio[1] analysierte Pechstein, der an den Hügeln zwischen Carloforte und Paradiso ansteht und auch in Gestalt von Einschlüssen in Bertolios »glasigem Trachyt« der Umgebung von Carloforte auftritt; er zeigt nach Bertolio Natronsanidin, Oligoklas und braunes Glas. Die Analyse ergab ihm:

---

[1] Bertolio, Boll. R. Com. Geol. Ital. **25.** 411. Roma 1894.

Die Einschlüsse in Bertolios »glasigem Trachyt«, die nach Bertolio mit obigem Pechstein identisch sind, analysierte — allerdings mit recht abweichendem Ergebnis — auch Eigel (Min. Petr. Mitt. **8.** 62. 1887), indem er sie als Einschlüsse schwarzen Obsidians in grauen oder rötlichen »Trachyten« zwischen Becco und Carloforte sowie bei Carloforte und auch am Capo Spalmatore (S. Pietro) erwähnt. Neben dieser Analyse (I) teilt Eigel noch diejenige eines »Quarztrachyts« von den Salinen bei Carloforte (II) sowie diejenige eines »Rhyoliths« vom Capo Spalmatore (III) mit. Diese 3 hier anhangsweise wiedergegebenen Analysen erscheinen wegen ihrer Unvollständigkeit nicht diskutabel.

	I	II	III
SiO_2	70.03	75.40	76.84
Al_2O_3	18.63	18.25	5.87
Fe_2O_3	0.11	2.47	3.92
FeO	—	—	0.87
MnO	—	—	0.73
MgO	0.10	—	0.52
CaO	2.62	1.57	3.34
$Na_2O + K_2O$	3.15	—	5.41
Glühverlust	4.28	—	1.69
Summa	98.92	—	99.19

Statt Summa 98.92 gibt Verfasser 99.12 an.

SiO_2	79.1
Al_2O_3	8.2
Fe_2O_3	1.3
FeO	—
MgO	0.9
CaO	1.1
Na_2O	3.4
K_2O	2.2
H_2O	3.8 (Differenz)
Summa	100.0

Molekularprozente	
SiO_2	85.8
Al_2O_3	5.2
FeO	1.1
MgO	1.5
CaO	1.3
Na_2O	3.6
K_2O	1.5
Summa	100.0

Osannparameter	
S	85.8
A	5.1
C	0.1
F	3.8
k	2.5
n	7.1
a	11.5
c	—
f	8.5
Alkalireihe	β
An Al_2O_3 gesättigt	

Dieser Pechstein Bertolios nähert sich Osanns[1] Liparittyp »Auer a. d. Etsch« mit $S = 81$, $a = 11$, $c = 0$, $f = 9$, der bisher nur pechsteinartig bekannt ist.

Als Durchschnittsfeldspat findet man, wenn man alles Na_2O und K_2O und sodann soviel CaO an Al_2O_3 bindet, als letzteres gestattet:

Mol.-Prozent	Orthoklas	29.0
»	»	Albit	70.0
»	»	Anorthit	1.0
		Summa	100.0

Bedenkt man, daß auf diese Weise nur 0.1 Mol.-Prozent CaO an Al_2O_3 gebunden werden, dagegen 1.2 ungebunden bleiben, während im allgemeinen in unsern Gesteinen die Hauptmenge des CaO den Feldspäten zugehört, so möchte man wohl eine größere Menge Al_2O_3 an CaO und einen entsprechenden Alkalibetrag von Al_2O_3 auf Fe_2O_3 übertragen. Sodann wären aber diese Pechsteine als Comendite zu betrachten, wofür auch der hohe SiO_2-Gehalt spricht; das wäre aber von geologischer Bedeutung, da jene Pechsteine nach Obigem auch als Einschlüsse in Lipariten auftreten. Der hohe CaO-Gehalt und die Sättigung des Gesteins (in Osanns Sinn) als Al_2O_3 hielten mich jedoch von einer Zuordnung zu den Comenditen ab.

Die Größe der Natronvormacht ist hier wieder, wie in allen Analysen Bertolios, ganz abnorm, und die Größe der Ziffer von SiO_2 um so auffallender, als gewöhnlich gerade die sauersten Gesteine Kalivormacht besitzen.

c. Typus Grotta Canargius

(Mikrophoto s. Taf. II, Fig. 7 nebst Erläuterung).

Diesen Typ repräsentieren die Gesteine der Grotta Canargius bei der Stadt S. Antioco, die zum Teil auch in groben, Lapilli und Bomben führenden Breccien auftreten, sowie solche von Mercureddu, vom Stagno Cirdu und von Sa Scrocca Manna auf S. Antioco.

Es sind graue bis schwarze oder aus 0.1 bis 0.5 mm dicken grauen und grauroten, schaumigen und kompakten Schlieren aufgebaute und dann sich plattig absondernde Gesteine, die stets glasig und zuweilen perlitisch oder auch sphärolithisch struiert sind und makroskopisch meist nur spärliche und kleine, weiße Feldspateinsprenglinge, seltener Biotitblättchen, erkennen lassen.

---

[1] Osann, Min. Petr. Mitt. 20. 402. 1901.

Zuweilen (Stagno Cirdu) enthalten sie kleine Fragmente roten Liparites vom nächstfolgenden Typ eingeschlossen. Auf ihrer Oberfläche ziehen sich manchmal traubige Krusten von trübem, seidenglänzendem Hyalith hin, der keine optischen Spannungen zeigt.

Der Feldspateinsprengling ist teils Kaliplagioklas mit Lamellen nach dem Albit-, oft auch nach dem Periklingesetz, teils Natronsanidin, der oft Carlsbader, selten Bavenoer Zwillingsbildung aufweist, bisweilen Hämatitblättchen (vielleicht in regelmäßiger Orientierung) enthält und öfters als orientierter Saum den Plagioklas umgibt. Der Natronsanidin vom Stagno Cirdu ergab: $\measuredangle(001):(010) = 89^\circ 58' \pm 3'$, $\Theta_{001} = 0^\circ$, $\Theta_{010} = +5^1/_2{}^\circ, +7^\circ$ und $+7^1/_2{}^\circ$ mit $\rho < v$.

Am Kaliplagioklas fand ich:

	Stagno Cirdu	Sa Scrocca Manna	Grotta Canargius
$\measuredangle(001):(010)$	$86^\circ 20' \pm 12'$	$86^\circ 34' \pm 5'$	—
Θ_{001}	2°	3°	$2^1/_2{}^\circ$
Θ_{010}	-6° mit $\rho > v$	$-9^1/_2{}^\circ$ mit $\rho > v$	-9° mit $\rho > v$
Mol.-Prozent Albit	65	60	60
» » Anorthit	35	40	40

Mit HF ergab der Plagioklas vom Stagno Cirdu viel Na_2SiF_6, weniger K_2SiF_6 und $CaSiF_6$; wenn man von dem Kaligehalt absieht, so erhält man aus dem optischen Befund die angeführten Molekularproportionen von Albit : Anorthit.

Die obigen Werte des Spaltungswinkels wurden berechnet aus Messungen an Spaltflächen (001) und $(\underline{00\bar{1}})$ der Zwillinge des Albitgesetzes; so lieferte $\measuredangle(001):(\underline{00\bar{1}}) = 7^\circ 20'$ den $\measuredangle(001):(010) = 86^\circ 20'$ und $\measuredangle(001):(\underline{00\bar{1}}) = 6^\circ 52'$ den $\measuredangle(001):(010) = 86^\circ 34'$. Infolge von Schichtenbau oder regelmäßiger Verwachsung verschiedener Plagioklasmischungen lieferte eine Partie eines Kristalles von Stagno Cirdu $\measuredangle(001):(\underline{00\bar{1}}) = 5^\circ 6'$ statt $7^\circ 20'$ und ein kleiner Teil eines Kristalles von Sa Scrocca Manna $\measuredangle(001):(\underline{00\bar{1}}) = 5^\circ 58'$ statt $6^\circ 52'$; das ergäbe $\measuredangle(001):(010) = 87^\circ 17'$ (Stagno Cirdu) und $87^\circ 1'$ (Sa Scrocca Manna). Es handelt sich da wohl um noch kalireichere Plagioklase oder typische Anorthoklase, für welch letztere Rosenbusch[1] ∡ (001):(010) = 87° 48′ bis 89° 31′ angibt[2]. Zugleich bestand jedoch die Möglichkeit, daß die abnorme Kleinheit obiger gemessenen Spaltungswinkel auf Lamellen nach dem Periklin- statt nach dem Albitgesetz zurückzuführen wäre und (010) nebst $(\underline{010})$ statt (001) nebst $(\underline{00\bar{1}})$ vorlägen, zumal man die optischen Beziehungen zwischen (001) und (010) der Kaliplagioklase nicht von vornherein als bekannt voraussetzen darf und daher bei den winzigen Fragmenten dieser äußerst mürben und bröckeligen und oft knäuelförmig verwachsenen Feldspäte durchaus nicht leicht zwischen (001) und (010) entscheiden kann. Die Rechnung ergab für die verschiedenen triklinen Feldspatarten folgendes:

	Albit	Oligoklas	Andesin	Labradorit	Anorthit	Anorthoklas	
∡ (001):(010) =	86° 24′	86° 32′	86° 14′	86° 8′	85° 50′	87° 17′	89° 31′
∡ [100]:[010] =	88 8 40″	90 4 30″	89 58 50″	89 54 30″	91 11 40″	90 17	90 17
∡ (001):$(\underline{00\bar{1}})$ = (Albitgesetz)	7 12	6 56	7 32	7 44	8 20	5 26	0 58
∡ (010):$(\underline{010})$ = (Periklingesetz)	8 6	6 56	7 32	7 44	8 40	5 28	1 8

Für diese Berechnung sind für die Kalknatronfeldspäte die ∡ (001):(010) und [100]:[010] aus Dana[3] genommen, für die Anorthoklase ∡ (001):(010) = 89° 31′ aus Rosenbusch[4], ∡ [100]:[010] = 90° 17′ aus Fouqué[5] und ∡ (001):(010) = 87° 17′ aus unsern obigen Messungen (Stagno Cirdu).

Man sieht, daß zwar bei Albit und Anorthit, nicht aber bei Oligoklas, Andesin, Labradorit und Anorthoklas, die ja für unsern Fall allein in Betracht kommen, merkliche Differenzen zwischen ∡ (001):$(\underline{00\bar{1}})$ des Albitgesetzes und ∡ (010):$(\underline{010})$ des Periklingesetzes auftreten.

Der Biotiteinsprengling bildet sechseitige Täfelchen mit gerundeten Ecken und Kanten und zeigt im Dünnschliff Stauchung, Zwillingsbildung nach [310], tiefbraun-hellgelben Pleochroismus mit dem Absortionsschema $\mathfrak{a} < \mathfrak{b} < \mathfrak{c}$, relativ großen Achsenwinkel mit der Dispersion $\rho < v$ und Achsenebene ‖ (010) (Grotta Canargius). Im Gestein vom Stagno Cirdu treten an

---

[1] Rosenbusch-Wülfing, Mikrosk. Physiogr. 2. 326. 1905.

[2] Mügge (N. Jahrb. f. Min. usw. Blge. Bd. 4. 591. 1886) fand an Anorthoklasen eines Ägirintrachyts vom Naiwashasee ∡ (001):(010) = $87^{1}/_{2}$° bis 89° und (ebenda 1881. II. 112) an »Rhombenfeldspäten« von Tyveholmen 88° 14′ bis 90° und Kjerulf (Christiania-Silurbecken 1855. 29) an »Rhombenfeldspäten« vom Holsfjord »etwa 87°«.

[3] Dana, System 1892. 327ff.

[4] Rosenbusch-Wülfing, Mikrosk. Physiogr. 2. 326. 1905.

[5] Fouqué, Bull. Soc. minér. France 6. 197. 1884 und 17. 397. 1894.

Stelle von Biotit als farbige Einsprenglinge Hypersthenstengel $\parallel c'$ mit dem bekannten hellgrünlich bis hellrötlichen Pleochroismus sowie grüne nicht pleochroitische Diopsidsäulen $\parallel c'$. Akzessorisch finden sich Magnetit und Ilmenit, Zirkon und Apatit.

Die Grundmasse stellt u. d. M. einen von braunem oder hellem und dann blasigem Glas durchtränkten Filz fluidal geordneter Mikrolithe von Feldspat, Biotit und sehr spärlichem Diopsid dar, oder sie enthält braune Mikrofelsit-Sphärolithe (im reflektierten Lichte graublau) von optisch positivem Charakter; diese erreichen Durchmesser von 5 mm, ragen oft mit körneliger Oberfläche aus den Bruchflächen des Gesteins hervor oder fallen unter Hinterlassung glattwandiger Hohlräume aus dem Gestein heraus. Sie sind heller grau als die übrige Glasbasis und zeigen mikroskopisch öfters ein eingeschlossenes Biotitblättchen sowie einen feinen hellen Saum, der wohl einen Kristallisationshof bedeutet, genetisch ähnlich demjenigen, der z. B. im Pechstein von Arran die dunklen, farnkrautartigen Ausscheidungen umgibt. Die Feldspatmikrolithe, gestreckt $\parallel [100]$, besitzen oft Stiefelknechtform, die Biotitmikrolithe, tafelig $\parallel (001)$ mit sechsseitigem Umriß, zeigen $\mathfrak{a}$ hellbraun, $\mathfrak{b} = \bar{b}$ braungrün, $\mathfrak{c}$ tiefbraun. Quarz ist anscheinend noch nicht zur Kristallisation gelangt.

Die Ausscheidungfolge ist: Zirkon + Apatit (nirgends miteinander in Berührung), Erz, Hypersthen, Augit, Plagioklas, Sanidin, Mikrolithe von Feldspat oder Sphärolithe; in den biotithaltigen Gesteinen treten Biotiteinsprenglinge zeitlich an die Stelle von Hypersthen und von Augit, Biotitmikrolithe zwischen Feldspateinsprenglinge und Feldspatmikrolithe.

Die chemische Analyse (neu) des pechsteinartigen Biotit-Liparit der Grotta Canargius ergab

		Molekularprozente		Osannparameter	
SiO_2	70.03	SiO_2	78.76	S	78.76
TiO_2	0.34	Al_2O_3	9.00	A	6.96
Al_2O_3	13.56	FeO	3.52	C	2.04
Fe_2O_3	3.20	CaO	1.76	F	3.24
FeO	0.89	Na_2O	3.99	k	1.60
MnO	—	K_2O	2.97	n	5.7
MgO	0.0	Summa	100.00	a	11.5
CaO	1.43			c	3.5
Na_2O	3.69			f	5.0
K_2O	4.16			Alkalireihe β	
Glühverlust	3.04	H_2O −	= 0.33	An Al_2O_3 übersättigt	
P_2O_5	—	H_2O +	= 2.30		
Summa	100.34	Summa	= 2.63		

Der Glühverlust beträgt also außer H_2O 0.41 Prozent. P_2O_5 war spurenweise vorhanden.

Durchschnittsfeldspat in Molekularprozenten.

Orthoklas	38.0
Albit	51.0
Anorthit	11.0
Summa	100.0

Das Gestein ähnelt hiernach **Osanns**[1] Liparittypen »Sunset Peak« mit $S = 78$, $a = 12.5$, $c = 3.5$, $f = 4$ oder »Crater Lake« mit $S = 78$, $a = 10.5$, $c = 3.5$, $f = 6$, z. B. dem hierhergehörigen Liparit von Hlidarfjall auf Island und anderen präglazialen und jüngeren isländischen Liparitströmen, die ebenfalls oberflächlich oft Obsidianfazies aufweisen; sie werden von **Rosenbusch** an die Grenze gegen die Dazite gestellt, die sich etwa mit **Osanns** Dazittyp »Hvituskridur« ($S = 75.5$, $a = 13$, $c = 2$, $f = 5$) hier anreihen lassen würden.

Mineralmolekülprozente.

Orthoklas $K_2Al_2Si_6O_{16}$	22.64
Albit $Na_2Al_2Si_6O_{16}$	31.92
Anorthit $CaAl_2Si_2O_8$	7.04
Quarz SiO_2	32.23
Biotit $Fe_2SiO_4(H,K)_2Al_2Si_2O_8$	2.94
Magnetit Fe_3O_4	3.42
Ilmenit $FeTiO_3$	0.52
Summa	100.71

Hierbei wurde für Biotit $H : K = 3 : 2$ gesetzt und in Ermangelung von MgO als $\overset{\prime\prime}{R}O$ lediglich FeO verwendet, was z. B. Biotiten von Miask und von Brevig entspricht. Da TiO_2 kaum je über 4 Prozent im Biotit enthalten ist, so wurde es völlig auf Ilmenit verrechnet.

Bei dieser ganzen Berechnung muß natürlich das in Wirklichkeit sehr glasreiche Gestein als völlig entglast gedacht werden.

Gewichtsprozente.

Orthoklas	35.9
Albit	47.4
Anorthit	5.2
Quarz	5.5
Biotit	3.5
Magnetit	2.3
Ilmenit	0.2
Summa	100.0

---

[1] Osann, Min. Petr. Mitt. **20.** 404. 1901.

Zu diesem Liparittyp gehört vielleicht auch noch ein von Delesse[1] analysierter Pechstein der Grotta dei Colombi an der Küste von Mercureddu auf S. Antioco mit Sanidin, Biotit und Sphärolithen von mehr als 1 cm Durchmesser, die etwas heller als das Glas und von Sanidinkriställchen unregelmäßig durchspickt sind.

SiO_2	70.59
Al_2O_3	13.49
Fe_2O_3	—
FeO	1.60
MnO	0.30
MgO	0.70
CaO	1.31
Na_2O	3.52
K_2O	4.29
Glühverlust	3.70
Summa	99.50

Molekularprozente nach Osanns Verfahren	
SiO_2	79.59
Al_2O_3	8.95
FeO	1.50
MnO	0.28
MgO	1.18
CaO	1.58
Na_2O	3.84
K_2O	3.08
Summa	100.00

Osannparameter.	
S	79.59
A	6.92
C	2.03
F	2.51
k	1.66
n	5.5
a	12.0
c	3.5
f	4.5
Alkalireihe	γ

An Al_2O_3 übersättigt

Dieser von Delesse analysierte Pechstein ähnelt Osanns[2] Liparittyp »Sunset Peak« mit $S = 78$, $a = 12.5$, $c = 3.5$, $f = 4$.

Als Durchschnittsfeldspat findet man, wenn man alles Na_2O und K_2O und sodann soviel CaO an Al_2O_3 bindet, als letzteres gestattet:

Mol.-Prozent	Orthoklas	40.0
" "	Albit	50.0
" "	Anorthit	10.0
	Summa	100.0

---

[1] Delesse, Bull. Soc. géol. France (2) **11.** 108. Paris 1854; auch zitiert von Lamarmora (a. a. O.) und von Roth, Die Gesteinsanalysen, Berlin 1861. 15.

[2] Osann, Min. Petr. Mitt. **20.** 402. 1901.

Für die Sphärolithe seines Pechsteins fand Delesse

SiO_2	72.20
Al_2O_3	15.65
FeO	1.64
MnO	0.50
MgO	0.62
CaO	0.98
Na_2O	5.52
K_2O	1.71
H_2O	1.12
Summa	99.94

Hiernach sind die Sphärolithe reicher an SiO_2, Al_2O_3 und Na_2O, ärmer an CaO und K_2O als das Gesamtgestein.

d. Typus Birincampo

(Mikrophoto s. Taf. II, Fig. 8 nebst Erläuterung).

Gesteine dieses Typs stehen an in den Gegenden Birincampo und Canale del Baccio (S. Pietro) sowie hinter dem alten Turm von Calasetta und in den Gebieten Pabirongu, Bricco di Ciatti und Cala Lunga (S. Antioco).

Es sind rote, holokristalline und trachytisch rauhe, oft aus hellrötlichgrauen, miarolithischen und braunroten kompakten Schlieren bestehende Gesteine, die als Einsprenglinge Natronsanidine und überwiegend Kaliplagioklase führen. Erstere sind wasserklar, tafelig $\parallel \{010\}$ mit 3 mm Maximaldurchmesser und wenig ausgeprägter Murchisonitspaltung, zuweilen etwas mikroperthitisch. Die Kaliplagioklase sind weißlich bis gelblich trübe, isometrisch, mit unbestimmbaren Flächen, gerundet oder korrodiert, und 5 mm maximalem Durchmesser, stets voller Lamellen nach dem Albitgesetz, öfters auch nach dem Periklingesetz, mit ausgeprägter Murchisonitabsonderung und äußerst mürbe und bröcklig. Nicht selten längs unregelmäßiger Grenze von Sanidinmänteln orientiert umwachsen, bilden sie häufig knäuelartige Aggregierungen. Ihre Zwillingslamellen setzen oft in den Sanidinsaum fort, wo sie undeutlicher werden und auskeilen; der Plagioklaskontakt scheint eine Umwandlung des instabileren Natronsanidins in den stabileren Anorthoklas katalytisch herbeizuführen. Plagioklas wie Sanidin sind oft nach c' verzwillingt.

Der Natronsanidin zeigt stets normalsymmetrische Achsenebene mit der Dispersion $\rho > v$ der optischen Achsen, $\Theta_{001} = 0°$, $\Theta_{010} = +7°$ mit $\rho < v$

(Birincampo); Herzenberg (a. a. O.) fand an dem gleichen Vorkommen $\measuredangle(001):(010) = 89°58' \pm 10'$ und bei Natriumlicht $\Theta_{001} = 0°0' \pm 5'$ und $\Theta_{010} = +6°56' \pm 4'$. An Kaliplagioklasen fand ich

	Birincampo	Canale del Baccio	Pabirongu	Calasetta	Calasetta
$\measuredangle(001):(010)$	86° 9′ bis 87° 6′	—	—	—	—
Θ_{001}	+2° 9′	$2^1/_2$°	4°	1°	$1^1/_2$°
Θ_{010}	$-4°57'$ $\rho > v$	$-6^1/_2°$ $\rho > v$	$-12°$ $\rho > v$	$+4^1/_2°$ $\rho > v$	$+4^1/_2°$ ρ [illegible] v
$\Theta_{maxim.}$ der Schnitte ⊥ (010)	—	—	23°	—	—
Mol.-Prozent Albit	60	60	55 bis 60	75	75
» » Anorthit	40	40	45 bis 40	25	25

Diese Molekularprozente würden aus den Auslöschungsschiefen von {010} folgen, wenn nicht der Kaligehalt die optischen Eigenschaften der Kalknatronfeldspäte modifizierte. Herzenberg (a. a. O.) fand (Birincampo) bei Natriumlicht $\Theta_{001} = 3°24' \pm 5'$ und $\Theta_{010} = -2°27' \pm 5'$. Das Vorzeichen der Auslöschungsschiefe auf (001), das Herzenberg nicht zu bestimmen gelang, ist nach meinen obigen Feststellungen an sorgfältig orientierten Dünnschliffen des Materials von Birincampo positiv, während die Schiefe auf (010) negativ ist; an kaliarmen Plagioklasen wurde ein solches Verhalten niemals beobachtet. Bedenkt man, daß reiner Mikroklin auf (001) +14°, auf (010) +7° Schiefe besitzt, reiner Labradorit (Mol.-Prozent Albit = 51.5, Anorthit = 48.5) aber auf (001) −5°, auf (010) −14°, und daß im Kaliplagioklas von Birincampo nach der folgenden Analyse eine Mischung von Mikroklin mit ebenjenem reinen Labradorit vorliegt, so erscheint es verständlich, daß auf (001) die größere positive Schiefe des Mikroklins über die kleinere negative des Labradorits überwiegt, auf (010) aber umgekehrt die größere negative des Labradorits über die kleinere positive des Mikroklins. Rosenbusch[1] gibt für verschiedene Anorthoklase nur positive Schiefen auf (001) und auf (010) an, nämlich 1° bis 4.6° auf (001) und 9° bis 6.5° auf (010), was wohl auf Mischungen von Mikroklin mit Oligoklasalbit oder mit Albit hinweist.

Herzenbergs (a. a. O.) Analysen des Natronsanidins (I) und des Kaliplagioklas[2] (II) von Birincampo ergaben:

	I	II
SiO_2	64.99	60.14
Al_2O_3	19.34	24.52
Fe_2O_3	1.36	1.28
MgO	—	0.38
CaO	2.50	7.81
Na_2O	4.37	4.58
K_2O	6.66	2.25
Summa	99.22	100.96

---

[1] Rosenbusch-Wülfing, Mikrosk. Phys. **2**. 327. 1905; Mügge gab für Rhombenfeldspat von Tyveholmen $\Theta_{001} < 2°$, $\Theta_{010} < 3°$ mit unbekanntem Vorzeichen an (N. Jahrb. f. Min. 1881. II. 112).

[2] Große Ähnlichkeit mit diesem Plagioklas, besonders hinsichtlich des Kaligehalts, zeigt ein durch vom Rath (Sitzungsber. d. niederrhein. Ges. f. Natur- und Heilkunde 209. 301. Bonn 1885) geometrisch und durch Fouqué (Bull. Soc. franç. Minér. **17**. 359. 1894) chemisch

Hieraus ergeben sich folgende Molekularprozente:

	I	II
Orthoklas	43.0	17.5
Albit	43.0	42.5
Anorthit	14.0	40.0
Summa	100.0	100.0

Die Dichten fand Herzenberg

	I	II
D gemessen	2.591	2.633
D berechnet	2.612	2.669

Die Berechnung der Dichten erfolgte wie bisher unter der Annahme additiven Verhaltens der spezifischen Volumina von Adular, Albit und Anorthit; es scheint also nicht nur, wie schon oben wiederholt konstatiert, bei der Vereinigung zu monoklinen, sondern auch beim Zusammentritt zu triklinen Mischkristallen von Kalikalknatronfeldspat eine erhebliche Dilatation vor sich zu gehen.

Der obige Kaliplagioklas ähnelt chemisch denjenigen der Rhombenporphyre des Kristianiagebiets (Mügge[1]) und des Kibo (Finckh[2]), doch fehlt ihm ebenso wie demjenigen der Kenyite des Kenya (Gregory[3]) die Rhombenform; an denen des Kibo bestimmte Miers[4] Mol.-Prozent Orthoklas 28.5, Albit 57.0, Anorthit 14.5 und $\Theta_{010} = +4^\circ 20'$. Dittler[5] stellte aus Schmelzen von SiO_2, Al_2O_3, $CaCO_3$, Na_2CO_3 und K_2CO_3 ähnliche trikline Feldspäte dar und schätzte sie auf Mol.-Prozent Orthoklas 15, Albit 55, Anorthit 30; derselbe mischte ferner 19.42 Orthoklas + 44.32 Albit + 36.26 Anorthit mit 10 Prozent Na_2WO_4 und erhielt einen triklinen Feldspat mit $\Theta_{010} = 0^\circ$ bis -2°.

In den hellrötlich-grauen, drusigen Schlieren der Gesteine des vorliegenden Typs finden sich häufig aufgewachsen Tridymitviellinge nach (hexagonal aufgefaßt) $(10\bar{1}6)$, nicht nach $(30\bar{3}4)$; Maximaldurchmesser der Einzelindividuen = 0.5 mm; Flächen $\{0001\}$, $\{10\bar{1}1\}$, $\{10\bar{1}0\}$; $\measuredangle(0001):(\underline{000\bar{1}}) = 35^\circ 5^1/_2{}'$ gemessen, $= 35^\circ 18'$ berechnet. Die Kriställchen waren klar, zeigten die ihrer Pseudohexagonalität entsprechende gewöhnliche Felderteilung und wandelten sich (unter Lehmanns Erhitzungsmikroskop) bei etwa 130° in echt hexagonale Kriställchen um.

---

untersuchter Andesin aus Quarz und Biotit führenden Tuffen des Arcuentu bei Montevecchio auf Sardinien: $\measuredangle(001):(010) = 86^\circ 14'$; SiO_2 63.80, Al_2O_3 23.43, CaO 6.26, Na_2O 5.58, K_2O 1.44, Summa 100.51. Auslöschungsschiefen konnten leider wegen feiner Albit- und Periklinlamellen nicht ermittelt werden.

[1] Mügge, N. Jahrb. f. Min. 1885. II. 107.

[2] Finckh, Rosenbusch-Festschrift, 373. Stuttgart 1906.

[3] Gregory, Quart. Journ. Geol. Soc. **56**. 205. 1900.

[4] Miers, Mineralog. Magaz. 7. 11 und 133. 1887.

[5] Dittler, Min. Petr. Mitt. **29**. 273. 1910, und **30**. 118. 1911.

U. d. M. bemerkt man außer den obigen makroskopischen Bestandteilen spärliche Pseudomorphosen von hellgrünlicher bis hellbräunlicher Hornblende (innen) und Limonit (außen), seltener von Serpentin + Limonit, wohl nach Hypersthen; die Hornblende hat schwache Absorption $\parallel \mathfrak{c} > \perp \mathfrak{c}$ und die Orientierung $\measuredangle \mathfrak{c} : c' = 26°$, $\mathfrak{b} \parallel \bar{b}$. Akzessorisch treten etwas Eisenglanz, Magnetit, Ilmenit sowie Spuren von Zirkon und Apatit hinzu. Die dunklen und die akzessorischen Mineralien sind häufig aggregiert.

Die Grundmasse ist im gewöhnlichen Licht fluidal, und zwischen gekreuzten Nicols schlierenweise abwechselnd kryptokristallin und deutlich kristallin; in den gröber kristallinen Schmitzen sieht man unregelmäßige Quarzfelder, von Feldspatleisten ($\parallel$ [100] gestreckt) wirr durchspickt, wobei diese Leisten oft von einem Feld ins Nachbarfeld hineinragen und so beide Felder miteinander verzapfen. Viele winzige Körnchen von Erz und zahlreiche Fetzen und schwammige Massen obiger Hornblende liegen in der Grundmasse gleichmäßig verteilt. Ausscheidungsfolge: Apatit + Zirkon, Erz, Hypersthen, Plagioklas, Sanidin, Hornblende, Quarz; die Feldspäte bilden 2 aufeinanderfolgende Generationen.

Diese Gesteine ähneln sehr dem Liparittyp »Sisineddu«, sind aber CaO-reicher, wie z. B. folgende Analyse (neu) des hinter dem alten Turm von Calasetta anstehenden Gesteins zeigt, das sich durch hellrötlichgraue poröse und braunrote kompakte Schlieren und makroskopische Einsprenglinge von Kaliplagioklas und Natronsanidin auszeichnet.

		Molekularprozente		Osannparameter	
SiO_2	69.53	SiO_2	77.56	S	77.56
TiO_2	0.16	Al_2O_3	10.15	A	7.05
Al_2O_3	15.45	FeO	4.30	C	3.10
Fe_2O_3	5.08	MgO	0.07	F	2.14
FeO	—	CaO	0.87	*k*	1.53
MnO	—	Na_2O	4.03	*n*	5.7
MgO	0.04	K_2O	3.02	*a*	11.5
CaO	0.73	Summa	100.00	*c*	5.0
Na_2O	3.70			*f*	3.5
K_2O	4.24			Alkalireiche β	
Glühverlust	0.86	H_2O-	$= 0.49$	An Al_2O_3 übersättigt	
P_2O_5	—	H_2O+	$= 0.33$		
Summa	99.79	Summa	0.82		

Also beträgt der Glühverlust, vom H_2O abgesehen, 0.04 Prozent. FeO und P_2O_5 waren in Spuren anwesend.

Durchschnittsfeldspat in Molekularprozenten.

Orthoklas	40.5
Albit	54.0
Anorthit	5.5
Summa	100.0

Das Gestein nähert sich Osanns[1] Liparittyp »Sunset Peak« mit S 78, *a* 12.5, *c* 3.5, *f* 4 sowie Dazittyp »Bunsen Peak« mit S 76, *a* 11, *c* 5.5, *f* 3.5.

Mineralmolekülprozente.

Orthoklas $K_2Al_2Si_6O_{16}$	24.16
Albit $Na_2Al_2Si_6O_{16}$	32.24
Anorthit $CaAl_2Si_2O_8$	3.48
Quarz SiO_2	31.01
Hornblende $FeAl_2SiO_6$	6.69
Serpentin $H_4Mg_3Si_2O_9$	0.12
Eisenglanz Limonit } Fe_2O_3, H_2O	2.27
Ilmenit $FeTiO_3$	0.28
Summa	100.25

Den Überschuß von Al_2O_3 über die Feldspäte haben wir mit $FeSiO_3$ zu $FeAl_2SiO_6$ verbunden, wozu allerdings die entsprechende Menge FeO dem Fe_2O_3 der Analyse entnommen werden mußte, da diese nur Spuren von FeO (und auch nur 0.04 Molekularprozente MgO) ergibt. Will man nicht noch weitere Fe_2O_3-Mengen der Analyse in FeO umrechnen und nicht überdies reine Tonerde oder reines Tonerdesilikat (Al_2SiO_5 oder $H_4Al_2Si_2O_9$, als vorhanden annehmen (was dem mikroskopischen Befund nicht entsprechen würde), so erhält man für die Hornblende nur Molekeln von $FeAl_2SiO_6$, was recht auffallend ist; zwar weist die große oben angeführte Auslöschungsschiefe der Hornblende $c : \acute{c} = 26^\circ$ auf reichliches Alumosilikat, doch entsprechen derartige Hornblenden wie z. B. der Gamsigradit etwa der Formel

$$CaAl_2SiO_6 + (Fe, Mg)Al_2SiO_6 + 2\,Ca(Fe, Mg)_3Si_4O_{12}.$$

Auf Serpentin und Limonit wurde nur die oberhalb 110° aus dem Gestein entweichende H_2O-Menge (»H_2O+« der Analyse) verrechnet; unterhalb 110° verliert der Serpentin nur 10 bis 20% seines H_2O-Gehaltes.

---

[1] Osann, Min. Petr. Mitt. **20.** 404 und 425. 1901.

Schließlich erhalten wir folgende Gewichtsprozente:

Orthoklas	38.4
Albit	48.5
Anorthit	2.6
Quarz	5.3
Hornblende	4.5
Serpentin	0.1
Eisenglanz Limonit	0.5
Ilmenit	0.1
Summa	100.0

e. Typus Monte de Cresia

(Mikrophoto s. Taf. III, Fig. 9 nebst Erläuterung).

Am Monte de Cresia (aufgelassener Steinbruch unmittelbar südlich von der Stadt S. Antioco) und am Stagno Cirdu (S. Antioco) treten einsprenglingsfreie Liparite auf, die eine lichtgraue Farbe mit einem Stich ins Violette haben, wobei sich bei genauerem Hinsehen eine feinwolkige bis fleckige Textur bemerkbar macht; die kleinen rundlichen Flecken von etwa 1 mm Durchmesser und von hellviolettbrauner Farbe sind getrennt durch eine grauweiße, girlandenartig zwischen ihnen hinziehende Masse. Letztere erweist sich u. d. M. als etwas weiter und gröber entglast als die dunkleren, glasreicheren Flecken. Das Ganze bietet u. d. M. einen von farblosem bis hellbräunlichem Glase durchtränkten Filz mehr oder weniger fludial geordneter Feldspatmikrolithe dar, die nach [100] lang gestreckt und ein klein wenig tafelig || {010}, oft Rahmenform oder auch Stiefelknechtform zeigen. Es sind zum Teil Sanidine, zum Teil Plagioklase, welch letztere Lamellen nach dem Albit-, selten auch nach dem Periklingesetz besitzen; in der »symmetrischen Zone«, d. h. in Schnitten ⊥ {010}, beträgt der maximale Winkel zwischen der größeren Elastizität und dem Lamellenverlauf $18^{1}/_{2}{}^{\circ}$ (Monte de Cresia) oder 19° (Stagno Cirdu), was bei Kaliabwesenheit die Molekularproportion Albit : Anorthit = 63 : 37 bedeuten würde.

Der ganze Dünnschliff erscheint fein bestäubt mit Erzpartikeln und durchsetzt von winzigen Flittern von farbloser oder hellgrünbraun (|| c) bis farblos (⊥ c) pleochroitischer ? Hornblende mit c annähernd || c'; selten bildet dieses Mineral oder Bastit nebst Eisenerz Pseudomorphosen nach Stengeln eines »farbigen« primären Gemengteils (?Hypersthen). Hier und da sieht man Dendriten von Eisenglanz, selten ein Zirkonkörnchen; stellenweise bilden Tridymitviellinge ein kleines Nest.

Eine Analyse (neu) des Liparit vom Monte de Cresia ergab:

		Molekülprozente (nach Osanns Verfahren gebildet)		Osannparameter	
SiO_2	70.10	SiO_2	78.24	S	78.24
TiO_2	0.10	Al_2O_3	10.58	A	7.47
Al_2O_3	15.77	FeO	0.94	C	3.11
Fe_2O_3	1.16	MgO	0.07	F	0.60
FeO	—	CaO	2.70	k	1.52
MnO	—	Na_2O	4.58	n	6.1
MgO	0.39	K_2O	2.89	a	13.5
CaO	2.25	Summa	100.00	c	5.5
Na_2O	4.21			f	1.0
K_2O	4.08			Alkalireihe β	
Glühverlust	1.79	H_2O —	= 0.53	An Al_2O_3 übersättigt	
P_2O_5	—	H_2O +	= 0.93		
Summa	99.85	Summa	= 1.46		

Der Glühverlust beträgt also außer dem H_2O 0.33 Prozent. FeO und P_2O_5 sind nur spurenweise vorhanden.

Durchschnittsfeldspat in Mol.-Prozent:

Orthoklas	32.5
Albit	52.0
Anorthit	15.5
Summa	100.0

Das holokristallin gedachte Gestein würde etwa folgende Mineralmolekülprozente besitzen:

Orthoklas $K_2Al_2Si_6O_{16}$	23.12
Albit $Na_2Al_2Si_6O_{16}$	36.64
Anorthit $CaAl_2Si_2O_8$	10.80
Quarz SiO_2	27.48
? Hornblende $FeAl_2SiO_6$	1.23
Serpentin $H_4Mg_3Si_2O_9$	0.12
Eisenglanz Fe_2O_3	0.23
Ilmenit $FeTiO_3$	0.16
Summa	99.78

Zur Bildung des Moleküls $FeAl_2SiO_6$ mußte ein der disponibeln Al_2O_3-Menge entsprechender FeO-Betrag dem Fe_2O_3 der Analyse entnommen werden, da diese kein FeO ergab. Möglicherweise ist in diesen Gesteinen und in denen des vorigen Typs ein Teil Al_2O_3 als reines Silikat (? sekundärer Kaolin) vorhanden.

Gewichtsprozente:	
Orthoklas	34.8
Albit	52.0
Anorthit	7.6
Quarz	4.5
? Hornblende	0.8
Serpentin	0.1
Eisenglanz	0.1
Ilmenit	0.1
Summa	100.0

B. Tuffe.

(Mikrophoto s. Taf. III, Fig. 10 nebst Erläuterung).

Tuffe finden sich anstehend auf S. Pietro in den Gegenden Pescetti, Punta delle Colonne (Steinbruch), Punta del Becco (Grubenbau auf Manganerz, Eisenocker und Jaspis), Guardia dei Mori, Birincampo und Gioia sowie auf S. Antioco in den Gebieten Calasetta (Steilküste), Mercureddu, Rocca della Guardia, Sisineddu, Sa Scrocca Manna, Sottotorre, Merrixeddu und Monte de Cresia.

Es sind durchweg helle, graue, gelbliche oder rötliche Gesteine, teils locker und sich infolge von Kaolinreichtum wie Kreide anfühlend (Sisineddu, Birincampo), teils kompakt (Punta delle Colonne, Punta del Becco), teils durch die Größe der Fragmente breccienartig (Gioia), teils verkieselt (Merrixeddu). Die Verkieselung brachte Bildung von Opal, von Chalzedonfaserbüscheln und von grobkörnigen Quarzpseudomorphosen nach letzteren. In den lockeren Tuffen sind durch die Verwitterung bis apfelgroße Höhlungen eingenagt (Rocca della Guardia). Die Oberfläche ist zuweilen mit Dendriten von MnO_2 überzogen. Nahe der Punta del Becco (und ebenso am Capo Rosso) wechsellagern mit den Tuffschichten solche von erdigem, braunem bis schwarzem, Eisenoxyd und Ton führendem Manganerz (MnO_2) sowie von tiefviolettem bis zinnoberrotem und gelbem bis hellolivbraunem Toneisenstein oder Eisenocker, der durch wechselnde Nuance oft sehr feine Schichtung verrät und durch Verkieselung lagenweise in ebenso gefärbten

Jaspis übergeht; dieser wird (als Schmuckstein) zusammen mit Manganerz und Eisenerz nahe der Punta del Becco sowie am Capo Rosso durch Grubenbetrieb gewonnen.

Am Capo Rosso bilden, wie schon Bertolio[1] mitteilte, das Profil von oben nach unten:

Tuff und weißer Ton	0.50—1.50 m mächtig
Roter Ton	0.20—0.30
Gelber Jaspis	0.20—0.50
Dunkelgelber Ocker	0.70—1.50
Hellgelber Ocker	0.30—0.50
Gelber Jaspis	0.12—0.15
Roter Jaspis mit Adern von violettem Ocker	0.30—0.50
Manganerz	0.20—0.80
Schwarzer Ton	0.15
Manganerz	0.55
Roter und weißer Ton	0.90—3.00
Tuff	

Eine von Halse[2] (I) und eine von Bertolio[1] (II) veröffentlichte Analyse des manganreichsten Erzes ergaben:

	I		II	
SiO_2	8.0	Prozent	9.1	Prozent
Al_2O_3	2.26	»	5.0	»
Fe_2O_3	19.10	»	15.0	»
Mn_2O_3	5.81	»	—	
MnO_2	47.87	»	36.0	»
MnO	—	»	4.0	»
ZnO	0.65	»		
MgO	0.9	»	2.0	»
BaO	3.71	»	—	»
CaO	1.0	»	1.0	»
K_2O	1.40	»	—	»
H_2O	9.37	»	26.8	»
SO_3	—	»	0.1	»
P_2O_5	0.29	»	0.4	»
Summa	100.36	Prozent	99.4	Prozent

---

[1] Bertolio, Boll. R. Com. Geol. Ital. **27.** 181. Roma 1896.

[2] Halse, Transact. North of England Inst. mining and mechanical engineers **34.** 145. Newcastle 1884—85. Hier wird auch auf analoge Manganvorkommen bei dem der Insel S. Pietro benachbarten Porto Scuso (Südwestküste von Sardinien) sowie in den Gebieten von Bosa, Gonnesa, Sindia (Prov. Cagliari) sowie Ittiri, Ossilo, Padria und Pozzo Maggiore (Prov. Sassari) aufmerksam gemacht.

Die unten zitierte Literatur[1] enthält noch einige Einzelheiten über diese Manganvorkommen und deren Ausbeute sowie Vermutungen über ihre Bildungsweise.

Auf Kluftflächen verkieselter Partien des mit Manganerzschichten wechsellagernden Tuffes der Miniera del Becco finden sich zuweilen viele bis 3 mm große Heulanditkristalle der Form {010}, {001}, {201}, $\{\bar{2}01\}$, {110}; sie sind tafelig ‖ {010} und meist mit einer Fläche von {010} aufgewachsen:

∡ (001) : (201) = 63° 40′ gemessen, 63° 40′ berechnet[2]
∡ (001) : $(\bar{2}01)$ = 65° 41′ » 66° 00′
∡ (110) : $(1\bar{1}0)$ = 43° 50′ » 43° 56′

Optischer Charakter positiv, Dispersion der optischen Achsen $\rho < v$: $\mathfrak{c} \parallel \bar{b}$, $\measuredangle\, \mathfrak{a} : \dot{a} = 15°$, $\mathfrak{a}$ liegt im spitzen ∡ β. Nach Rinne[3] bildet $\mathfrak{a}$ mit $\dot{a}$ 6° (Viesch), 8° (Berufjord), 32° (Fassathal), liegt aber in allen diesen Fällen im stumpfen ∡ β.

Unsere Kristalle zeigen u. d. M., durch {010} gesehen, Schichten verschieden starker Doppelbrechung, die den Kristallflächen parallel laufen und Anwachspyramiden bilden, so daß Sektorenteilung erscheint[4].

Unsere Tuffe führen meist makroskopische Kristalle oder Fragmente ganz ähnlicher Kaliplagioklase und Natronsanidine wie die massigen Liparite.

---

[1] Barelli, Cenni di statistica mineralogica degli stati di Sen. Il re di Sardegna 1835. — Baldracco, Cenni sulla costituzione metallifera della Sardegna, Torino 1854. — Della Marmora, Voyage en Sardaigne II. Paris 1857. — Jervis, I tesori sotterranei dell' Italia **3**. 1881. — Vom Rath, Sitzungsber. niederrhein. Ges. f. Natur- und Heilkunde **40**. 150. Bonn 1883. — Fuchs et de Launay, Traité des gîtes minéraux et métallifères II. 25. Paris 1893. — Catalogo della mostra fatta del Corpo Reale delle miniere, Parigi 1900. 59. — Stelzner-Bergeat, Die Erzlagerstätten, Leipzig 1904. 260.

[2] Die Berechnung erfolgte nach den in Dana, System of Miner. 1892. 574 angegebenen Daten.

[3] Rinne, N. Jahrb. f. Min. 1887. II. 30.

[4] Analoge Heulanditbildungen wurden aus vulkanischen Gesteinen der Hauptinsel Sardinien wiederholt beschrieben, so aus »Hornblendetrachyt« von Monastir durch Lamarmora (Voyage en Sardaigne Part. 3, T. I, 555, Turin 1857), aus »Trachyttuff« von Ozieri durch vom Rath (Sitzungsber. niederrhein. Ges. f. Natur- und Heilkunde Bonn 1887. 149), aus »Trachyten« oder »Andesiten« von Siliqua durch Lovisato (Rendic. R. Accad. Linc. (5) **4**. Roma 1895; zitiert nach Bertolio, Boll. R. Com. Geol. **27**. 181. Roma 1896) und aus »Augithypersthenandesit« von Montresta bei Oristano durch Millosevich (Rendic. R. Accad. Linc. [5] **17**. 1. Sem. 266. 1908).

Der Natronsanidin, der fast nie irisiert (Ausnahme Sisineddu), dagegen meist Murchisonitteilung und zuweilen Mikroperthitbildung zeigt, ergab (Punta delle Colonne) $\measuredangle(001):(010) = 89^\circ 56' \pm 5'$ und $\Theta_{010} = +5^\circ$ mit $\rho < v$, ferner (Gioia) $\mathfrak{c} \parallel \bar{b}$ und Dispersion der optischen Achsen $\rho > v$, schließlich (Steilküste von Calasetta) $\measuredangle(001):(010) = 89^\circ 59' \pm 3'$.

Am Kaliplagioklas, der mit HF viel Na_2SiF_6, etwas weniger $CaSiF_6$ und noch weniger K_2SiF_6 gab (Miniera del Becco) und viele feine Lamellen nach dem Albitgesetz, selten auch nach dem Periklingesetz aufweist, fand ich

	Punta delle Colonne	Calasetta (Steilküste)	Monte de Cresia	Pescetti	Miniera del Becco
$\measuredangle(001):(010)$	$86^\circ 25'$	$86^\circ 50'$	—	—	$86^\circ 43'$
Θ_{001}	1°	1°	—	—	2°
Θ_{010}	$+3^\circ$ mit $\varrho < v$	$+2^1/_2{}^\circ$ mit $\varrho < v$	$+3^\circ$ mit $\varrho < v$	$\pm 3^\circ \begin{smallmatrix}\varrho < v \\ \varrho > v\end{smallmatrix}$	$-6^1/_2{}^\circ$ mit $\varrho > v$
Mol.-Prozent Albit	75	75	75	75 bis 70	60
» » Anorthit	25	25	25	25 bis 30	40
Dichte, gemessen	—	—	—	—	2.667
» berechnet	—	—	—	—	2.678

Wir sehen hier also die gleichen Eigentümlichkeiten wie an den Feldspäten der massigen Liparite, z. B. auch den abnorm großen, spitzen Spaltungswinkel, der hier bis $86^\circ 50'$ hinaufgeht, während ich z. B. an normalem Andesin aus Andesit von Kis Sebes (Siebenbürgen) $\measuredangle(001):(010) = 86^\circ 14'$ bei $\Theta_{001} = 2^\circ$, $\Theta_{010} = -3^\circ$ fand.

Quarzeinsprenglinge (Dihexaeder) treten nur in den Gebieten Guardia dei Mori und Punta Leone (S. Pietro) auf, wo nach obigem ausnahmsweise auch der massige Liparit (Typ Sisineddu) Quarzeinsprenglinge führt.

Der Biotiteinsprengling, der sich auch in dem Tuffe des Mangangebietes von Becco nicht merklich Mn-führend erwies, tritt in Täfelchen von 1 mm Maximaldurchmesser auf, die oft verbogen und aufgeblättert sowie häufig unter Schwächung von Doppelbrechung und Pleochroismus zonar gebleicht sind, und zeigt die Dispersion der optischen Achsen $\rho < v$, bald einen sehr großen Achsenwinkel (Pescetti und Monte de Cresia), bald einen sehr kleinen (Punta del Becco) und, wenn frisch, den Pleochroismus $\mathfrak{a}$ gelb, $\mathfrak{b} = \bar{b}$ hellbraun, $\mathfrak{c}$ tiefbraun (Pescetti) oder $\mathfrak{a}$ strohgelb, $\mathfrak{b} \parallel \bar{b}$ hellgrau, $\mathfrak{c}$ braun. Er ist oft mit Magnetit, Ilmenit, Zirkon und Apatit vergesellschaftet; die Zirkone hatten — im Gegensatz zu einer Angabe Bertolios — keine Höfe.

Mikroskopisch zeigen sich öfters noch bastitartige und bräunliche, stark doppelbrechende iddingsitartige, eisenerzreiche Pseudomorphosen (nach ? Hypersthen) in gedrungenen Stengeln oder in feinsten Mikrolithen, die sämtlich c parallel der Längsrichtung und beträchtliche Doppelbrechung aufweisen.

Die soeben geschilderten Mineralien erscheinen u. d. M. eingebettet in eine sehr dichte, farblose oder glasige hellbraune Masse, die oft typische Aschenstruktur (s. Mikrophoto Taf. III, Fig. 10) zeigt, wobei die Aschenteilchen bald stärker (achsiolithisch-mikrofelsitisch mit optisch positiven Fasern) entglast und heller sind als die Zwischenmasse, bald umgekehrt als braune glasige Körper in hellem, kryptokristallinem Zement liegen. Hier und da sieht man Mikrofelsitsphärolithe mit optisch positiven Fasern sowie Fragmente dichten fluidal oder schaumig struierten Gesteins oder auch wohl Bröckchen schwammigen, von Feldspatstengeln wirr durchsetzten Quarzes, wie wir ihn in den massigen Lipariten beobachteten. Feinschuppiger Kaolin durchwuchert oft in großen Mengen Zement und Feldspatfragmente; stellenweise haben sich radialfaserige traubige Chalzedonmassen (mit optisch negativen Fasern) angesiedelt.

An diese mikroskopische Beschreibung[1] schließe ich die Mitteilung einer Analyse (neu) des hellrötlichen dichten Tuffs von Birincampo (S. Pietro), der durch Aschenstruktur und zahllose winzige, von rotem Fe_2O_3 pseudomorphosierte Mikrolithe ausgezeichnet ist[2]:

		Molekularprozente (nach Osanns Verfahren)		Osannparameter	
SiO_2	72.51	SiO_2	81.60	S	81.60
TiO_2	0.09	Al_2O_3	9.42	A	7.48
Al_2O_3	14.19	FeO	1.02	C	1.50
Fe_2O_3	2.40	CaO	0.48	F	—
FeO	0.0	Na_2O	3.89	*k*	1.69
MnO	—	K_2O	3.59	*n*	5.2
MgO	—	Summa	100.00	*a*	16.5
CaO	0.40			*c*	3.5
Na_2O	3.56	H_2O-	$= 0.36$	*f*	—
K_2O	4.98	H_2O+	$= 1.25$	Alkalireihe	γ
Glühverlust	1.83	Summa	$= 1.61$	An Al_2O_3 übersättigt	
P_2O_5	0.0				
Summa	99.96				

---

[1] Von den Beschreibungen Bertolios abgesehen, wurden flüchtige mikroskopische Beobachtungen an solchen Gesteinen als Trachyten und Trachyttuffen — übrigens nur von S. Pietro —, von Rudler als Anhang der Arbeit von Halse über das Manganvorkommen bei Punta del Becco und Capo Rosso (a. a. O.) sowie von Eigel (Min. Petr. Mitt. **8**. 62. 1887) mitgeteilt.

[2] Anhangsweise gebe ich hier eine unvollständige Analyse Bertolios (Boll. R. Com. Geol. Ital. **25**. 418. Roma 1894) wieder, die sich nach Bertolio auf einen grauen »Biotit-

Abgesehen von H_2O beträgt also der Glühverlust 0.22.

Die Daten von K_2O, Na_2O und CaO ergeben einen Durchschnittsfeldspat von folgenden Molekularprozenten:

Orthoklas	46.5
Albit	50.5
Anorthit	3.0
Summa	100.0

Verrechnet man, wie hier geschehen, alles K_2O, Na_2O und CaO auf Al_2O_3 im Sinne der Feldspatformeln, so bleibt ein Rest von 1.46 Mol.-Prozent Al_2O_3, der auf die Kaolinisierung des Gesteins und dadurch indirekt auch auf die Tuffnatur desselben hinweist, da die kompakten massigen Typen im Gegensatz zu den einst lockeren Tuffen keine erhebliche Benetzung mit CO_2 führendem H_2O und daher auch keine merkliche Kaolinisierung erfuhren. Ordnet man unser Gestein als Tuff den massigen Lipariten des Calasettatypus (s. S. 26) zu, die an der Steilküste von Calasetta mit ganz ähnlichen Tuffen wie diesem wechsellagern und überdies durch die gleiche Art von Kaliplagioklas ausgezeichnet sind, so erkennt man beim Vergleich der Gewichtsprozente oder der Molekularprozente Zunahme von SiO_2, CaO und H_2O, Abnahme von Alkalien und Eisen sowie Oxydation des FeO, was wohl alles auf Zersetzungen des Tuffes zurückzuführen ist.

Aus obigen Daten erhält man folgende Mineralmolekülprozente:

Orthoklas $K_2Al_2Si_6O_{16}$	28.72
Albit $Na_2Al_2Si_6O_{16}$	31.12
Anorthit $CaAl_2Si_2O_8$	1.92
Quarz SiO_2	31.81
Kaolin $H_4Al_2Si_2O_9$	7.30
Eisenglanz Fe_2O_3	0.47
Ilmenit $FeTiO_3$	0.14
Summa	101.48

Gewichtsprozente

Orthoklas	43.5
Albit	44.5
Anorthit	1.4
Quarz	5.2
Kaolin	5.1
Eisenglanz	0.2
Ilmenit	0.1
Summa	100.0

trachyt« vom Capo Rosso bezieht, der dort ebenso wie bei der Punta del Becco auf weißlichem Kaolin und Tuffen lagert und Sanidin, Anorthoklas, Oligoklas, etwas Labradorit, Biotit, Magnetit, Zirkon, Apatit und Glas führt: SiO_2 71.5, $Al_2O_3 + Fe_2O_3$ 16.9, MgO 0.3, CaO 1.2, Na_2O 6.5, K_2O 2.8, H_2O 0.4, Summa 99.6. Auch hier fällt wieder wie an allen Analysen Bertolios die Größe der Natronvormacht auf, so ergibt sich aus diesen Daten von K_2O, Na_2O und CaO ein Durchschnittsfeldspat von folgenden Mol.-Prozenten: Orthoklas 20.5, Albit 72.0, Anorthit 7.5, Summa 100.0.

Hypersthenandesit

(Mikrophoto s. Taf. III Fig. 11 nebst Erläuterung).

In der Gegend Seddas de Sa Murta bis nach Su Portixeddu hin (S. Antioco) stehen feinkörnige, kompakte Gesteine von hellgrauer bis hellolivbrauner Farbe an, die, mittels Lupe besehen, schwarzweiß oder braunweiß gesprenkelt erscheinen und Plagioklase, selten Sanidin, sowie Hypersthene von selten über 1 mm Durchmesser aufweisen.

Der Plagioklas, dessen Spaltungswinkel infolge von schlechter Spaltflächenbeschaffenheit leider nicht meßbar war, hat $\Theta_{001} = 11°$, $\Theta_{010} = -24°$ mit $\rho > v$, entspricht also wohl einem Labradorit mit Mol.-Prozent Albit = 35, Anorthit = 65. Er bildet isometrische, oft gerundete und knäuelförmig miteinander verwachsene Einsprenglinge, die zum Teil $\{010\}$, $\{001\}$, $\{\bar{1}01\}$ und $\{110\}$ zeigen, oft tafelig $\parallel \{010\}$ und stets nach dem Albitgesetz, häufig auch nach dem Periklingesetz lamelliert sind. Sie lassen nicht selten zonaren Schichtenbau und meist einen schmalen Sanidinsaum erkennen, bisweilen sind sie auch voller Einschlüsse des gelben Grundmasseglases, welche, oft von der Form des Wirtes, bald zonar geordnet, bald im Zentrum angehäuft sind und dann ihrem Wirte Rahmenform verleihen; Hypersthen-einschlüsse sind ziemlich selten.

Der Hypersthen ist im frischen Zustande schwärzlich, jedoch noch in 0.3 mm dicken Platten $\parallel \{010\}$ braun durchsichtig, im zersetzten Zustande trübe olivbraun; er läßt zuweilen $\{010\}$, $\{100\}$, $\{001\}$, sehr schmales $\{110\}$ sowie flache gerundete Endflächen erkennen und ist gestreckt $\parallel c'$; $\measuredangle (110) : (1\bar{1}0) = 92° 14' \pm 4'$ gemessen; da der 25.0 Prozent FeO führende Hypersthen vom Laacher See (Amblystegit) $\measuredangle (110) : (1\bar{1}0) = 91° 40'$, der 13.4 Prozent FeO führende Bronzit des Breitenbacher Meteoriten $= 91° 44'$ und der 1.4 Prozent FeO führende Enstatit von Oedegaarden $= 92° 26'$ hat, so stände unser Pyroxen zwischen Bronzit und Enstatit; doch fand ich den optischen Charakter negativ und die Dispersion der optischen Achsen $\rho > v$, was auf $FeO > 18$ Prozent hinweist. U. d. M. wurde zuweilen Zwillingsbildung nach (011) beobachtet und $\measuredangle c' : \underline{c}' = 61\tfrac{1}{2}°$ gemessen ($= 60° 48'$ berechnet für Hypersthen). Pleochroismus bei 30 μ Dicke: $\mathfrak{a}$ hellbräunlich, $\mathfrak{b}$ lichter grünlich-bräunlich, $\mathfrak{c}$ hellgrün. Nicht selten führt er konforme Glaseinschlüsse mit Flüssigkeitstropfen sowie auch Körner von Magnetit, Ilmenit, seltener gedrungene Apatitstengel und wenig tiefbraun-strohgelb pleochroitischen Biotit, der anscheinend regelmäßig eingelagert ist, jedenfalls mit (001) ‖ (100) des Hypersthen liegt. An den Enden seiner Vertikalachse macht sich oft eine Zerfaserung oder Aufblätterung bemerkbar. Hier sowie auf den Flächen der Prismenzone siedelten sich Talkblättchen bis zu vollständiger Pseudomorphosierung des Pyroxens an; sie liegen meist mit $\breve{a}$ ‖ c' und mit (001) ‖ (010) [nicht ‖ (100)!][1] des Hypersthen [neue Aufstellung des letzteren, d. h. Absonderung ‖ (100)], womit das Gesetz dieser häufig zu beobachtenden Verwachsung eindeutig festgelegt ist.

Der Talk zeigt den Pleochroismus $\mathfrak{a}$ gelblichweiß, $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ hellgrün.

Selten ist braune Hornblende, die dann von Hypersthenstengelchen, Magnetitkörnern und spärlichen lichtgrünen, nicht pleochroitischen Diopsidsäulchen vielfach durchsetzt oder verdrängt ist — magmatische Resorption; ihre Doppelbrechung erreicht nicht diejenige der basaltischen Hornblende, ihr Pleochroismus ist $\mathfrak{a}$ bräunlichgelb, $\mathfrak{b} = \bar{b}$ braun, $\mathfrak{c}$ tiefbraun; $\measuredangle \mathfrak{c} : c' = 8°$ etwa. Diese farbigen Gemengteile sind oft mit Magnetit oder Ilmenit, etwas Apatit und spärlichem Zirkon assoziiert. Die Ausscheidungsfolge der Einsprenglinge war: Apatit und Zirkon, Erz, Hornblende, Hypersthen, Diopsid, Plagioklas, doch greift die Bildungsperiode des Plagioklas in diejenige des Hypersthen ein.

Die Grundmasse besteht aus gelbem Glas, das selten axiolithisch (mit optisch negativen Fasern) entglast und stets von zahllosen gedrungenen Säulchen von Plagioklas, etwas Sanidin sowie Hypersthen durchsetzt ist.

Die Analyse (neu) dieses Hypersthenandesit von Seddas de Sa Murta ergab:

		Molekularprozente		Osannparameter	
SiO_2	55.16	SiO_2	63.19	S	63.19
TiO_2	0.74	Al_2O_3	12.29	A	5.28
Al_2O_3	18.32	FeO	6.02	C	7.01
Fe_2O_3	2.42	MgO	4.66	F	12.23
FeO	4.15	CaO	8.56	k	1.10
MnO	—	Na_2O	4.48	n	8.5
MgO	2.75	K_2O	0.80	a	4.5
CaO	7.04	Summa	100.00	c	6.0
Na_2O	3.23			f	9.5
K_2O	1.10			Alkalireihe α	
Glühverlust	3.58	$H_2O -$ =	1.10	An Al_2O_3 gesättigt	
P_2O_5	1.33	$H_2O +$ =	1.88		
Summa	99.82	Summa =	2.98		

Der Glühverlust außer H_2O beträgt also 0.60 Prozent.

---

[1] Die Blättchen von Serpentin und die braunen Täfelchen von ? Ilmenit liegen bekanntlich ‖ (100) des Hypersthens.

Durchschnittsfeldspat in Molekularprozenten:

Orthoklas	9.0
Albit	51.0
Anorthit	40.0
Summa	100.0

Das Gestein steht nach obigen Parametern **Osanns**[1] Andesittypen »Crater Lake« und »St. Egidi« nahe, deren Vertreter zum Teil Hypersthen führen; in scharfem Gegensatz dazu haben alle Trachyandesite $a > c$ statt $a < c$.

Der Durchschnittsfeldspat ist viel albitreicher und daher wohl auch orthoklasreicher als der oben nach seinem optischen Verhalten bestimmte Einsprenglingsplagioklas, was für den Charakter der Grundmassefeldspäte und der Glasbasis bezeichnend ist.

Mineralmolekülprozente

Orthoklas	$K_2Al_2Si_6O_{16}$	6.40
Albit	$Na_2Al_2Si_6O_{16}$	35.84
Anorthit	$CaAl_2Si_2O_8$	25.64
Quarz	SiO_2	10.78
Hypersthen	$MgSiO_3$	8.72
	$FeSiO_3$	6.50
	$MgAl_2SiO_6$	1.80
Apatit	$5\,CaO + 3/2\,P_2O_5$	2.58
Magnetit	Fe_3O_4	1.44
Ilmenit	$FeTiO_3$	1.26
	Summa	100.96

Bei der Berechnung des Apatits wurden Cl und F durch $1/2\,O$ ersetzt; die Apatitmenge erscheint im Vergleich mit dem Dünnschliffbefund etwas hoch. Der Hypersthen würde nach obigem Verhältnis von $MgSiO_3$ und $FeSiO_3$ ungefähr demjenigen der Labradorküste gleichen, aber im übrigen merklich reicher an $MgAl_2SiO_6$ sein, jedoch ist zu bedenken, daß obige Berechnungsweise naturgemäß von dem (sehr reichlichen) Glase des Gesteins absieht; auch der anscheinend hohe H_2O-Gehalt der Glasbasis mußte ignoriert werden. Abgesehen wurde auch von den sekundären Produkten, also namentlich vom Talk, auf den übrigens auch ein Teil der hohen H_2O-Ziffer der Analyse entfällt; vielmehr wurde das ursprüngliche Gestein rekonstruiert.

Gewichtsprozente

Orthoklas	10.6
Albit	55.9
Anorthit	20.0
Quarz	1.9
Hypersthen	6.2
Apatit	3.8
Magnetit	1.0
Ilmenit	0.6
Summa	100.0

---

[1] Osann, Min. Petr. Mitt. 20. 441. 1901.

Hypersthen führende Andesite wurden von der Hauptinsel Sardinien durch Millosevich[1] von Val Barca und durch Serra[2] von Contrada Fenosu und s'Adde de s'Ulmu beschrieben; diese sind etwas ärmer an SiO_2 und reicher an Al_2O_3, CaO und Alkali.

Hypersthenbasalt

(Mikrophoto s. Taf. III, Fig. 12 nebst Erläuterung).

In den Gegenden Capo Sperone, Seddas de Sa Murta bis Portixeddu sowie Crisionis (S. Antioco) treten Hypersthenbasalte auf, die in dem letztgenannten Gebiete an Hippuritenkalk grenzen und diesen anscheinend etwas metamorphosiert haben; dieser normalerweise ganz dichte und helle Kalk ist im Kontakt oft durch Fe_2O_3 gerötet und von Chalcedon durchtrümert und zeigt auf Hohlraumwandungen kleine Kalzit- und Quarzkristalle. Die Kalzite sind bis 2 mm lang und zeigen $\{20\bar{1}\}$, $\{110\}$, $\{100\}$, $\{11\bar{1}\}$; die Quarze sind bis 0.5 mm lang und zeigen $\{100\}$, $\{22\bar{1}\}$, $\{\bar{2}11\}$.

Die Hypersthenbasalte sind dunkelgraue bis dunkelbraune, seltener durch Fe_2O_3 tiefrot gefärbte Gesteine, die teils dicht und sehr kompakt, teils gröber körnig und drusig sind und in letzterem Falle Plagioklastafeln $\parallel \{010\}$ mit 2 mm Maximaldurchmesser sowie schwarze Hypersthenstengel $\parallel \dot{c}$ von 5 mm maximaler Länge erkennen lassen. Die Gesteinsoberfläche ist zuweilen mit traubigem, wasserhellem Hyalith überzogen, der starke optische Spannungen mit radialem $\mathfrak{a}$ zeigt.

An den Plagioklasen fand ich:

	Capo Sperone	Seddas de Sa Murta	R. Crisionis	R. Crisionis
Θ_{001}	16°	29°	—	28°
Θ_{010}	—	$-34°$ mit $\varrho > v$	$-30°$ mit $\varrho > v$	$-34°$ mit $\varrho > v$
$\Theta_{maximum}$ der »symmetr. Zone«	30°	—	34°	—
$\measuredangle$ (001) : (010)	—	85° 57′	—	85° 52′
Mol.-Prozent Albit	35	10	25 — 30	10
" " Anorthit	65	90	75 — 70	90

Die Plagioklaseinsprenglinge besitzen stets Lamellen nach dem Albitgesetz, oft auch solche nach dem Periklingesetz, nicht selten einen sehr feinen Saum von Sanidin, isomorphe Schichtung und zonenweise angehäufte Glaseinschlüsse und bilden häufig knäuelförmige Verwachsungen.

---

[1] Millosevich, Memor. R. Accad. Linc. [5]. VI. Fasc. XIV. 405. Roma 1908 und ebenda [5]. VIII. 599. 1911.

[2] Serra, Rendic. R. Accad. Linc. 17. 597. Roma 1909.

Der Hyperstheneinsprengling, der die Formen, den Pleochroismus sowie auch die randliche Talkbildung (nebst Limonitbildung) desjenigen der soeben beschriebenen Andesite aufweist, bildet oft Aggregate, zuweilen auch zusammen mit Stengeln von grünem, stärker doppelbrechendem, nicht pleochroitischem, öfters || (100) zwillingslamelliertem Augit von der Form {100}, {010}, {110}, {$\bar{1}$11}, der ihn hier und da auch als orientierter Saum umgibt, wobei die beiderseitige Grenze unregelmäßig zackig verläuft; der Augit zeigt niemals Talkbildung oder sonstige Umwandlung.

Oft sind Kristalle von Magnetit und Ilmenit sowie Stengel von Apatit den Pyroxenen aggregiert.

Die Ausscheidungsfolge der Einsprenglinge ist Apatit, Erz, Plagioklas, Hypersthen, Augit, während in den obigen Andesiten die Plagioklasbildung im allgemeinen später als diejenige des Pyroxens einsetzte.

Die Grundmasse stellt entweder einen von hellgelblichem bis braunrotem Glas durchtränkten Filz von winzigen Plagioklasmikrolithen (|| [100] gestreckt) nebst Magnetitkriställchen dar oder sie ist völlig entglast, dann bilden Aggregate feiner Hypersthensäulchen (|| c' gestreckt), die zuweilen in Talk verwandelt sind, eine Zwischenklemmungsmasse zwischen gedrungenen Plagioklasstengeln, die || [100] gestreckt sind; auch in dieser zweiten Kristallisationsperiode herrschte die Bildungsfolge Magnetit, Plagioklas, Pyroxen. Neben dem Plagioklas der Grundmasse tritt wohl auch etwas Sanidin auf.

Die Analyse (neu) des glashaltigen Hypersthenbasalt vom Capo Sperone ergab:

		Molekularprozente		Osannparameter	
SiO_2	53.35	SiO_2	57.88	S	57.88
TiO_2	0.93	Al_2O_3	12.67	A	3.70
Al_2O_3	18.94	FeO	8.22	C	8.97
Fe_2O_3	3.71	MgO	7.12	F	16.78
FeO	5.35	CaO	10.41	k	1.02
MnO	—	Na_2O	2.81	n	7.6
MgO	4.15	K_2O	0.89	a	2.5
CaO	8.50	Summa	100.00	c	6.0
Na_2O	2.56			f	11.5
K_2O	1.19			Alkalireihe	α
Glühverlust	1.13	H_2O −	= 0.43	An Al_2O_3	gesättigt
P_2O_5	—	H_2O +	= 1.25		
Summa	99.81	Summa	= 1.68		

Daß der Glühverlust um 0.55 Prozent kleiner ist als die H_2O-Menge, erklärt sich wohl aus der Gewichtszunahme des FeO beim Glühen infolge von Oxydation; obige 5.35 g FeO würden bei vollständiger Umwandlung in Fe_2O_3 eine Gewichtszunahme von 0.59 g erfahren, was mit obiger Differenz von 0.55 g sehr gut übereinstimmt.

Durchschnittsfeldspat in Molekularprozenten.

Orthoklas	11.0
Albit	34.5
Anorthit	54.5
Summa	100.0

Das Gestein ähnelt hiernach Osanns ebenfalls hypersthenreichem Basalttyp »Macomer« (nach dem Basalt von Macomer auf Sardinien benannt!) mit der Typenformel[1] S 58.5, a 2, c 7.5, f 10.5 (auch einem von Doelter[2] analysierten olivinfreien Feldspatbasalt des Monte Ferru auf Sardinien steht es nahe); mit dem Melaphyr der Zentralmasse des Monte Mulatto bei Predazzo[3] ist unser Gestein chemisch fast identisch; die Hauptparameter[1] jenes Melaphyrs sind S 58, a 2.5, c 6, f 11.5.

Für unsern Hypersthenbasalt berechnen sich folgende Mineralmolekülprozente:

Orthoklas	$K_2Al_2Si_6O_{16}$	7.12
Albit	$Na_2Al_2Si_5O_{16}$	22.48
Anorthit	$CaAl_2Si_2O_8$	35.88
Quarz	SiO_2	4.11
Hypersthen	$FeSiO_3$	8.36
	$MgSiO_3$	11.36
Augit	$CaSiO_3$	2.88
	$MgSiO_3$	2.88
Magnetit	Fe_3O_4	2.48
Ilmenit	$FeTiO_3$	1.78
	Summa	99.33

Gewichtsprozente:

Orthoklas	13.6
Albit	40.5
Anorthit	32.3
Quarz	0.8
Hypersthen	7.7
Augit	2.2
Magnetit	2.0
Ilmenit	0.9
Summa	100.0

Hierbei wurde das frische unveränderte, jedoch vollkommen kristallin gedachte Gestein ohne Talk u. dgl. berechnet. Die recht hohe H_2O-Menge der Analyse steckt zum Teil im Talk, zum Teil aber offenbar im Gesteinsglas.

---

[1] Osann, Min. Petr. Mitt. 20. 415. 1901.

[2] Doelter (Denkschr. d. k. k. d. Akad. Wiss. 39. II. 41. Wien 1879) fand: SiO_2 52.27, Al_2O_3 21.01, Fe_2O_3 9.10, MgO 5.22, CaO 9.18, Na_2O 2.15, K_2O 0.65, H_2O 0.91, Summa 100.49.

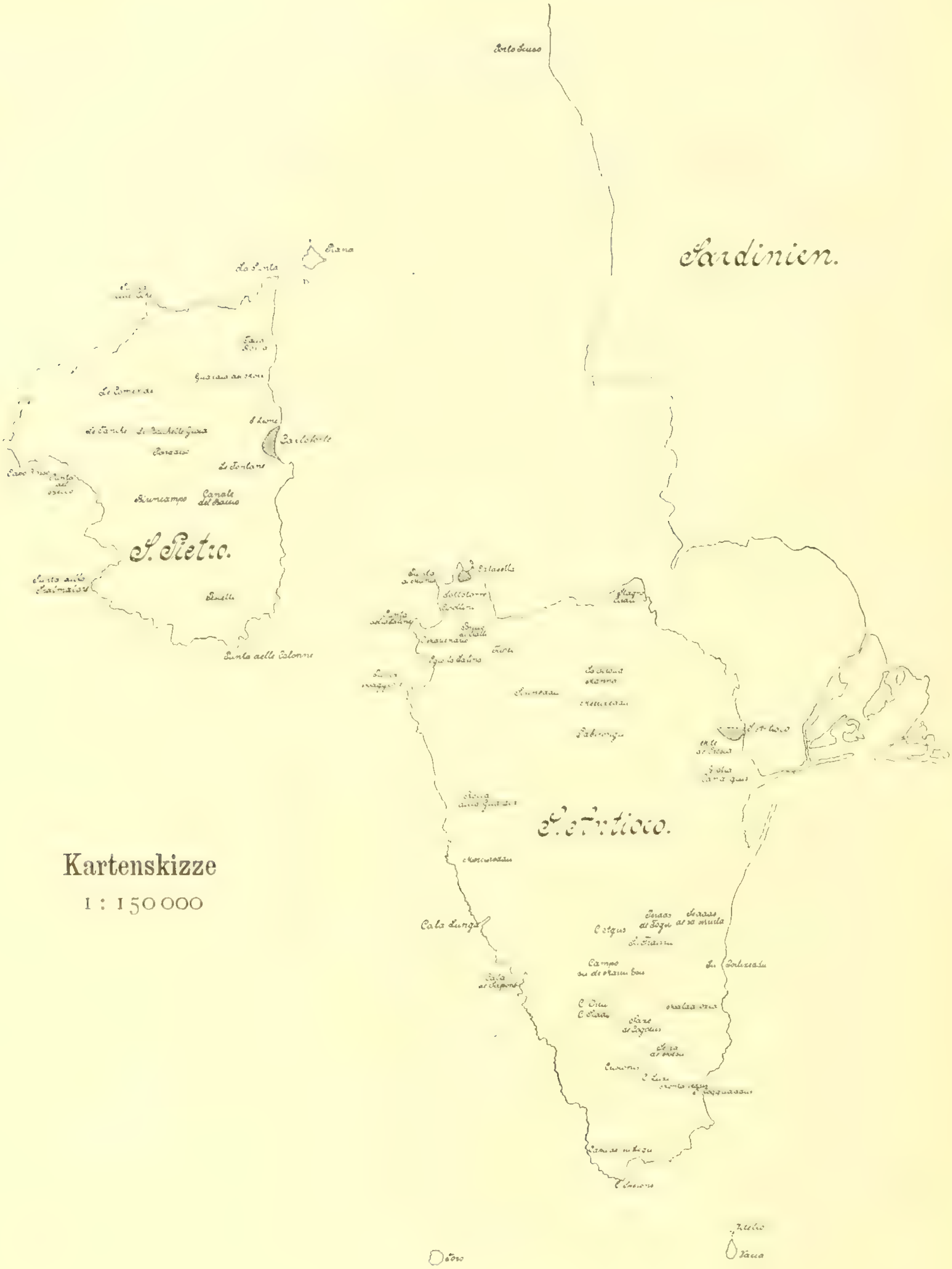
[3] Tschermak, Die Porphyrgesteine Österreichs. Wien 1869. 127.

Beobachtungen über Verbreitung und Lagerung

(s. Kartenskizze S. 62).

Alphabetisches Verzeichnis der Orte des Anstehenden.

	Comendit-typen			Liparittypen						Hypersthen-andesit	Hypersthen-basalt
	a	b	c	Aa	Ab	Ac	Ad	Ae	B		
S. Pietro											
Birincampo							+		+		
Bocchette	+										
Canale de Baccio			+				+				
Capo Rosso									+		
Comende	+										
Fontane			+								
Gioia			+						+		
Guardia dei Mori	+		+	+	+				+		
Paradiso					+						
Pescetti			+		+				+		
Punta del Becco									+		
Punta delle Colonne									+		
Punta Leone					+						
Tacca Rossa				+							
S. Antioco											
Bricco di Ciatti				+	+		+		+		
Cala Lunga			+				+				
Calasetta				+			+		+		
Capo Sperone											+
Crisionis											+
Grotta Canargius						+					
Mercureddu		+	+	+	+	+			+		
Merrixeddu					+				+		
Monte de Cresia								+	+		
Pabirongu							+				
Portixeddu										+	+
Rocca della Guardia				+	+				+		
Scrocca Manna					+	+			+		
Seddas de Sa Murta					+					+	+
Sisineddu				+	+				+		
Sottotorre					+				+		
Stagno Cirdu			+			+		+			
Tupei				+							


Porto Scuso
Sardinien.
Piana
La Punta
Carloforte
Le Fontane
Canale
S. Pietro.
Punta delle Colonne
Calasetta
S. Antioco.
Cala Lunga
Campo
Toro
Vacca

Kartenskizze

1 : 150000

Die Insel S. Antioco, durch Sandbänke mit Sardinien verbunden, besitzt ein Areal[1] von etwa 100 km²; die nördlichere Insel S. Pietro ist etwa einhalb so groß und 6 km von der ersteren sowie von der Mutterinsel Sardinien entfernt.

S. Antioco erhebt sich in dem Gebiete Perdas de Fogu bis 271 m, S. Pietro in der Gegend Guardia dei Mori bis 211 m ü. d. M.

Die geographische Verteilung der verschiedenen Ergußgesteine auf den beiden Inseln zeigt das vorstehende Ortsverzeichnis in Verbindung mit der Kartenskizze auf voriger Seite; eine genauere topographische Abgrenzung der Arten und Typen muß einem künftigen Studium vorbehalten bleiben. Um unsere gesteinsgeographischen Angaben über S. Pietro mit denjenigen Bertolios[2] vergleichen zu können, müssen wir mit Hilfe seiner petrographischen Beschreibungen seine Gesteinsbezeichnungen mit den erheblich abweichenden unsrigen parallelisieren. Bertolios »Comendite und Liparite« von Comende, Tanche, Bocchette und Gioia mit einem Areal von etwa 700 ha entsprechen unsern Comenditen vom Typus Comende und vom Typus Fontane.

Seine »Tuffe und Breccien« entsprechen im allgemeinen unsern Liparittuffen, dagegen diejenigen von Guardia dei Mori (zum Teil) und diejenigen von Carloforte unsern oft einschlußreichen Lipariten vom Typ Sisineddu, diejenigen vom Canale del Baccio, wo das Manganerz in ihnen auftritt, und zum Teil diejenigen von Guardia dei Mori unserm Comendittypus Fontane; seine »glasigen Trachyte mit schwarzen Einschlüssen« in den Gebieten Fontane und Canale del Baccio unsern Comenditen des Fontanetyps, in der Gegend von Carloforte und Punta Leone unserm Sisineddutyp; sein »rötlicher Trachyt«, südlich von Birincampo, unsern Lipariten vom Typ Birincampo, seine »Trachyte mit Oligoklas« von der Punta delle Colonne, der Punta del Becco und dem Capo Rosso unsern Liparittuffen. Schließlich tritt noch in den Gebieten Tacca Rossa und Guardia dei Mori an Stelle seiner »rötlichen Trachyte« sowie »Tuffe und Breccien« unser schwarzer, pechsteinartiger und hypersthenführender Liparit vom Calasettatypus.

Auf S. Pietro fehlen der Comendittyp Mercureddu und die Liparittypen Grotta Canargius und Monte de Cresia sowie der Hypersthenandesit und der Hypersthenbasalt. Auf S. Antioco trifft man alle Arten und Typen.

---

[1] Casalis, Dizionario geografico-storico-statistico-commerciale degli stati di S. M. il re di Sardegna **18.** 97. Torino 1849.

[2] Bertolio, Boll. R. Com. geol. **27.** Taf. V. Rom 1896.

Außer diesen vulkanischen Gesteinen steht an einzelnen niedriggelegenen Orten nahe der Küste eine bis 1 m mächtige, nach Lamarmora diluviale Muschelbreccie an, so auf S. Pietro bei Carloforte sowie auf S. Antioco an der Westküste bei den Cipollini und von der Punta della Salina über den Campo Marcenario nach dem Poggio la Salina und Spiaggia Grande an der Punta Maggiore hinziehend.

Schließlich tritt im SO von S. Antioco Hippuritenkalk auf, dessen Versteinerungen Lamarmora aufzählt. Seine Grenze zieht sich längs Lipariten, Andesit und Basalt von dem Küstengebiet Portixeddu landeinwärts über Reggione su Fraizzu, Campo Agus, Campo su de Marcu Esu, östlich am Campo Orru vorbei über Campo Siddi, Regione Saxé de Cogorus, Crisionis, Campo Luxi und nördlich an Montarveddu vorüber nach Porto di Coqquaddus; zwischen Coqquaddus und Portixeddu bildet im Osten der Strand die sichtbare Grenze jener Kalkscholle.

Hinsichtlich der Lagerungsverhältnisse der Ergußgesteine beobachtete ich auf S. Antioco folgendes. Die Lagerung scheint, wo sie sich an der Grenze verschiedener Arten oder Typen oder an schlierigem oder bankigem Gefüge eines Gesteins erkennen läßt, eine ungestörte und, was die Liparite und ihre Tuffe betrifft, eine mehr oder weniger horizontale, deckenartige und lagenartige zu sein, wie z. B. an den Berghängen von Sa Scrocca Manna und von Bricco di Ciatti sowie an der Steilküste von Calasetta deutlich erkennbar, während der Basalt — und auch der Andesit — regelmäßige hohe Kuppen bildet, wie z. B. den die Signalstation tragenden Berg am Capo Sperone.

Bei Cala Lunga (und der benachbarten Cala de Sapone) tritt der Comendit des Fontanetyps in großen, über 30 m hohen Felsmassen auf, und diese tragen mehrfach kleine, kappenartige Relikte rötlichen Liparits vom Birincampotyp; auch die Comendite von Mercureddu werden stellenweise von diesem Liparit überlagert. Der gleiche Liparit bildet im Gebiete Rocca della Guardia, in der Gegend Sottotorre sowie am Steilufer und nahe dem alten Turm bei Calasetta das Hangende des schwarzen, zuweilen durch schlierigen Wechsel in ihn übergehenden Liparits vom Calasettatyp; an dem erwähnten Steilufer ist der rötliche Liparit 3 m mächtig, der schwarze 2 m. Im Gebiete Bricco di Ciatti lagert zu unterst der schwarze Liparit (Calasettatyp), darüber brecciöser rötlicher bis weißlicher, durch eine 40 cm dicke chalzedonreiche Lage ausgezeichneter Liparittuff, dann folgt weißer

Liparit (Typ Sisineddu), dann nochmals der schwarze und schließlich der rote, fluidale Liparit des Birincampotyps. Auch in der Regione Sisineddu überlagert den Tuff (wieder mit obiger Chalzedonlage) der schwarze Liparit und diesen der rote, der oft mehrere Meter mächtig und dann säulenförmig abgesondert ist, wie z. B. auch bei Spiaggia Grande. An der Punta di Manca folgt über weißlichem und rötlichem Tuff eine 1 m mächtige Decke des schwarzen Liparits, dann eine 2—3 m mächtige Bank des roten. Im Gebiete Sa Scrocca Manna sieht man an der Poststraße, die vom Dorfe Calasetta nach der Stadt S. Antioco führt, am Berghang von unten nach oben rötliche bis weißliche Liparite des Sisineddutyps, dann weißen Tuff und schließlich braunschwarzen glasreichen Liparit vom Typus Grotta Canargius. Letzterer Typ tritt am Stagno Cirdu mit etwa nußgroßen Einschlüssen des roten Liparits vom Birincampotyp auf.

Über die Lagerungsbeziehungen der massigen und brecciösen Pechsteine der Grotta Canargius sowie des Liparits vom Monte de Cresia konnte ich genaue Beobachtungen nicht machen.

Die Lagerungsverhältnisse auf S. Pietro erscheinen noch weniger gut erkennbar als diejenigen von S. Antioco.

Nach Bertolio folgen nach abnehmendem Alter 1. »Comendite und Liparite«, d. h. ein Teil unsrer Comendite, 2. »rötlicher Trachyt«, d. h. unsre Liparite vom Birincampotypus, 3. »Tuffe und Breccien«, d. h. teils unsre Liparite vom Sisineddutyp und teils unsre Liparittuffe, 4. »Oligoklastrachyt«, d. h. unsre Liparittuffe nebst »glasigen Trachyten mit schwarzen Einschlüssen«, d. i. unser Liparittyp Sisineddu (zum Teil unser Comendittyp Fontane?). Nach meinen Beobachtungen lassen jedoch die Aufschlüsse von S. Pietro diese Angaben nicht als sicher erscheinen; man findet weder Kontaktwirkungen noch Apophysen noch Einschlüsse eines Typs in einem andern; die Pechsteineinschlüsse in den Lipariten vom Sisineddutyp haben wir eben diesem Typ eingereiht, der gleiche Pechstein bildet oberflächliche Ströme in der Gegend von Carloforte und Guardia dei Mori; möglicherweise gehört er aber zum Comendittyp Mercureddu, welcher pechsteinartige Varietäten besitzt. Da unsre Einteilung der Comendite in 3 Typen und der Liparite in 5 Typen auf rein petrographischer, nicht auf geologischer Grundlage beruht, so setzt die Einreihung zweier Gesteine von verschiedenem Fundort in einen und denselben Typ keineswegs ihre geologische Äquivalenz voraus noch beweist sie dieselbe. Die Beobachtungen über die relative Lagerung der Gesteine eines Typs müssen zwecks Bestimmung des relativen Alters an allen getrennten Orten ihres Anstehens wiederholt werden.

Bemerkungen über Altersverhältnisse.

Daß die Bildungszeiten der Ergußgesteine beider Inseln, also die Perioden der vulkanischen Tätigkeit, mindestens zum Teil sich decken, ist wahrscheinlich, weil nicht nur der größte Teil der Gesteinstypen sich auf diesen beiden einander so benachbarten Inseln zugleich findet, sondern manche Gesteine sich selbst im Dünnschliff und in der optischen Eigenart der Feldspäte vollkommen gleichen, wie z. B. die hellgrünlichen bis blaugrauen Comendite vom Fontanetyp am Stagno Cirdu (S. Antioco) und im Gebiet Guardia dei Mori (S. Pietro), die schwarzen, schlierig-glasigen Liparite des Calasettatypus mit ihren Kalioligoklasen und Hypersthenen in den Gegenden Guardia dei Mori und Tacca Rossa auf S. Pietro wie in den Gebieten von Calasetta, Mercureddu, Rocca della Guardia, Sisineddu und Tupei auf S. Antioco, die biotitreichen Liparittuffe von Pescetti (S. Pietro) und vom Monte de Cresia (S. Antioco).

Manganerz bildet nahe der Punta del Becco und dem Capo Rosso abbauwürdige Schichten im kaolinisierten Liparittuff und Überzüge und Nester im Comendit des Canale del Baccio auf S. Pietro sowie Dendriten auf dem Liparit von Sisineddu (S. Antioco).

Vor allem spricht auch das Auftreten der sonst an der Erdoberfläche nicht sehr häufigen Comendite auf beiden Inseln für deren geologische Zusammengehörigkeit.

Für die Ermittlung des Alters der Ergußgesteine von S. Pietro und S. Antioco bieten sich nun mehrere Anhaltspunkte dar.

Der Hippuritenkalk von S. Antioco zeigt in der Regione Crisionis am Effusivkontakt des Basaltes vielfach gröberes Korn, Rotfärbung durch Fe_2O_3, Chalzedonisierung und kleine Hohlräume mit Kalzit- und Quarzkriställchen, was alles freilich statt auf Kontaktmetamorphose im gewöhnlichen Sinne auf späterer Zirkulation von Lösungen längs den naturgemäß inhomogenen und sich daher leicht auflockernden Kontaktpartien beruhen könnte.

Für speziell tertiäres Alter spricht die Nähe der Hauptinsel Sardinien und die chemisch-mineralogische Ähnlichkeit einiger unsrer Gesteine mit den sicher als tertiär nachgewiesenen, nach Doelter und nach Lovisato miozänen, nach Stefani pliozänen Effusivmassen Sardiniens, insonderheit den sauren, von Bertolio zwischen Pliozän und Eozän gestellten Ergußgesteinen der wenige Kilometer entfernten Westküste der Hauptinsel.

Die Analogie ist eine vielfache. So scheint der »Rhyolith« und der rote »Anorthoklas« — wahrscheinlich Natronsanidin — führende »Trachyttuff« — wahrscheinlich Liparittuff — von Porto Scuso an der S. Pietro benachbarten Südwestküste Sardiniens den Lipariten und Liparittuffen von Pescetti und Birincampo auf S. Pietro durchaus ähnlich zu sein, und verwandte Gesteine ziehen sich nordwärts über Arcuentu hinaus bis in das Gebiet von Sassari hin und bilden auch den Kern des Monte Ferru[1]; so erwähnt Bertolio[2] Rhyolithe von Torralba bei Giave und Obsidian von der Hochebene von Arbus; Traverso[3] beschrieb »Rhyolithe« von Fontanaccio und Flumentorgiu in der Arcuentugruppe.

Der Natronsanidin, Oligoklas, etwas grüner Augit sowie Biotit führende Perlit von Porto Scuso ähnelt den Liparitpechsteinen der Grotta Canargius. Vom Val Barca, von Contrada Fenosu und s'Adde de s'Ulmu im nordwestlichen Sardinien sind durch Millosevich[4] und Serra[5] Hypersthenandesite, ähnlich denen von Seddas de sa Murta auf S. Antioco beschrieben worden. Der Feldspatbasalt von Macomer ist chemisch sehr verwandt dem Hypersthenbasalt vom südlichen S. Antioco, auch tritt bei Montevecchio[6] Hypersthenbasalt auf.

In Tuffen des Arcuentugipfels findet sich ein Kaliandesin, der sehr ähnlich demjenigen unsrer Liparite vom Birincampotypus ist (vgl. S. 43). Manganerz und Heulandit treten wie auf unsern Isolotten auch auf der Hauptinsel auf (vgl. S. 50 und 51).

Spricht doch auch für ursprüngliche Einheit unsrer Eilande und der Hauptinsel das Fortsetzen des erwähnten Hippuritenkalkes von S. Antioco nach Sardinien, wo er an der Nordwestküste nördlich von Alghero und an der Ostküste südlich von Orosei bei Posada am Cap Figari und auf Tavolara ansteht.

---

[1] Doelter, Denkschr. d. k. k. Akad. Wiss. Wien. **38.** II. 193. 1878 (nebst Karte) und ebenda **39.** II. 41. 1879.

[2] Bertolio, Boll. R. Com. Geol. Ital. **27.** 181. Roma 1896.

[3] Traverso, Su alcune roccie di Fontanaccio e di Flumentorgiu in Sardegna. 1895.

[4] Millosevich, Mem. R. Acc. Linc. [5] VI. Fasc. XIV. 405. Rom 1908 und ebenda [5] VIII. 599. 1911.

[5] Serra, Rendic. R. Acc. Linc. **17.** 597. Rom 1909.

[6] Rosenbusch, Mikrosk. Phys. d. Gesteine. 1257. 1908.

Schließlich besitzen die Ergußmassen von S. Pietro und S. Antioco — wie diejenigen Sardiniens — typisch neovulkanischen Charakter; der Biotit der Liparittuffe zeigt im Gegensatz zu einer Mitteilung Bertolios[1] niemals Höfe um den Zirkon, was nach Mügge[2] für relativ geringes Alter spricht, der instabile Natronsanidin zeigt selten Bildung von Mikroperthit, der ihn in älteren Gesteinen meist vollkommen verdrängt hat, und die in paläovulkanischen Massen kaum mehr anzutreffenden Arfvedsonite (und Ägirine) sind meist durchaus frisch. Eine untere Altersgrenze bestimmt sich dadurch, daß obige, als diluvial geltende Muschelbreccie von unsern Ergußgesteinen stets unterlagert, nie überlagert wird.

Als wahrscheinliche zeitliche Aufeinanderfolge der Ergüsse ergibt sich aus Lagerungsverhältnissen und Einschlüssen: 1. Comendite, 2. Liparite, 3. Andesit und Basalt.

Falls sich die von uns beim Sisineddutyp beschriebenen, aber den Comenditen mindestens nahestehenden Pechsteineinschlüsse der Liparite von Carlofortes Umgebung (Sisineddutypus) künftig als Comendite entsprechend den Comenditpechsteinen von Guardia dei Mori und Mercureddu (Mercureddutyp) erweisen sollten, so würde daraus mit Sicherheit die Priorität von Comenditen gegenüber Lipariten auf S. Pietro hervorgehen.

Die Liparittypen weisen an verschiedenen Stellen nicht immer das gleiche relative Altersverhältnis auf, doch zeigt sich der rote Birincampotyp stets jünger als der schwarze Calasettatyp, dieser zumeist jünger als der weißliche Sisineddutyp und letzterer im allgemeinen jünger als der Liparittuff.

Die regelmäßig kegelförmige Gestalt der Berge des südlichsten S. Antioco, die aus Basalt, dem anscheinend jüngsten unsrer Effusivgesteine, bestehen, dürfte der primären, durch Eruption erzeugten Form nahestehen, während die heutige Oberflächengestaltung der älteren Gesteine weniger durch den einstigen Vulkanismus als durch spätere Abtragungen bedingt ist; auch die beiden, etwa 16 m hohen, flachen Hügel unmittelbar südlich von der Stadt S. Antioco, die sich über den Canargiusgrotten wölben, sind nicht durch Erosion unterhöhlte Vulkankegel, sondern von der Erosion übriggelassene Teile ausgedehnter Decken und brecciöser Tuffschichten.

---

[1] Bertolio, Boll. R. Comm. Geol. Ital. **25.** 407. Rom 1894.

[2] Mügge, Zentralbl. f. Min. usw. 65, 113 und 142. 1909.

Die Ergüsse der älteren saueren Gesteine fanden zum Teil wahrscheinlich submarin statt, so daß diese während ihrer späteren Emporhebung über den Seespiegel der Meereserosion längs ihrer ganzen Oberfläche ausgesetzt waren.

Die Trockenlegung der Kreideschichten von S. Antioco fällt nach Lamarmora zwischen die saueren Ergüsse und die Bildung der doleritischen Kegel des Südens der Insel. Diese relativ hohen Berge befanden sich vermutlich niemals ganz unter Wasser, obwohl zur Diluvialzeit eine erneute Senkung der Inseln eintrat, wie die diluviale Muschelbreccie einiger Küstenpartien beweist.

Als letztes Ausklingen der vulkanischen Prozesse darf vielleicht die Existenz einer etwa 40° heißen Quelle betrachtet werden, welche, wenige Meter von der Küste des Gebietes Maladroxia (S. Antioco) entfernt, dem Kreidekalk des Meeresbodens entspringt. Auch an der Nordküste dieser Insel tritt nahe Spiaggia Grande eine Therme aus dem Meeresboden hervor.

Petrographische Vergleiche.

Analysentabelle

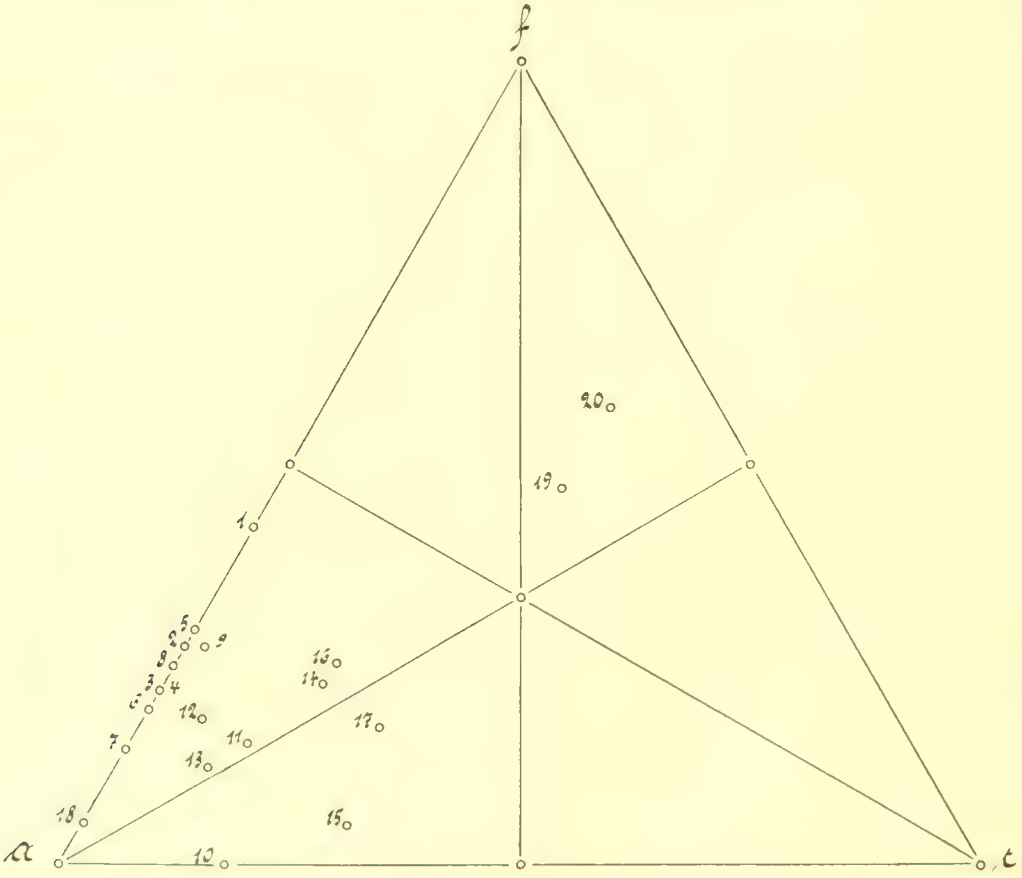
(Erläuterung s. S. 71).

Nr.	SiO_2	TiO_2	Al_2O_3	Fe_2O_3	FeO	MnO	MgO	CaO	Na_2O	K_2O	Glühverlust	P_2O_5	Summa
1	79.1		8.2	1.3			0.9	1.1	3.4	2.2	3.8		100.0
2	79.1		8.9	1.9		1.1	0.7	—	3.9	3.1	0.8		99.5
3	75.25	0.50	10.39	1.57	2.43	—	0.08	0.25	4.39	4.35	0.61	0.0	99.82
4	74.76	—	11.60	3.50	0.19		0.18	0.07	4.35	4.92	0.64	—	100.21
5	74.73	—	10.39	4.47	0.70	—	0.21	0.18	4.12	4.38	1.13	—	100.31
6	74.09	—	10.88	3.35	0.42	—	0.30	0.16	4.56	4.45	1.52	—	99.73
7	73.65	0.29	9.52	5.12	0.96	—	0.04	0.31	4.84	4.30	1.23	—	100.26
8	73.35	—	13.08	3.06	—	—	0.08	0.08	4.68	4.99	1.00	—	100.32
9	73.23	—	12.25	3.25	0.28	—	0.13	0.25	4.44	4.32	1.74	—	99.89
10	72.51	0.09	14.19	2.40	0.0	—	—	0.40	3.56	4.98	1.83	—	99.96
11	71.81	0.23	14.44	2.77	—	—	—	0.60	3.37	6.08	1.00	—	100.30
12	71.23	0.42	14.51	1.56	1.27	—	0.04	0.0	4.50	5.86	0.43	—	99.82
13	71.21	0.20	14.95	1.81	—	—	0.15	0.63	3.97	5.83	1.13	—	99.88
14	70.59	—	13.49	—	1.60	0.30	0.70	1.31	3.52	4.29	3.70	—	99.50

Nr.	SiO_2	TiO_2	Al_2O_3	Fe_2O_3	FeO	MnO	MgO	CaO	Na_2O	K_2O	Glühverlust	P_2O_5	Summa
15	70.10	0.10	15.77	1.16	—	—	0.39	2.25	4.21	4.08	1.79	—	99.85
16	70.03	0.34	13.56	3.20	0.89	—	0.0	1.43	3.69	4.16	3.04	—	100.34
17	69.53	0.16	15.45	5.08	—	—	0.04	0.73	3.70	4.24	0.86	—	99.79
18	68.5		14.5	1.0	3.0		0.1	—	9.2	3.0			99.3
19	55.16	0.74	18.32	2.42	4.15	—	2.75	7.04	3.23	1.10	3.58	1.33	99.82
20	53.35	0.93	18.94	3.71	5.35	—	4.15	8.50	2.56	1.19	1.13	—	99.81

Anmerkung: Ein Horizontalstrich bedeutet Spuren oder Abwesenheit des betreffenden Oxydes, ein freies Feld dagegen, daß das betreffende Oxyd bei der Analyse anscheinend ignoriert wurde.

In dieser Analysentabelle ist ebenso wie in dem folgenden Osanndiagramm jede der im Text befindlichen, aber keine der in den Anmerkungen zitierten Gesteinsanalysen aufgeführt.



Osanndiagramm (Erläuterung s. S. 71).

Erläuterungen zur Analysentabelle und zum Osanndiagramm

(s. S. 69 u. 70).

(S. P. = S. Pietro, S. A. = S. Antioco.)

Nr.	Gesteinsart	Fundort	Analyse	Osannparameter			Typus
				a	*c*	*f*	
1	? Liparit (? Comendit)	zw. Carloforte u. Paradiso (S. P.)	Bertolio	11.5	—	8.5	? Sisineddu (? Mercureddu)
2	Comendit	zw. Comende u. Becco (S. P.)	»	14.5	—	5.5	Fontane
3	»	Mercureddu (S. A.)	neu	15.5	—	4.5	Mercureddu
4	»	Comende (S. P.)	Rosenbusch	15.5	—	4.5	Comende
5	»	Mercureddu (S. A.)	neu	14.0	—	6.0	Fontane
6	»	Guardia dei Mori (S. P.)	»	16.0	—	4.0	»
7	»	Le Fontane (S. P.)	»	17.0	—	3.0	»
8	»	Cala Lunga (S. A.)	»	15.0	—	5.0	»
9	»	Canale del Baccio (S. P.)	»	14.0	0.5	5.5	
10	Liparittuff	Birincampo (S. P.)	»	16.5	3.5	—	—
11	Liparit	Rocca della Guardia (S. A.)	»	14.5	2.5	3.0	Sisineddu
12	»	Calasetta (S. A.)	»	15.5	1.0	3.5	Calasetta
13	»	Sisineddu (S. A.)	»	15.5	2.0	2.5	Sisineddu
14	»	Grotta dei Colombi (S. A.)	Delesse	12.0	3.5	4.5	Grotta Canargius
15	»	Monte de Cresia (S. A.)	neu	13.5	5.5	1.0	Monte de Cresia
16	»	Grotta Canargius (S. A.)	»	11.5	3.5	5.0	Grotta Canargius
17	»	Calasetta (S. A.)	»	11.5	5.0	3.5	Birincampo
18	Comendit	Comende (S. P.)	Bertolio	19.0	—	1.0	Comende
19	Hypersthenandesit	Seddas de sa Murta (S. A.)	neu	4.5	6.0	9.5	—
20	Hypersthenbasalt	Capo Sperone (S. A.)	»	2.5	6.0	11.5	—

Man ersieht aus der Tabelle: Abgesehen von dem SiO_2-reichen ? Liparitpechstein Nr. 1 (Bertolio), der übrigens den Comenditen mindestens nahesteht, und dem SiO_2-armen Comendit Nr. 18 (Bertolio) ergibt die Anordnung nach abnehmendem SiO_2-Gehalt die wohlgeordnete Reihe Comendit, Liparit, Andesit, Basalt, derart, daß sich nirgends ein Typ einer Gesteinsart zwischen Typen einer anderen Art einschiebt. Ordnet man die Gesteine statt nach abnehmendem SiO_2 nach zunehmenden Werten des Parameters c, so rückt auch der SiO_2-arme Comendit Nr. 18 in die Comenditreihe ein, und man erhält wieder die Reihenfolge Comendit, Liparit, Andesit, Basalt; hierbei fallen alle drei Comendittypen infolge von $c = 0.0$ (nur Nr. 9 zeigt eine kleine Abweichung von c um 0.5) zusammen, und die Liparite ergeben die wohlgeordnete Typenreihe Calasetta, Sisineddu, Grotta Canargius, Birincampo, Monte de Cresia. Die Werte von *a* und *f* scheinen sich im vorliegenden Falle weniger zur Systematik zu eignen.

Die drei **Comendit**typen erscheinen also hinsichtlich des *c*-Wertes als eine Einheit; die neun auf sie bezüglichen Analysen lassen sich nicht in drei den obigen Typen entsprechende Gruppen ordnen. Die Gruppierung der Comendite in jene drei Typen wurde ja auch lediglich auf mineralogisch-strukturelle Differenzen gegründet: »Comende« ist durch schwammige Arfvedsonite und durch zwei Generationen von Quarzdihexaedern ausgezeichnet, »Mercureddu« durch Hinzutritt von Cossyritkörnern zu schwammigem Arfvedsonit, »Fontane« durch Mikrolithe von Arfvedsonit oder von Ägirin oder von beiden zugleich sowie durch Glasreichtum.

Nicht nur hinsichtlich *c*, sondern auch hinsichtlich *a* und *f* sind alle Comendite, mit Ausnahme wieder von Nr. 18 (Bertolio), wo $a = 19.0$ und $f = 1.0$ ist, ziemlich ähnlich, indem *a* von 14 bis 17, *f* von 3 bis 6 schwankt. Daher liegen die figurativen Punkte des Osanndiagramms eng zusammengedrängt auf oder ganz nahe der *a*-*f*-Seite des Dreiecks. Ähnliches gilt auch vom SiO_2-Gehalt, der im allgemeinen in dem sehr kleinen Intervall von 73—75 Gewichtsprozenten liegt; nur Nr. 2 (Bertolio) zeigt den abnorm hohen Wert 79 und Nr. 18 (Bertolio) den abnorm niedrigen Wert 68.5.

Der Kieselsäurekoeffizient $k = \frac{S}{6A + 2C + F}$ liegt zwischen 1.5 und 1.7, nur in Nr. 2 (Bertolio) geht er bis 2.1 hinauf und in Nr. 18 (Bertolio) bis 1.0 hinab. Dementsprechend berechnet sich aus den Analysen ein Quarzgehalt unsrer Comendite von 3.9—7.3 Gewichtsprozent, aus den beiden Analysen Bertolios 1.6 bzw. 9.1 Prozent.

Der CaO-Betrag geht nicht über 0.3 Prozent hinaus, ebenso der MgO-Gehalt, wenn man von Nr. 2 (Bertolio) wieder absieht. Unter den Alkalien herrscht stets Natronvormacht, und es ist Osanns Parameter $n = 5.7 - 6.6$, so daß alle diese Comendite in die Osannsche Alkaliabteilung β gehören, nur Nr. 18 (Bertolio) gehört mit $n = 8.2$ in die α-Reihe, jedoch scheint Bertolio in allen seinen Analysen, die sämtlich in unserm petrographischen Hauptkapitel angeführt sind, das Na_2O auf Kosten des K_2O zu hoch bestimmt zu haben. Der Glühverlust, in der Hauptsache H_2O, beträgt in den glasreichen Comenditen des Fontanetyps mehr als 1 Prozent, in den analysierten Gesteinen der beiden andern Typen weniger.

Der Al_2O_3-Gehalt der Comendite reicht — ebenso wie in Pantelleriten — niemals zur Alkalibindung im Sinne der Feldspatformel aus, besonders aber dann nicht, wenn man, wie wir es im Gegensatz zu dem Osannschen Verfahren für unsere Comendite als erforderlich erkannten, die Hauptmenge des CaO an Al_2O_3 im Sinne der Anorthitformel bindet. So ergeben sich die Alkalieisensilikate Arfvedsonit, Ägirin, Cossyrit, deren Menge 2—14 Gewichtsprozente ausmacht. Die Fe_2O_3-Molekeln überwiegen an Zahl fast stets die FeO-Molekeln (Ausnahme Nr. 3). Mangan wurde außer in Spuren merkwürdigerweise nur von Bertolio in Nr. 2 gefunden, doch erscheint sein Betrag von 1.1 Prozent zu hoch. P_2O_5 fand sich ebenfalls nur in Spuren, in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß unsre Comendite praktisch frei von Apatit wie übrigens auch von Zirkon und Erz sind. TiO_2 ergaben nur einzelne der Analysen und auch nur in kleinen Mengen (bis 0.5 Prozent in Nr. 3), es rührt wohl von Cossyrit (Nr. 3) und von Glimmer her, der, hier und da in Flittern vorhanden, bei seiner Ausbleichung winzige Leukoxenkörnchen ausschied, während primärer Titanit, wie übrigens in sämtlichen Gesteinen der beiden Inseln, vollständig fehlt.

Der Hauptgemengteil der Comendite ist der Feldspat, der stets mit $\frac{Na_2 + CaO}{K_2O} < 2$ der Natronsanidinreihe, kaum je der Anorthoklasreihe zugehört und stets merklichen, bis über 2 Prozent ansteigenden Fe_2O_3-Gehalt aufweist; in seinen Einsprenglingen ist im Vergleich mit dem Grundmassenfeldspat das Na_2O und noch mehr das CaO gegenüber dem K_2O angereichert. Zu dem Mercureddutyp gehören auch pechsteinartige (Cossyrit führende) Varietäten von Mercureddu (S. Antioco) und von Guardia dei Mori (S. Pietro). Tuffe ließen sich den Comenditen im Gegensatz zu den folgenden Lipariten nicht zuordnen.

Die **Liparite** zeigen *c*-Werte, die sich mit 1.0 im Calasettatyp dem Werte 0.0 der Comendite nähern und bis 5.5 (Monte-de-Cresia-Typ) aufsteigen, wobei die 5 Typen in der oben gewählten Reihenfolge (Aa bis Ae) durchlaufen werden. Die *a*-Werte steigen von 11.5 (Birincampotyp und Grotta-Canargiustyp) bis 15.5 (Calasettatyp und Sisineddutyp) und gleichen an diesem Ende den *a*-Werten der Comendite. Der *c*-reichste Typ (Monte de Cresia) besitzt merkwürdigerweise die niedrigste *f*-Ziffer (1.0), während dieselbe im Grotta-Canargiustyp bis 5.5, in dem von Bertolio analysierten

Pechstein von Carloforte (Nr. 1) sogar bis 8.5 anwächst. Dementsprechend liegen die figurativen Punkte dieser Liparite in den beiden Dreiecken $a > f > c$ und $a > c > f$ des Osanndiagramms. Der SiO_2-Gehalt ist durchweg geringer als derjenige der Comendite (von Bertolios Analysen Nr. 1 und Nr. 18 abgesehen); er geht von 69.5 bis zu 72 Gewichtsprozenten hinauf, der Quarzgehalt von 3.5 bis 5.5 Gewichtsprozent, der Kieselsäurekoeffizient $k = \frac{S}{6A + 2C + F}$ von 1.38 bis 1.60, wobei jedoch SiO_2-Betrag, Quarzgehalt und Kieselsäurekoeffizient keineswegs durchweg symbath sind. Die Natronvormacht ist noch weniger ausgeprägt als in den Comenditen und macht zum Teil sogar einer geringen Kalivormacht Platz, indem n von 6.1 (Monte de Cresiatyp) bis 4.5 (Sisineddutyp) hinabsteigt, so daß die Liparite in die Alkaliabteilungen β und γ gehören. Wie in den Comenditen ist P_2O_5 nur in Spuren vorhanden, ebenso MnO; TiO_2 zeigt sich spurenhaft oder in geringen Mengen (bis 0.42 Prozent), es steckt wohl wesentlich in Ilmenit. Der Fe-Gehalt ist etwas niedriger als in Comenditen, auch herrschen die Fe_2O_3-Molekeln an Zahl nicht so sehr über diejenigen von FeO vor.

Die MgO-Menge ist, wie in den Comenditen, sehr gering. Der Glühverlust, wesentlich H_2O, ist auch hier wieder in pechsteinartigen Varietäten am größten (Grotta Canargius).

Die Liparite grenzen sich auch mineralogisch ziemlich scharf gegen die Comendite ab, wenn ihnen auch die Natronsanidineinsprenglinge und die schwammigen, von Feldspatleisten durchspickten Quarzkörner der Grundmasse mit jenen gemeinsam sind. Ihr Natronsanidin zeigt etwas höheren Anorthitgehalt, z. B. 14 Mol.-Prozent Anorthit statt 2 bis 3.5 Prozent in den Comenditen, Murchisonitspaltung, Neigung zur Mikroperthitbildung und öfters milchige Opaleszenz, aber kaum jemals Irisieren; sein Fe_2O_3-Gehalt ist etwas niedriger, und die Bräunung infolge von Fe_2O_3-Ausscheidung fehlt im allgemeinen. Ihm gesellen sich kalireiche Oligoklase und Andesine, z. B. mit 17 Mol.-Prozent Orthoklas, zu. Statt der Alkaliamphibole und -pyroxene führen diese Liparite Hypersthen, bräunliche Hornblende oder Biotit; Erz, Apatit und Zirkon treten in kleinen Mengen hinzu. Auf Blasenwänden findet sich häufig Tridymit. Dagegen fehlen den Lipariten Quarzeinsprenglinge so gut wie völlig, ebenso die Quarzdihexaeder zweiter Generation des Comendits vom Comendetyp.

Die **Tuffe** scheinen sämtlich zu den Lipariten, nicht zu den Comenditen zu gehören; zwar ist das gegenüber den massigen Gesteinen mehr lockere Material der Tuffe naturgemäß mehr oder weniger zersetzt, wie auch die Analyse Nr. 10 des Tuffes von Birincampo durch den Überschuß der Molekeln von Al_2O_3 über diejenigen von $\overset{\prime}{R}_2O + \overset{\prime\prime}{R}O$ beweist, doch spricht das Fehlen von Quarzeinsprenglingsfragmenten, das Nichtirisieren des Natronsanidins (Ausnahme Sisineddu), das Vorhandensein des soeben erwähnten Kalioligoklas, das Auftreten von Bastit und von Biotit sowie das völlige Fehlen von Alkaliamphibolen und von Ägirin, welch letzterer doch relativ widerstandsfähig und dauerhaft ist, für die angenommene Zugehörigkeit der Tuffe zu den Lipariten.

Ein kleiner Teil dieser Liparite, wie diejenigen des Calasettatyps, deren Analyse nur Spuren von CaO ergab, könnten vielleicht trotz der — übrigens spärlichen — Einsprenglinge von Kalioligoklas und Hypersthen als Alkaliliparite[1] bezeichnet werden; nach Rosenbusch tritt freilich Hypersthen nur in den basischsten Gliedern der Alkaligesteinsreihe auf, doch findet er sich in Trachyandesiten von Nordsardinien, von Pantelleria, vom Mont Capucin (Auvergne) und vom Tafelberg der Sierra Nevada (Kalifornien), ja sogar in den von Farrington[2] von Cerro de Mercado im Distrikt Durango in Westmexiko beschriebenen Comenditen (hier neben opaleszierendem Natronsanidin); vielleicht wird sich gerade in CaO-armen Gesteinen, wenn sie, wie nicht selten, merklichen (Fe, Mg)O-Gehalt besitzen, zunächst Hypersthen ausscheiden, um eventuell später umgewandelt zu werden, und so findet sich der Hypersthen bezeichnenderweise unversehrt nur in den glasreichen Lipariten unseres Calasettatyps, während er in den stärker entglasten Lipariten des Sisineddutyps und des Birincampotyps umgewandelt ist.

Zu den Comenditen sollten jedoch diese Liparite des Calasettatyps ungeachtet ihrer Natronsanidine und ihrer CaO-Armut, nicht gerechnet werden, weil sie, wie alle unsere Liparite, an Al_2O_3 übersättigt sind und der Comenditgruppe wie auch der Pantelleritgruppe die Untersättigung[3] an Al_2O_3 als Hauptcharakteristikum gewahrt bleiben sollte.

---

[1] Diese würden sich zum Comendit verhalten wie der Drachenfelstrachyt zum Pantellerit.

[2] Farrington, Field Columb. Mus. Geol. Ser. II. 197. Chicago 1904.

[3] Rosenbusch (Gesteinslehre 1910. 332) rechnet die »liparite bianca« von Cala Porticello auf Pantelleria zum Comendit, obwohl das Gestein mit Al_2O_3 übersättigt ist.

Zwischen unsern Lipariten und unserm **Hypersthenandesit** (Nr. 19), dem sich der **Hypersthenbasalt** (Nr. 20) aufs engste anschließt, klafft eine breite Kluft, indem eigentliche Trachyte durchaus fehlen. Der SiO_2-Gehalt fällt von den 69.5 Gewichtsprozenten des Birincampotyps auf 55.16 Prozent des Andesits (Nr. 19) und auf 53.35 Prozent des Basalts (Nr. 20) herab, der Al_2O_3-Gehalt steigt von den 15.77 Gewichtsprozenten des Monte-de-Cresia-Liparits auf 18.32 Prozent im Andesit und 18.94 Prozent im Basalt, der FeO-Wert geht von durchschnittlich 1 Prozent in den Lipariten auf 4 Prozent im Andesit und über 5 Prozent im Basalt in die Höhe, der MgO-Betrag, in den Lipariten fast durchweg kleiner als 0.4 Prozent, schnellt auf 2.75 Prozent im Andesit, auf 4.15 Prozent im Basalt hinauf, die CaO-Ziffer von 2.25 Prozent in Lipariten auf 7.04 Prozent im Andesit und 8.50 Prozent im Basalt, die Natronvormacht n von 6.1 Prozent in Lipariten auf 8.5 Prozent im Andesit und auf 7.6 Prozent im Basalt, der α-Reihe entsprechend; der P_2O_5-Betrag steigt von 0.0 Prozent in den Lipariten auf 1.33 Prozent im Andesit (im Basalt merkwürdigerweise wieder 0.0), der Apatitgehalt demnach von 0 auf 3.8 Gewichtsprozent, die TiO_2-Menge von 0.42 Prozent in Lipariten auf 0.74 Prozent im Andesit, auf 0.93 Prozent im Basalt.

Der Einsprenglingsplagioklas tritt im Andesit in die Labradorreihe ein, im Basalt sogar in die Bytownitanorthitreihe; Natronsanidin tritt unter den Einsprenglingen nicht individual, sondern nur als schmaler Saum der Plagioklase auf. Der Orthoklasgehalt des Gesteins sinkt von 34.8 Gewichtsprozent in Lipariten auf 10.6 Prozent im Andesit, auf 13.6 Prozent im Basalt, der Anorthitgehalt steigt von 7.6 Prozent in Lipariten auf 20 Prozent im Andesit und 32.3 Prozent im Basalt, der Quarzgehalt sinkt von 3.5 Prozent in Lipariten auf 1.9 Prozent im Andesit, 0.8 Prozent im Basalt (der Kieselsäurekoeffizient k von 1.38 Prozent auf 1.1 bzw. auf 1.0 Prozent), die Hypersthenmenge steigt auf 6.2 Gewichtsprozent im Andesit, auf 7.7 Prozent Hypersthen + 2.2 Prozent Augit im Basalt.

Zu den Trachyandesiten können wir unseren Hypersthenandesit nicht rechnen, da jener Gesteinsgruppe ihr Hauptkriterium[1] $a > c$ gewahrt bleiben soll, während unsere Andesite $c = 6$, $a = 4.5$ haben. Die von Millosevich[2] beschriebenen Trachyandesite und Trachydacite von der Valle del Riu Mannu, dem Nuraghe de sa Petada, von Caniga und Landriga auf der Hauptinsel Sardinien haben sämtlich $a > c$.

---

[1] Man vergleiche die von Rosenbusch (Gesteinslehre 1910. 390 und 391) angeführten Parameter verschiedener Andesite und Trachyandesite.

[2] Millosevich, Mem. R. Acc. Linc. [5]. VI. Fasc. XIV. 405. Rom 1908 und ebenda [5] VIII. 624. 1911.

Ebenso muß auch der Hypersthenbasalt vom Capo Sperone (S. Antioco) als normaler Feldspatbasalt aufgefaßt werden; nach Rosenbusch[1] führen die Trachydolerite im allgemeinen über 5 Prozent Alkali mit relativ viel K_2O und $a > c$; unser Hypersthenbasalt hat nur 3.75 Prozent Alkali, darunter soviel Na_2O, daß $n = 7.6$ wird und das Gestein in die Alkalireihe α verweist.

Wir sehen also auf dem nur 50 qkm großen Areal von S. Pietro Comendite und Liparite, auf dem 100 qkm umfassenden S. Antioco sogar Comendite, Liparite, Hypersthenandesit und Hypersthenbasalt zusammengedrängt, von denen die beiden letzten Gesteine auf keinen Fall, die Comendite aber sicher in die Alkalireihe Rosenbuschs gehören. Wollte man, um Rosenbuschs Lehre vom Antagonismus einer Alkalireihe und einer Alkalikalkreihe möglichst weit zu befolgen, unsere Liparite als Trachydacite oder als Alkalitrachyte mit den Comenditen zu einer Alkaligruppe vereinigen, so würde in beiden Fällen der SiO_2-Gehalt abnorm hoch, und im ersteren Falle der CaO-Betrag gegenüber demjenigen der Alkalien auffallend niedrig sein; im zweiten Falle würde ferner das Auftreten von Oligoklas und besonders von Andesin und vor allem auch die Übersättigung der Gesteine mit Al_2O_3 unpassend erscheinen. Anderseits dürfte das Auftreten von Natronsanidin keineswegs den Alkalicharakter eines Gesteins kennzeichnen, da die Sanidineinsprenglinge normaler Liparite und Trachyte ganz erhebliche Na_2O-Mengen führen. Wird doch die Bildung von Natronsanidin direkt nur von dem gegenseitigen Mengenverhältnis der Orthoklas-, Albit- und Anorthitmolekeln im Magma abhängen, nicht aber von dem Hauptkriterium der Comendite, Pantellerite und typischen Alkalitrachyte, nämlich dem Ungesättigtsein an Al_2O_3. Alkalireichtum (gegenüber CaO) und Natronvormacht (gegenüber K_2O), welch letztere man in manchen normalen Lipariten und Trachyten ebenso sicher antreffen kann als Kalivormacht in manchen Quarzkeratophyren und Keratophyren, werden die Entstehung typischer Natronsanidine mit $1 < \frac{Na_2O + CaO}{K_2O} < 2$ — eventuell neben Kaliplagioklas — zur Folge haben.

---

[1] Rosenbusch, Gesteinslehre 1910. 402 und 442.

Schließlich schmiegen sich auch die chemischen Konstanten unsrer Liparittypen denjenigen anerkannt normaler Liparite aufs beste an, so unser Sisineddutyp dem Osannschen Liparittyp »Red Mountain«, unser Grotta-Canargiustyp dem Osannschen Liparittyp »Sunset Peak«, unser Birincampotyp steht zwischen Osanns Liparittyp »Sunset Peak« und Dazittyp »Bunsen Peak«; unser Calasettatyp ähnelt mexikanischen Liparitobsidianen, deren Zugehörigkeit zur Alkalikalkreihe Rosenbusch[1] besonders betont.

Stehen auch unsre Liparite zum Teil manchen Quarzkeratophyren vielleicht nicht allzufern, so möchten wir doch den Namen dieser gegenwärtig so inhomogen erscheinenden Gruppe vermeiden; umfaßt doch das Wort Quarzkeratophyr Gesteine des Harzes und des Fichtelgebirges, welche an Al_2O_3 teils gesättigt, teils übersättigt, niemals aber ungesättigt sind und nach Rosenbusch aplitische Spaltungsformen der Alkalikalkreihe darstellen, sowie Gesteine von Evisa und Vico auf Korsika, die nach Deprats[2] Beschreibung Ägirin und Ribeckit führen, an Al_2O_3 ungesättigt sind und von Rosenbusch[3] in seine Alkalireihe gestellt werden. Wird es überhaupt angängig sein, die »aplitischen Spaltungsformen« eines Alkalikalkgesteins von den ihm in der Alkalireihe gegenüberstehenden Gesteinen chemisch zu unterscheiden?

Zwischen typischen Vertretern von Rosenbuschs Alkalireihe einerseits und seiner Alkalikalkreihe anderseits haben wir in chemischer und mineralogischer Hinsicht alle denkbaren Zwischenglieder. Rosenbusch läßt die geologische Assoziation darüber entscheiden, ob ein solches Zwischenglied an einer gegebenen Lokalität der einen oder der andern Reihe zuzurechnen sei, da nach ihm stets nur Glieder einer und derselben Reihe geologisch verknüpft sein sollen. Wenn wir aber auf unsern beiden Inseln Comendite einerseits und normale Andesite wie Basalte anderseits, also typische Vertreter beider Reihen, assoziiert sehen, so versagt uns hier die geologische Assoziation der in Frage stehenden Liparite nicht nur ihre Entscheidung über den Charakter der letzteren, sondern sie zeigt uns sogar an ihrer eigenen Zwittergestalt die Möglichkeit inniger Verknüpfung von Alkaligesteinen (Comendite) und Alkalikalkgesteinen (Andesit + Basalt). Solche Verquickung ist auch sonst, wenn auch nicht oft so prägnant in solch engem Areal, zu beobachten, z. B. auf der Mutterinsel Sardinien, wo postburdigale Andesite und Trachyandesite nebeneinander von Deprat[1] im Anglonagebiet und von Millosevich[2] zwischen Florinas und Alghero gefunden wurden.

---

[1] Rosenbusch, Gesteinslehre 1910. 327, Analyse 13.

[2] Deprat, Compt. rend. **143**. 753. 1906; vgl. auch Verrier, ebenda **109**. 38. 1889.

[3] Rosenbusch, Mikrosk. Phys. d. Gesteine. 1908. 1492.

Die beiden großen Gesteinsreihen Rosenbuschs berühren sich also nicht nur chemisch, sondern auch räumlich-zeitlich; letzteres wird verständlich durch die Annahme einer Vielheit von Magmaherden, ersteres durch die Tatsache weitgehender Mischbarkeit von Alkaliverbindungen und Kalkverbindungen in Feldspäten, Pyroxenen und Amphibolen besonders bei höherer Temperatur. Auch rein sprachlich deuten ja schon die Wörter »Alkalireihe« und »Alkalikalkreihe« die Unvollkommenheit ihres Gegensatzes an.

Zusammenfassung.

In der vorstehenden Arbeit wurden

1. auf S. Antioco Comendite, Liparite, Hypersthenandesit und Hypersthenbasalt nachgewiesen;

2. Bertolios Beschreibung von S. Pietro modifiziert und vervollständigt, seine »Trachyte« als Liparite gedeutet und zum Teil hypersthenhaltig befunden;

3. eine größere Verbreitung und Mannigfaltigkeit der Comendite auf S. Pietro, darunter auch pechsteinartige und Cossyrit führende Varietäten ermittelt;

4. die Identität der Liparite von S. Pietro mit solchen von S. Antioco sowie die Zugehörigkeit der Tuffe beider Inseln zu diesen Lipariten festgestellt;

5. eigenartige Feldspäte der Natronorthoklasreihe und der Kaliplagioklasreihe beschrieben.

---

[1] Deprat, Compt. rend. **146.** 591. 1908.

[2] Millosevich, Mem. R. Accad. Linc. VIII. 599. 1911.

Erläuterungen zu den Tafeln I—III.

Taf. I.

Fig. 1. Comendit von Comende (S. Pietro). Typ Comende; gekreuzte Nicols, Vergrößerung 50 fach linear. Einsprenglinge von Quarz (links) und Natronsanidin (rechts). in der Grundmasse kleine Quarzdihexaeder.

Fig. 2. Comendit von Mercureddu (S. Antioco). Analyse[1] Nr. 3. Typ Mercureddu; ein Nicol, mit Hauptschnitt rechts–links, Vergrößerung 64fach linear. Lumière-autochrom[2]. Die Sanidinsphärokristalle sind von je einem in ihre Zwickel eindringenden, optisch einheitlichen Arfvedsonitindividuum umgeben; der Arfvedsonit ist dunkelgrünblau (rechts oben) bis hellgelbgrün (unten und links oben) pleochroitisch; braune Körner von Cossyrit.

Fig. 3. Derselbe Dünnschliff; gekreuzte Nicols, Vergrößerung 54fach linear. Sanidinstengel und -sphärokristalle in Quarzfeldern, links ein Teil eines Quarzdihexaeders.

Fig. 4. Comendit von Cala Lunga (S. Antioco). Analyse Nr. 8. Typ Fontane; gekreuzte Nicols, Vergrößerung 56fach linear. Quarzfelder, von Sanidinstengeln durchspickt.

Taf. II.

Fig. 5. Liparit von Tupei (S. Antioco). Typ Calasetta; gewöhnliches Licht, Vergrößerung 32fach linear. Schlierig-fluidales Glas mit Einsprenglingen von Natronsanidin und Kaliplagioklas; in den dunklen geschlossenen Kurven (rechts) erscheint beim Einschieben der Nicols je ein Mikrofelsitsphärolith.

Fig. 6. Liparit von Rocca della Guardia (S. Antioco). Analyse Nr. 11. Typ Sisineddu; gekreuzte Nicols, Vergrößerung 50fach linear. In feldspatdurchspicktem Quarzpflaster (rechts oben) liegen zwei Einsprenglinge von Natronsanidin und Kaliplagioklas.

Fig. 7. Liparit von der Grotta Canargius (S. Antioco). Analyse Nr. 16. Typ Grotta Canargius; gekreuzte Nicols, Vergrößerung 56fach linear. In isotroper Glasmasse liegen ein Karlsbader Zwilling und stiefelknechtförmige Mikrolithe von Feldspat und dunklere, scheinbar leistenförmige Mikrolithe von Biotit.

Fig. 8. Liparit von Calasetta (S. Antioco). Analyse Nr. 17. Typ Birincampo; gekreuzte Nicols, Vergrößerung 51fach linear. Zwei Einsprenglinge von Kaliplagioklas in feinkörnigem fluidalen Quarzfeldspataggregat.

Taf. III.

Fig. 9. Liparit vom Monte de Cresia (S. Antioco). Analyse Nr. 15. Typ Monte de Cresia; gewöhnliches Licht, Vergrößerung 92fach linear. Feldspatmikrolithe, zum Teil stiefelknechtförmig, liegen in einer dichteren Masse.

---

[1] Die hier vermerkten Analysen sind stets von dem gleichen Handstück hergestellt wie der photographierte Dünnschliff.

[2] Konnte leider nicht farbig wiedergegeben werden.

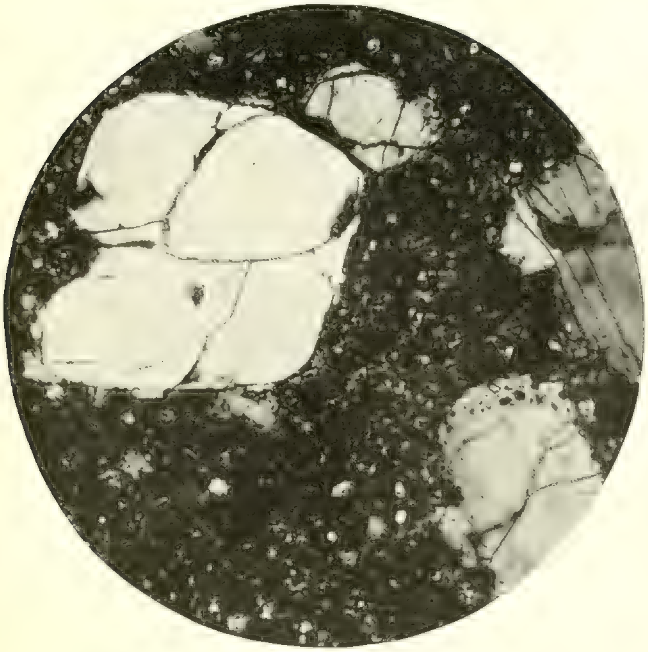
Fig. 10. **Liparittuff** von Sottotorre (S. Antioco). Gewöhnliches Licht, Vergrößerung 29fach linear. Konkavbogige Aschenteilchen aus hellbraunem Glas in dichtem Zement.

Fig. 11. **Hypersthenandesit** von Seddas de Sa Murta (S. Antioco). Analyse Nr. 19. Gekreuzte Nicols, Vergrößerung 51fach linear. Großer Hypersthen ∥ *c* (links), kleiner ⊥ *c* (links unten), Plagioklas mit Schichtung (oben), mit Rahmenform (rechts unten).

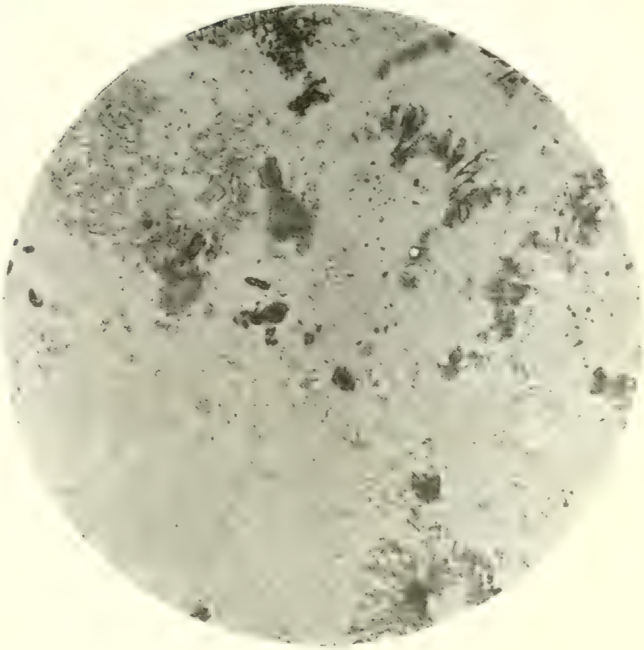
Fig. 12. **Hypersthenbasalt** vom Capo Sperone (S. Antioco). Analyse Nr. 20. Gekreuzte Nicols, Vergrößerung 49fach linear. Einsprenglinge von Hypersthen (Mitte) und solche von Plagioklas.

Inhaltsübersicht.

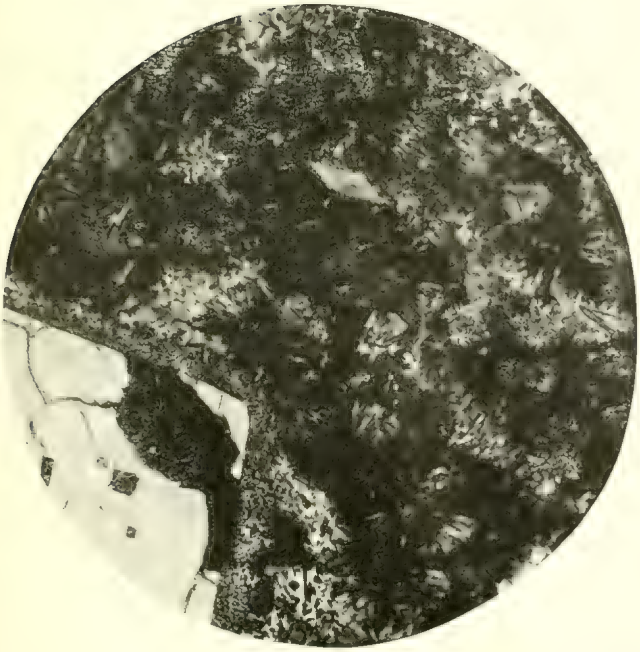
Seite
Einleitung 3
Petrographische Beschreibung
Comendite:
a) Typus Comende 4
b) Typus Mercureddu 14
c) Typus Fontane 17
Liparite:
A. Massige Gesteine
a) Typus Calasetta 26
b) Typus Sisineddu 29
c) Typus Grotta Canargius 36
d) Typus Birincampo 42
e) Typus Monte de Cresia 47
B. Tuffe 49
Hypersthenandesit 55
Hypersthenbasalt 58
Beobachtungen über Verbreitung und Lagerung 61
Bemerkungen über Altersverhältnisse 66
Petrographische Vergleiche 69
Zusammenfassung 79
Erläuterungen zu den Tafeln I—III 80



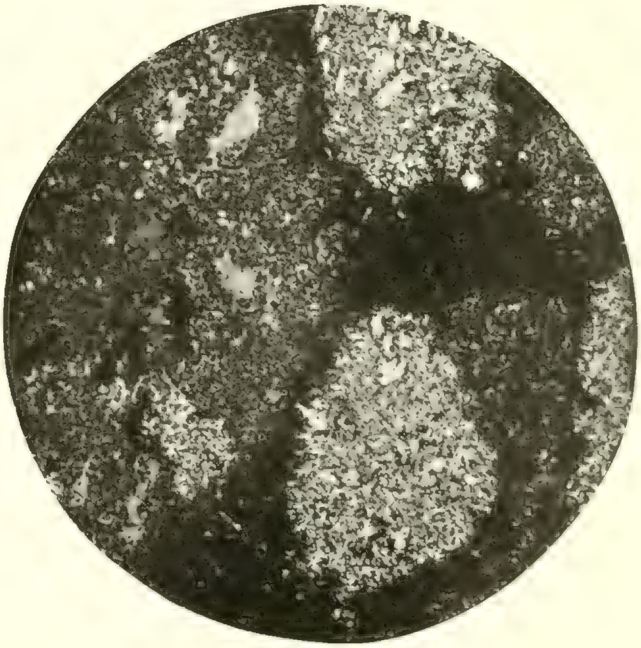
1



2



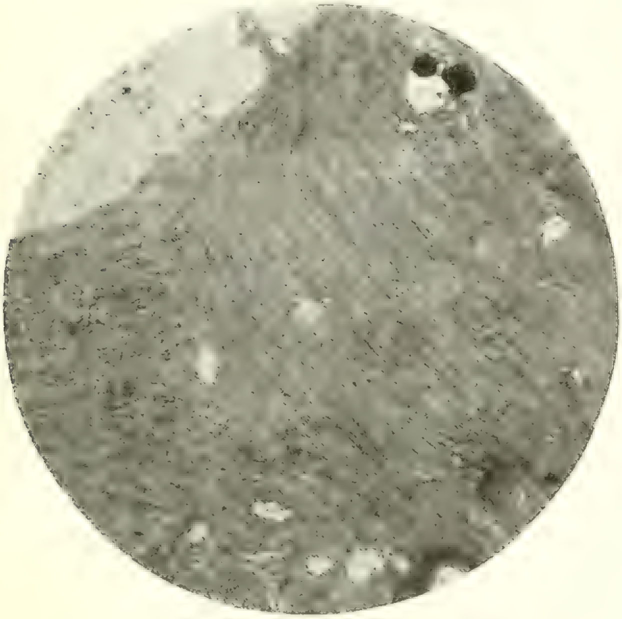
3



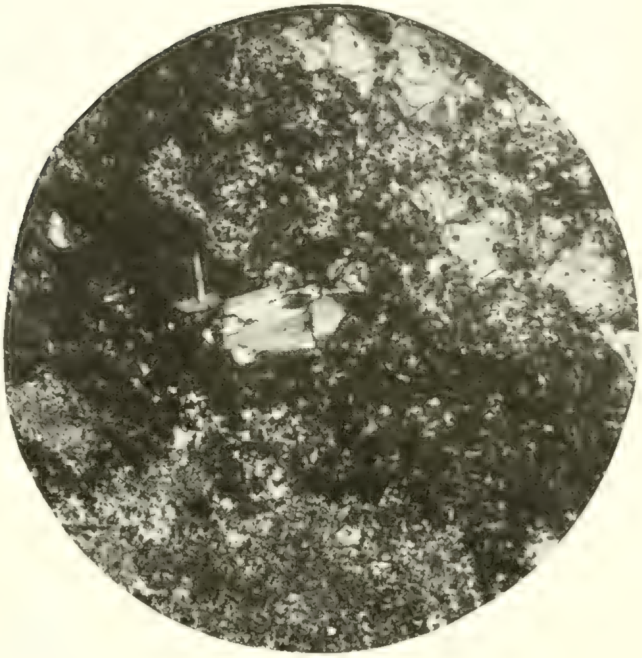
4

A. **Johnsen**: Die Gesteine der Inseln S. Pietro und S. Antioco (Sardinien).

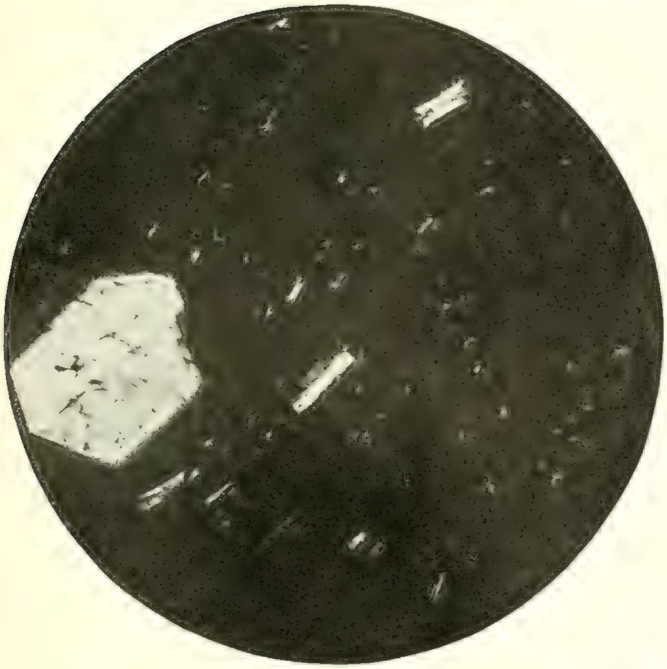
Taf. I.



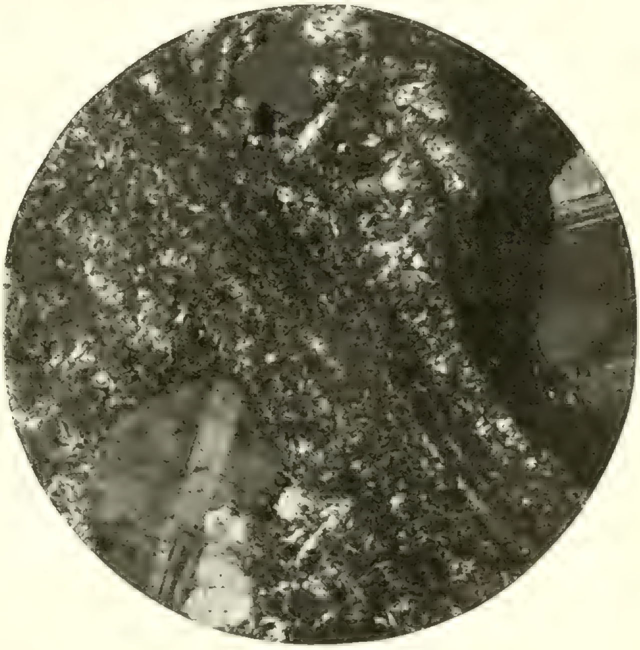
5



6



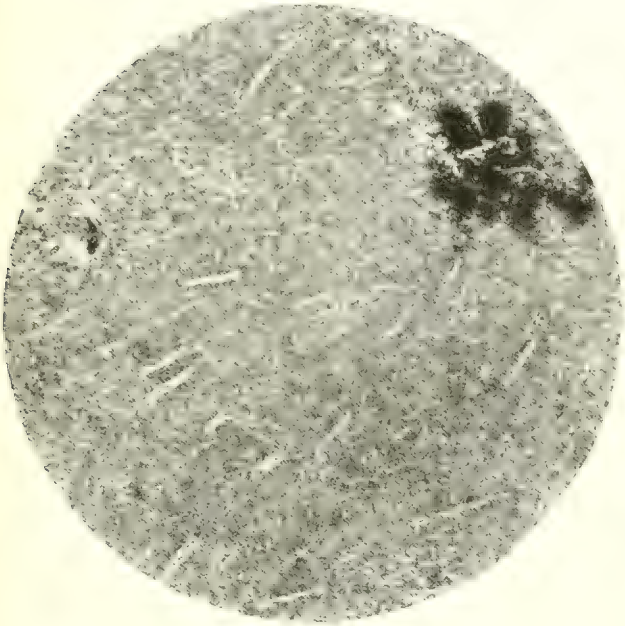
7



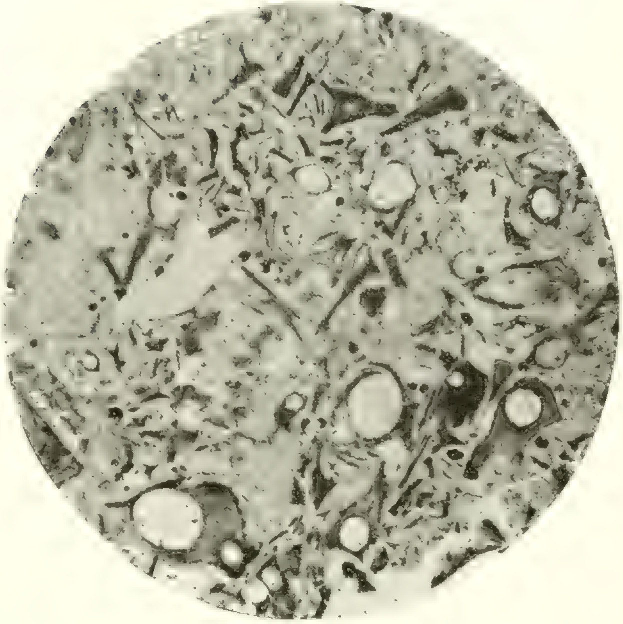
8

A. Johnsen: Die Gesteine der Inseln S. Pietro und S. Antioco (Sardinien).

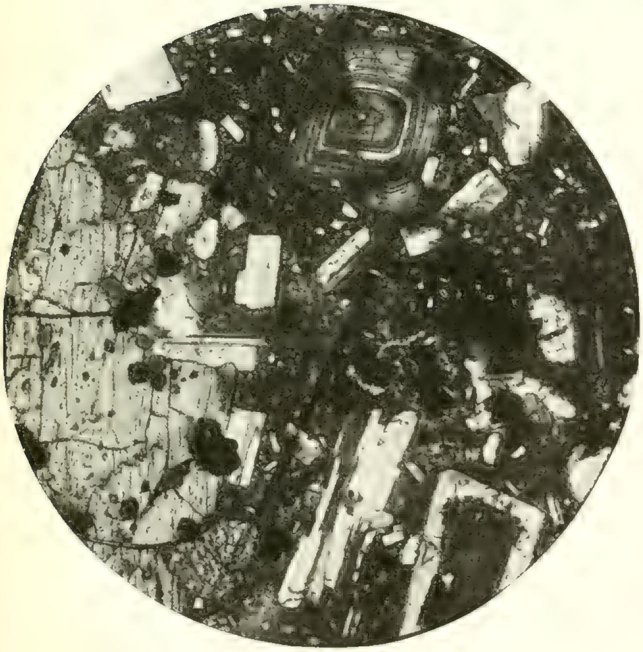
Taf. II.



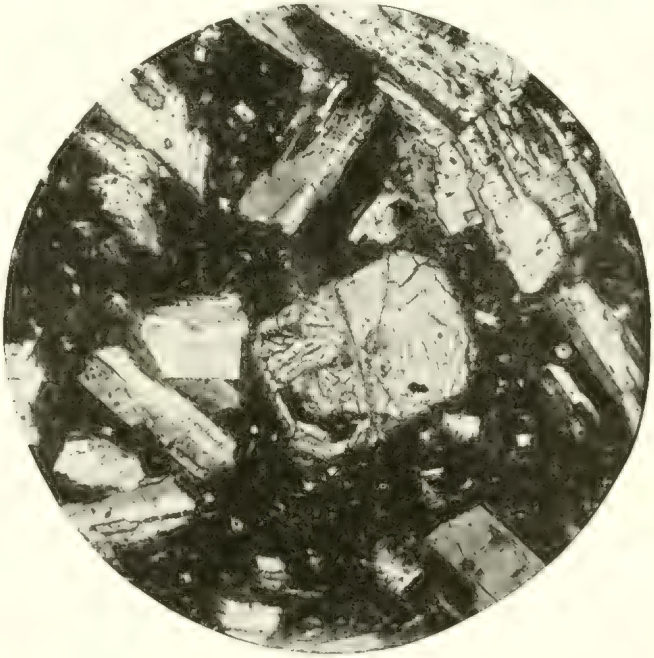
9



10



11



12

A. Johnsen: Die Gesteine der Inseln S. Pietro und S. Antioco (Sardinien).

Taf. III.

Morphologische Studien zur Rassendiagnostik der Turfanschädel.

Von

Prof. Dr. H. KLAATSCH
in Breslau.

Vorgelegt von Hrn. Waldeyer in der Gesamtsitzung am 25. Juli 1912.
Zum Druck verordnet am 24. Oktober 1912, ausgegeben am 1. Februar 1913.

Einleitende Bemerkungen.

Als ich im Oktober 1908 das Schädelmaterial der Turfanexpedition gesandt erhielt und auf das Anerbieten des Hrn. Dr. von Le Coq einging, eine wissenschaftliche Untersuchung dieser Objekte vorzunehmen, mußte ich bald einsehen, daß ich damit eine ganz überaus schwierige und wenig dankbare Aufgabe übernommen hatte. Es wäre freilich sehr einfach gewesen, nach dem alten Schema der Kraniometrie die Maße zu nehmen, Indizes und Durchschnittswerte auszurechnen und daraus Schlüsse auf die Anthropologie der Turfanbevölkerung zu ziehen von jenem zweifelhaften Werte, der den früheren Tabellenarbeiten zukommt. Damit aber wäre weder der Wissenschaft noch denjenigen ein Dienst erwiesen worden, die von dem Anatomen gern Aufschlüsse über das mühsam erbeutete Knochenmaterial haben möchten mit Rücksicht auf die kulturellen Probleme, die durch die Aufdeckung dieser untergegangenen Kulturstätten angeregt worden sind. Läßt sich an den Schädeln dieser Menschen ermitteln, aus welchen Elementen sich die Bevölkerung dieser einst blühenden Orte zusammensetzte? Die reichen Schätze bildlicher Darstellung zeigen uns ihre Gesichtszüge, die offenbar einer Mischbevölkerung angehören. Neben deutlich mongoloiden Gesichtern treten uns auf diesen Bildern andere entgegen, die uns mehr europäisch anmuten, blondhaarige Menschen mit großen Nasen und düsterm Ausdruck der Augen. Auch die Ergebnisse der Sprachforschung weisen auf verschiedene Quellen der Menschheit hin, die sich hier vereinigten. Neben den Mongoloiden wurde ein bis dahin unbekanntes Idiom indogermanischen Charakters gefunden.

Sollte für diese kulturellen Fragen eine ergänzende Studie am Knochenmaterial angestellt werden, so war es klar, daß die alten Methoden gänzlich versagten. Das nivellierende Element der Indizes und der Durchschnittswerte paßt schlecht zu einem Bemühen, dessen Ziel es ist, Unterschiede herauszufinden, zu analysieren. Eine solche Aufgabe kann nur von denselben Gesichtspunkten in Angriff genommen werden wie die Untersuchung eines lebenden Volkes — in ihren Gesichtszügen suchen wir zu lesen, aus welchen Elementen sich das bunte Gemisch einer Weltstadt zusammensetzt. Nicht grobe Maße, feinste Details in der Gestaltung der Nase, des Mundes usw. sind es, die uns verraten, was für Vorfahrenelemente hier nach den Gesetzen der Vererbung sich wieder in die Erscheinung drängen. Die Kombinationen von Einzelerscheinungen, die den Begriff des »Rassenmerkmals« liefern, müssen am knöchernen Gesicht ebenso sich auffinden lassen wie an dem mit Weichteilen bekleideten. Aber die Verknüpfung zwischen diesen beiden großen Forschungsgebieten, dem lebenden Gesicht und dem Gesichtsskelett, ist heute noch keineswegs ein Gemeingut der Wissenschaft — im Gegenteil, langsam nur und mühsam bahnt sich hier ein neuer Forschungszweig der Anatomie an.

Auf Vorarbeiten in dieser Richtung konnte ich bei dem mir vorliegenden Material und Problem nicht rechnen. Wußte ich doch nur zu genau, wie außerordentlich vernachlässigt bisher das Studium des Gesichtsskeletts bez. Rassendiagnose noch immer ist; es ist die alte Schuld der schematisierenden Kraniometrie, die sich hier bitter rächt. Bei meinen Australierstudien hatte ich ja gesehen, daß hier überhaupt erst die Grundlagen geschaffen werden müssen. Jede einzelne Komponente des Gesichtsskeletts muß in ihrer individuellen Variation bis zum letzten Detail erforscht werden, und doch darf dabei das Gesamtbild, das aus diesem Mosaik hervorgeht, nie vernachlässigt werden.

Bei diesem noch so gänzlich in den Anfängen befindlichen Zustande der Rassendiagnose der Gesichtsskelettes sollte bereits die Anwendung auf ein bestimmtes Material gewagt werden! Ich muß gestehen, daß mir diese Aufgabe mehr als einmal unlösbar erschien und daß ich nahe daran war, auf die Bearbeitung der Turfanschädel zu verzichten, hätte ich es nicht als meine Pflicht empfunden, wenigstens das in meinen Kräften Stehende als Hilfe für andere Disziplinen zu leisten, unbekümmert darum, daß ich dadurch allerdings billiger Kritik derer mich exponierte, die Angriffspunkte genug finden werden, um zu sagen, daß man die Aufgaben anders hätte lösen müssen. Mögen die Betreffenden dann nur mit dem Beispiel vorangehen.

Die Schwierigkeiten würden vielleicht noch als erträglich erscheinen, wenn es sich um ein reichliches Material handelte — aber das Gegenteil ist der Fall. Von den im ganzen vorliegenden 18 Schädeln scheidet fast ein Drittel aus der Untersuchung aus wegen des jugendlichen Zustandes; denn nur erwachsene Objekte können naturgemäß für Rassendiagnostik in Frage kommen. Unter diesen sind wiederum nur die männlichen ganz verwertbar. Nur ein Drittel — also 6 — sind in dieser Hinsicht als vollgültiges Material zu betrachten, und an diesem minimalen Material sollen Fragen von solcher Tragweite erörtert werden? Angenommen, es handele sich um tadellos erhaltene Schädel mit Unterkiefer, so ließe sich vielleicht noch etwas Definitives darin erreichen. Ich habe ja in früheren Arbeiten die hohe diagnostische Bedeutung des Unterkiefers gewürdigt, und die Bearbeitung des fossilen Materials der menschlichen Kopfskelettes hat uns ja mit der Vorstellung vertraut gemacht, daß man bereits nach wenigen Objekten Anhaltspunkte über Rassenverwandtschaft gewinnen kann.

Aber von den 18 Schädeln haben nur 5 Unterkiefer, die mit einiger Sicherheit sich als dazugehörig erkennen lassen! Und nun erst der Erhaltungszustand! Er ist bei einem großen Teil des Materials geradezu betrübend, zumal hauptsächlich die Nasenregion einen Hauptsitz der Zerstörung bildet. Wie ich höre, sind die Schädel Individuen entnommen, die bei den letzten Zerstörungskämpfen die Opfer eines Gemetzels wurden. Männer, Weiber und Kinder wurden hingemordet und, wie ich nach dem Zustand des Materials annehmen muß, sogleich verstümmelt, die Nasen abgehackt, der Kopf vom Rumpf getrennt, teils der Kopf direkt zertrümmert. Anders kann man sich die schweren Defekte gar nicht erklären.

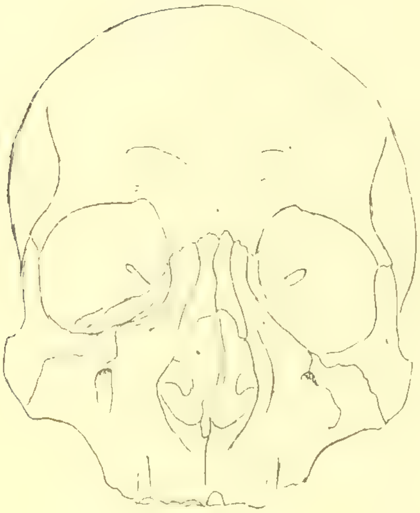
Trotz aller dieser fast überwältigenden Hindernisse habe ich den Versuch gemacht, nach meinen neuen Gesichtspunkten auf morphologischem Wege die Rassendiagnose vorzunehmen, soweit das immerhin beschränkte Untersuchungsmaterial, das mir zur Vergleichung zur Verfügung stand, es gestattete.

1. Morphologie des Gesichtsskeletts.

Bei der immer wiederholten Betrachtung der Schädel und der Vergleichung mit solchen der verschiedenen Rassen schärfte sich allmählich der Blick für die Wahrnehmung von Einzelheiten und von Kombinationen derselben, die allmählich eine Gruppierung der Objekte gestatteten. Am leichtesten fiel die Wahrnehmung gemeinsamer Eigentümlichkeiten bei den Schädeln T 9, T 12, T 13 und T 16[1], auf die daher zunächst eingegangen werden soll.

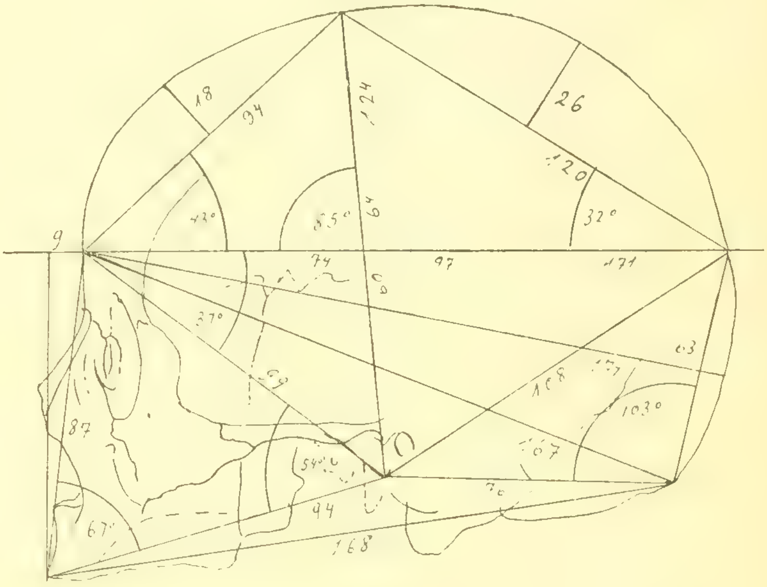
Von dieser Gruppe besitzt der Schädel T 12 das am besten erhaltene Gesichtsskelett und soll daher als Prototyp dienen.

Fig. 1.



Turfan 12.

Fig. 2.



Turfan 12.

Fig. 1. Norma facilis.
Fig. 2. Mediandiagramm und Norma sagittalis des Schädels Turfan 12.
½ nat. Größe.

Die entsprechende Bezeichnung gilt für alle folgenden Schädelabbildungen. Bezüglich der Technik der Herstellung der Mediandiagramme und der eingetragenen Linien und Maße ist zu vergleichen die zitierte Abhandlung von H. Klaatsch über Kraniomorphologie und Kraniotrigenometrie, Archiv für Anthropologie 1908.

Die Glabellargegend ist flach und wird beiderseits von ganz geringen Anschwellungen begrenzt, die dem medialen Teil des Arcus superciliares entsprechen. Rechts ist die Vorragung etwas stärker ausgeprägt und reicht weiter seitlich über die Stelle der Incisura supraorbitalis hinaus. Links geht die flache Depression, die den Processus jugalis der Frontale medial begrenzt, direkt von der Incisura supraorbitalis aus, die hier ziemlich flach erscheint. Rechts ist außerdem ein kleines Foramen supraorbitale vorhanden. Lateral von dieser Stelle ist der Supraorbitalrand auf beiden Seiten scharf und senkt sich schräg abwärts zur Synostosis fronto-jugalis. Über der letzteren bildet der Processus jugalis ossis frontis einen nur ganz schwachen Vorsprung.

---

[1] Die Numerierung der Schädel lehnt sich zum Teil an Zahlen an, die auf den Objekten standen, bei andern nahm ich sie in ergänzender Weise vor.

Die Tubera frontalia sind nur wenig, aber deutlich ausgeprägt. Oberhalb derselben ist eine ganz schwache Crista frontalis bemerkbar.

Die Lineae temporales sind hinter der postorbitalen Einschnürung nur wenig markiert.

Der Processus maxillaris ossis frontis springt stark nach abwärts vor und mißt in seinem untern Teil 25 mm Breite. Seine Mitte ist von einigen unregelmäßigen Vertiefungen eingenommen, die als letzter Rest einer Stirnnaht erscheinen. Am Nasion fehlt jede Spur einer Vertiefung oder Einziehung. Der mittlere Teil des Processus maxillaris ossis frontis stellt eine etwa 14 mm breite Fläche dar, die durch eine ganz schwache Unebenheit von zwei seitlichen, leicht ausgehöhlten Feldern begrenzt wird. Sie entsprechen den Processus frontales des Maxillare an Ausdehnung und sind durch eine stumpfe Kante gegen die Facies orbitalis des Stirnbeins abgesetzt. Der mittlere, den Nasenbeinen sich anschließende Teil des Processus maxillaris des Frontale läßt sich nach oben und seitlich in die Arcus superciliares verfolgen, von diesen nur durch eine ganz schwache Einsenkung gesondert. Ein Glabellarpunkt ist nicht markiert. Für die Schädelaufnahmen habe ich als die entsprechende Stelle den Schnittpunkt der Medianen mit einer durch die Höhe der schwachen Arcus superciliares gelegten Horizontalen benutzt. Hier flacht sich die interorbitale Erhebung nach aufwärts ganz schwach ab. Von diesem Punkte ist das Nasion 15 mm entfernt.

Die Nasenbeine sind vollständig erhalten. Die Sutura internasalis hört in einer Entfernung von 4 mm von der Apertura nasalis auf. Die hier verwachsenen Ossa nasalia zeigen an der entsprechenden lateralen Begrenzung partielle Konkreszenz mit dem Zwischenkieferteil des Os maxillare. Weiter aufwärts steigt die Sutur schräg medialwärts empor bis zum oberen Drittel der Nasalia, um sich dann schwach lateralwärts zum Stirnbein zu wenden. In diesem oberen Teil verläuft die Naht in einer Art von Rinne. Die Processus frontales des Oberkiefers sind leicht nach außen gewölbt. Die Höhe dieser Wölbung liegt in der Fortsetzung des Infraorbitalrandes. Die Naht zwischen Stirnbein und Oberkiefer ist stark gezackt. Sie zieht schräg lateralabwärts und befindet sich auf einer rechts mehr als links ausgeprägten leichten Erhebung. Die Nasenbeine springen aufwärts etwas mehr vor als die angrenzenden Partien des Oberkiefers. Die Sutura nasofrontalis ist unregelmäßig gezackt. Es besteht hier eine leichte Asymmetrie der Nasalia. Das rechte greift über die Mittellinie etwas nach links über. Die Sutura internasalis trifft ungefähr einen Millimeter nach links von der Mittellinie auf die Nasofrontalnaht. Die Ablenkung der Internasalsutur von der Mediane tritt bereits etwa 10 mm vom Nasion hervor, genau der Stelle entsprechend, an welcher die beiden Nasenbeine ihre größte Verschmälerung zeigen. In diesem oberen Teil der Nasalia besteht zunächst in der Nachbarschaft des Stirnbeins nur eine ganz schwache Konvexität, die allmählich sich zu einer minimalen Crista internasalis zuschärft. Sie ist an der Einschnürungsstelle der Nasenbeine am deutlichsten, dort wo von den Seiten die Processus frontales des Maxillare sich gleichsam medialwärts am stärksten vordrängen. Weiter abwärts verbreitern sich die Nasalia beträchtlich und bilden zusammen eine flache Wölbung ohne Ausprägung einer medianen Kammbildung. Jedoch läßt sich eine leichte Deviation der mittleren Erhebung nach der linken Seite hin feststellen. Das rechte Nasale springt mit seinem freien Rande stärker gegen die Nasalapertur vor. Seine Außenfläche zeigt eine schwache Vertiefung. Die ausgesprochene Asymmetrie der knöchernen Nase erstreckt sich auch auf die vom Intermaxillare gelieferten Teile der Begrenzungen der Apertura piriformis. In der Gestaltung dieser Teile liegt einer der am meisten charakteristischen Züge des Gesichtsskeletts von T 12.

Nasenbeine und Oberkieferknochen bilden zusammen eine Vorwölbung, die den oberen Teil der knöchernen Nase wie aufgebläht erscheinen lassen. Eine schräg abwärts und nach außen streichende Furche setzt diesen gewölbten Teil des Oberkiefers von demjenigen ab, der die vordere Begrenzung der Fossa lacrimalis und den Infraorbitalrand bildet. Diese Furche — Sulcus nasomaxillaris nenne ich ihn — endet oben in der Rinne, die bezüglich der Sutura nasomaxillaris erwähnt wurde, und zieht abwärts zum Foramen infraorbitale. Medial von dieser Furche findet sich eine ihr parallel verlaufende Erhebung, die ungefähr der äußeren Grenze des Intermaxillare entsprechen dürfte. Im Sulcus nasomaxillaris zeigen sich mehrere Foramina, rechts und links ein größeres und links darüber noch ein kleineres. An den Nasenbeinen findet sich nur rechts ein Gefäßloch, ziemlich in der Mitte unterhalb der verschmälerten Partie. Der knöcherne Rand der Apertura piriformis springt auch in untern Teilen rechts mehr vor als links. Ihre größte Breite mit 28 mm erreicht die knöcherne Nasenapertur etwas unter der Mitte. Die Höhe der Öffnung läßt sich nur seitlich vom Septum bestimmen — sie beträgt hier 32 mm —, da die offenbar sehr starke Spina nasalis ant. inf. abgebrochen ist. Von der Stelle der größten Breite an wird der seitliche Rand scharf und glatt, zieht in schräg medialer Richtung abwärts und läuft gegen den Alveolarwulst des lateralen Incisivus aus als Begrenzung einer Fossa praenasalis — als Crista praenasalis nach der von mir benutzten Terminologie[1].

Der Margo infranasalis (mihi) wird durch einen rundlichen Wulst gebildet, der sich unterhalb des vorderen Endes der unteren Muschel von der seitlichen Wandung der Nasenhöhle abzuheben beginnt, ohne mit der Crista praenasalis einen Zusammenhang zu zeigen. Der Margo infranasalis trifft in einer Entfernung von etwa 8 mm von dem vordersten erhalten gebliebenen Punkte der Crista nasalis auf das sehr starke knöcherne Septum auf, ohne Ausprägung einer Verschärfung. Unmittelbar dahinter zeigt sich die trichterförmige Öffnung des Canalis incisivus. Lateral davon liegt der infranasale Rand in einem Niveau mit dem Boden der Nasenhöhle. Die Fossa praenasalis ist nach vorn und etwas aufwärts gekehrt. Sie gehört ganz der Außenfläche des Processus alveolaris an und verliert im medialen Teil gänzlich die Abgrenzung gegen dieselbe. Hier besteht eine starke Konkavität jederseits neben einer scharfen medianen Leiste, die als Fortsetzung der unteren Spina nasalis bis zum Alveolarrand reicht — in einer auffällig scharfen Ausprägung.

---

[1] Klaatsch, Das Gesichtsskelett der Neandertalrasse und der Australier. Verh. der Anat. Gesellschaft 1908. — Klaatsch, The skull of the Australian Aboriginals. Reports of the Path. Lab. of the Lunaey Dép. N. S. Wales. Sydney 1908. — G. v. Bonin, Zur Morphologie der Fossa praenasalis. Archiv für Anthropologie N. F., XI, 1912.

Die Juga alveolaria der fehlenden Incisivi sind nur wenig hervortretend, von denen der Canini ist die entsprechende Erhebung rechts stärker markiert als links und in einer Ausdehnung bis 16 mm vom Alveolarrand verfolgbar. Eine Fossa canina ist nicht gut ausgeprägt, nur ein minimaler Knochenvorsprung markiert die Stelle ihrer oberen Grenze. Seitlich davon zieht eine besonders rechts sehr auffällige Furche abwärts, die aufwärts zum Foramen infraorbitale führt. Diese Öffnung ist von bemerkenswerter Größe. Die Begrenzung zeigt einen größeren Durchmesser von 5 mm und einen dazu senkrecht gestellten kleineren von 3 mm. Die Richtung des größeren Durchmessers entspricht dem Verlaufe des oben beschriebenen Sulcus nasomaxillaris. Links findet sich unter der Hauptöffnung noch ein kleineres Foramen. Die Partie zwischen Foramen infraorbitale und dem untern Rand der Augenhöhle ist stark konvex gestaltet und zeigt in ihrem obern Teil Reste einer Sutura infraorbitalis jederseits. Wo diese den Rand der Augenhöhle erreicht, ist sie von der Sutura jugomaxillaris nur 4 mm entfernt. Die Stelle der Sutura infraorbitalis ist ein wenig angehoben und bezeichnet am untern Orbitalrand den Beginn einer medialwärts eintretenden Verschärfung, die besonders die vordere Begrenzung des Canalis lacrimalis auszeichnet. Die Eingangsöffnung in denselben ist sehr weit, etwa 8 mm breit. Bei Betrachtung des Schädels von der Seite erscheint die Öffnung weit nach vorn gelagert, indem die vordere Kante vom untern Orbitalrand bogenförmig nach vorn sich wendet. Die ganze Gegend erscheint wie vorgeschoben. Hiermit hängt auch das Verhalten des ganzen untern Augenhöhlenrandes zusammen, der bei seitlicher Betrachtung bedeutend weiter vorragt als der obere Rand, wobei es gleichgültig ist, ob man den Schädel in die Frankfurter Horizontale einstellt oder nach dem Glabella-Lambda-Niveau orientiert.

Ich habe bei diesen vergleichenden Gesichtsskelettstudien es als praktisch gefunden, eine gemeinsame Einstellung der Objekte auf den oberen Rand des Jochbogens vorzunehmen. Bei den meisten Schädeln macht die Bestimmung dieser Ebene keine Schwierigkeiten, und auch bei den uns hier zunächst beschäftigenden Objekten ist dies nicht der Fall. Anders freilich bei solchen mit bogenförmigem Verlauf, wie bei Anthropoiden, besonders Gorilla, aber auch Menschen, z. B. manchen Australiern. Welcher Weg zur Überwindung dieser Schwierigkeiten einzuschlagen sei, werde ich an anderer Stelle darlegen und will nur bemerken, daß die Methode auch für solche Objekte brauchbar ist.

Den noch immer zahlreichen Anhängern der Frankfurter Horizontale wird diese Art der Einstellung willkommen sein, da zwischen beiden Ebenen geringe Unterschiede bestehen.

Der Eindruck der Vorschiebung der Infraorbitalregion prägt sich deutlich in der Beschaffenheit des Jugale aus.

Mit dem gewöhnlichen Verhalten europäischer Schädel verglichen erscheint das Jugale wie mit seinem unteren Teile ein wenig nach vorn und aufwärts gedreht. Die Gegend der Jugomaxillarnaht springt im ganzen wulstig vor. Die Naht verläuft vom Infraorbitalrand zunächst schwach geneigt nach außen, biegt dann, namentlich rechts, stärker nach abwärts um und läuft auf die mit starker Rauhigkeit versehene Erhebung zwischen dem unteren Rand des Jochbogens und dem Jugalwulst des Maxillare aus (Processus jugomaxillaris mihi). In der Betrachtung von vorn zeigt die laterale Kante des Jugalwulstes einen bogenförmigen Verlauf, von ziemlich gleichmäßiger Krümmung; von unten gesehen setzt sich diese Kante in nahezu rechtem Winkel gegen die Verlaufsrichtung des Jochbogens ab. Die Temporalgrube ist in ihrem vorderen Teile sehr geräumig; die Facies temporalis des Maxillare ist abgeflacht, das Tuber wenig ausgeprägt, die Crista infratemporalis nur angedeutet. Der untere Rand des Jochbogens verjüngt sich schnell nach hinten und behält seine rauhe Beschaffenheit bis nahe an die Verbindung mit dem Processus jugalis des Temporale bei. Die Stelle dieser Verbindung bildet einen Vorsprung des unteren Randes zwischen zwei flachen, glatten Inzisuren.

Die Gesichtsfläche des Jochbeins läßt einen kleineren nach vorn und einen größeren schräg seitlich und ein wenig nach oben gerichteten Teil unterscheiden. Die Grenze beider ist durch eine Verlängerung des seitlichen Orbitalrandes bis zum Processus jugomaxillaris gegeben.

Die hintere Partie der Außenfläche des Jugale wird von einer nahezu horizontal verlaufenden Rauhigkeit durchzogen. Sie beginnt vorn ungefähr in der Mitte der Sutura jugomaxillaris und endet am untern Rand des Jochbogens an der Sutura jugotemporalis. Links ist sie stärker ausgeprägt als rechts. Über ihrer Mitte in 1 cm Entfernung befindet sich das Foramen zygomaticofaciale. Zieht man eine Linie vom oberen Rand des Jochbogens zum untern Rand der Augenhöhle, so durchschneidet sie das Jugale an einer Partie, die man als Basis des Processus frontalis betrachten kann und deren Breite ungefähr 23 mm beträgt. Der vordere orbitale

Rand ist im untern Teil abgestumpft, verschärft sich aber beim Aufsteigen gegen die Sutura jugofrontalis. Der hintere temporale Rand behält die bereits am Jochbogen bestehende leicht aufsteigende Richtung zunächst bei und wendet sich dann, den Teil eines Kreisbogens beschreibend, aufwärts, um in etwa 15 mm Entfernung vom Stirnbein einen gut ausgeprägten Processus retrojugalis oder retromarginalis zu bilden. Rechts springt derselbe noch mehr selbständig vor als links. Unterhalb desselben beträgt die Breite des Processus frontalis 14 mm rechts, 15 mm links. Darüber verschmälert er sich auf rechts 8 mm, links 5 mm an der Verbindung mit dem Processus jugalis des Frontale. Die Verbindungsstelle im ganzen ist ein wenig gewulstet, während die äußere Fläche des Processus frontalis des Jugale eine minimale Konkavität erkennen läßt. Der hintere Rand ist sehr scharfkantig und überwölbt von außen her die tiefgehöhlte temporale Fläche. Die Fissura orbitalis inferior ist eng. Der Processus jugalis des Sphenoidale ist stark entwickelt und entsendet unmittelbar hinter der Sutura jugosphenoidalis zackige Vorsprünge abwärts, die die Fissur einengen.

Die äußere Begrenzung der Augenhöhle weicht von der Kreisform durch eine obere mediale und eine untere laterale Ausbuchtung ab, die der Orbita den Anschein einer schrägen Stellung verleihen. Der größte schräge Durchmesser vom Dakryon zur Mitte des Margo orbitalis des Jugale gemessen beträgt links 40 mm, rechts 38 mm. Ein dazu senkrecht stehender schräg vertikaler Durchmesser der Mitte der Orbita beträgt links und rechts 35 mm. Mißt man hingegen in horizontaler Richtung vom Dakryon zur Frontojugalverbindung und in der Mitte hierzu vertikal, so stellen sich die Durchmesser der Orbitalöffnung auf Querdurchmesser links 38 mm, rechts 36 mm — Breite der Orbita, senkrecht dazu links 37.5 mm, rechts 37 mm — als Höhe. Jedenfalls zeigen diese Zahlen eine beträchtliche Weite der Orbita. Die Tiefe der Orbita ist im Verhältnis dazu nicht beträchtlich. Das Foramen opticum steht vom oberen Rande 40 mm ab. Der Boden der Orbita ist am Jugale leicht ausgehöhlt. Medial davon steigt er schräg ohne deutlichen Absatz zum Ethmoidale empor, dessen oberer Rand durch eine tiefe Rinne mit auffällig großem Foramen markiert ist. Die Fossa lacrimalis ist tief ausgehöhlt.

Die Interorbitalbreite, an der Stelle des Dakryon gemessen, beträgt 24 mm, die Biorbitalbreite beträgt 93 mm. Die Supraorbitalbreite, an den lateralen Punkten der Frontojugalverbindung gemessen, die hier am weitesten seitlich vorragen, beträgt 102 mm. Der geringste Abstand der Lineae temporalis voneinander ist 90 mm (postorbitale Einschnürung). Sie entspricht ungefähr der »Schläfenenge« der früheren Kraniometrie. Dasselbe Maß — 90 mm — ergibt sich auch noch ungefähr 10 mm unter der Linea temporalis.

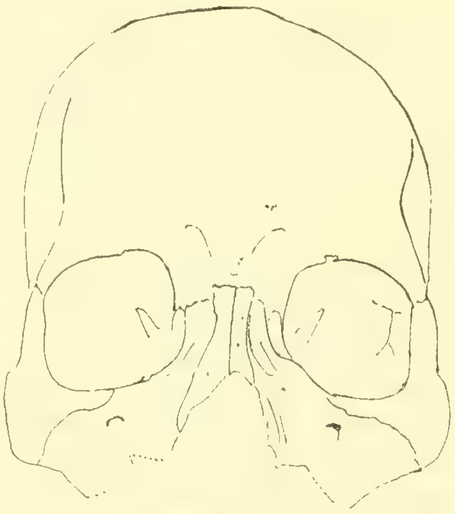
Die Jochbogenbreite ist 130 mm.

Die Breite der Orbitalregion, in der Mitte der Processus frontales des Jugale gemessen, beträgt 110 mm, die größte Maxillarbreite, an der Jugomaxillarverbindung gemessen, 100 mm.

Von den andern Schädeln bietet T 13 die größte Ähnlichkeit mit dem besprochenen dar. Leider aber ist dieses Objekt sehr defekt, es fehlt die ganze untere Partie des Gesichtsskeletts.

Die Glabellarregion ist hier etwas mehr hervortretend, und ihre Wölbung setzt sich nach den Seiten in zwei schwache Arcus superciliares fort. Eine ganz schwache mediane Vertiefung auf dem Glabellarwulst läßt die Reliefbildung im ganzen als den Rest von Supraorbitalwülsten beurteilen, deren lateraler Teil gänzlich abgeflacht ist. Der Processus jugalis des Frontale verhält sich wie bei T 12, nur mit einer ganz geringen Wölbung über der Frontojugalverbindung versehen. Die Incisura supraorbitalis ist bei T 13 rechts sehr weit, links eng; hier befindet sich darüber ein kleines Foramen.

Fig. 3.

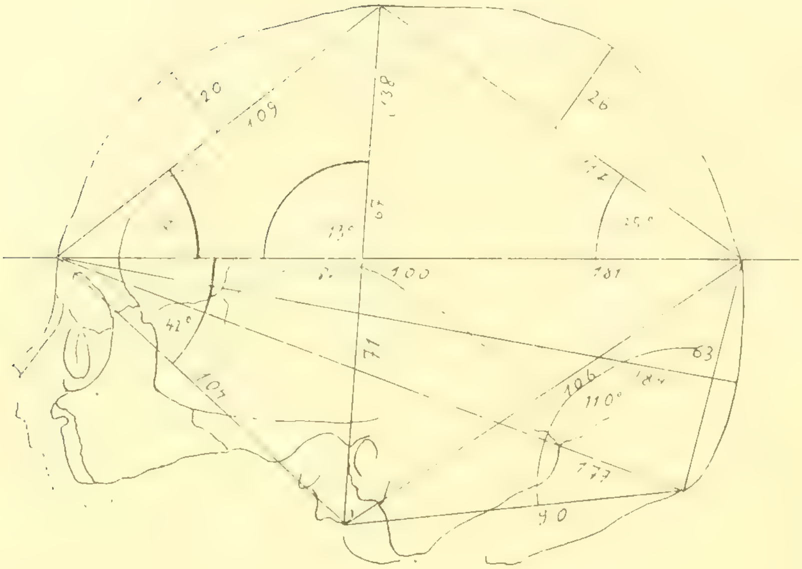


Turfan 13.

Die Tubera frontalia sind nur oben fühlbar, die Lineae temporales sind etwas schärfer markiert als bei T 12.

Der Processus maxillaris ossis frontis springt nicht so weit abwärts vor als bei T 12, das Nasion steht von dem hier leicht bestimmbaren Glabellarpunkt 11 mm ab, die Breite im untern Teil aber ist bedeutender — 27 mm. Auch hier fehlt am Nasion jede Spur einer Einziehung. Die Gliederung der Vorderfläche des Fortsatzes in eine mittlere und zwei seitliche Zonen ist hier noch besser ausgeprägt als bei T 12.

Fig. 4.



Turfan 13.

Von den Nasenbeinen ist das rechte vollständig erhalten, das linke am freien Rande etwas defekt. Die Ähnlichkeit der Nasenbeine und der eigentümlichen Gestaltung der anschließenden Oberkiefergegend mit dem Verhalten bei T 12 ist ganz auffällig. Auch hier ist die partielle Konkreszenz der Nasenbeine untereinander und — nur rechts erhalten mit dem Zwischenkieferteil des Oberkiefers vorhanden. Auch hier findet sich die starke Einschnürung der Nasalia im oberen Drittel, die den beiden Nasenbeinen zusammen eine Art sanduhrförmige Gestalt verleiht. Selbst die Asymmetrie der Nasalia kehrt wieder: von dem rechten schiebt sich ein kleiner Zacken zwischen Frontale und linkes Nasale ein. Der einzige kleine Unterschied ist, daß die beiden Nasalia zusammen sich ein wenig mehr (2—3 mm) frontalwärts vordrängen als die Processus frontales des Oberkiefers.

Über der Frontonasalnaht, die hier eine Gerade bildet, zeigen sich auch bei T 13 leichte Andeutungen von Resten einer Stirnnaht. Die rinnenförmige Vertiefung der seitlichen Begrenzungen der Nasalia im oberen Teil ist hier noch mehr ausgesprochen als bei T 12.

Die in der Verlängerung der Infraorbitalränder sich findende Wölbung der Außenfläche der Processus frontales der Maxillaria ist hier etwas mehr verschärft und deckt in der Ansicht von vorn etwas mehr die Apertur des Canalis lacrimales als bei T 12. Der Sulcus nasomaxillaris ist etwas flacher als bei T 12, aber der von ihm begrenzte mittlere Teil der knöchernen Nase erscheint hier noch mehr aufgetrieben — aufgebläht — als bei T 12. Auch hier nehmen Nasalia und Inframaxillarteil gleichmäßigen Anteil an deren Wölbung, die einer medianen Erhebung zwar entbehrt, aber doch eine leichte Deviation des medianen Teils nach links (wie bei T 12) erkennen läßt. Ein knöcherner Nasenrückenkamm ist, wie bei T 12 lediglich durch eine geringe mediane Zuschärfung des Internasalteils im oberen Drittel angedeutet. Jedes Nasale zeigt ein Foramen, das linke höher gelegen als das rechte. Die im Sulcus nasomaxillaris gelegenen Foramina entsprechen fast genau der Position wie bei T 12.

Über die Dimensionen der Apertura nasalis lassen sich bei dem defekten Zustande nur unvollkommene Aufschlüsse gewinnen, die Breite am untern Ende der Nasalia dürfte etwa 24 mm — etwas weniger als bei T 12 — betragen haben.

Die Foramina infraorbitalia sind auch hier auffallend weit und haben dieselbe in der Richtung des Sulcus nasomaxillaris gelegene Ausprägung eines größeren Durchmessers, der rechts bei T 13 sogar 6 mm erreicht. Die Reste einer Sutura infraorbitalis sind auf beiden Seiten deutlich. Die Wulstung des zwischen Foramen und Margo infraorbitalis gelegenen Teils ist noch viel auffallender als bei T 12 und die Vorragung der jugomaxillaren Region noch viel frappanter als dort. Die Verschiebung der Infraorbitalpartie verbindet sich bei T 13 mit einem nochmaligen Vortreten des untern Teils des Jugale, der im ganzen rauh erscheint. Die obere Grenze dieses Teils entspricht der hier als solche nicht weiter markierten horizontalen Wulstung, die bei T 12 beschrieben wurde. Im Zusammenhang mit dieser ganzen Konfiguration ist die bei T 12 von oben erkennbare Stellung des obern Teils des Jugale nach außen und etwas aufwärts schauend hier viel mehr ausgesprochen. Der untere Rand des Jugale bildet eine beträchtliche Rauhigkeit, an der auch das Maxillare noch teilhat, jedoch besteht hier nicht ein so markanter Vorsprung (Processus jugomaxillaris) wie bei T 12.

Die Dimensionen des Jugale im ganzen übertreffen bei T 13 diejenigen von T 12. Der Abstand der Jugomaxillarverbindung des Infraorbitalrandes von der Jugotemporalverbindung ist bei T 12 rechts 43, bei T 13 46, links bei T 12 46, bei T 13 50.

Der Processus frontalis des Jugale erhebt sich massig empor und behält eine größere Breite bei als bei T 12, so daß die Stelle eines Processus retrojugalis mehr durch plötzliche Verkleinerung als wie durch besondere Vorragung markiert ist. Die Außenfläche des Processus frontalis ist ganz leicht konkav.

Der Jochbogen ist auffallend hoch, noch an der Jugotemporalverbindung mißt er links rund 13 mm (bei T 12 nur 8!).

Der Eingang der Augenhöhlen zeigt bei beiden Schädeln eine sehr ähnliche Konfiguration. Das bei T 13 nur links erhaltene Lacrimale besitzt eine scharfe Crista. Ihr Abstand von der vorderen Begrenzung des Eingangs des Canalis lacrimalis beträgt 10 mm. In noch höherem Maße als bei T 12 erscheint der Eingang in den Canalis lacrimalis nach vorn geschoben. Der obere Orbitalrand lateral von der Inzisur ist ziemlich scharf, desgleichen auch der laterale im oberen Teil des Processus frontalis des Jugale. Weiter abwärts wird er mehr abgestumpft. Der Boden der Orbita ist hinter dem Infraorbitalrand, namentlich lateral stark ausgehöhlt, hingegen ist die Fossa lacrimalis weniger vertieft als bei T 12.

Die Dimensionen des Orbitaleingangs bei T 13 sind denen von T 12 sehr ähnlich. Die größten schrägen Durchmesser betragen links 40 mm, rechts 39 mm, die dazu senkrechten 35 mm. Bei Messung vom Dacryon zur Jugomaxillarverbindung ergibt sich horizontal links und rechts 39 mm, senkrecht dazu 34 mm. Die Tiefe der Orbita ist bei T 13 etwas beträchtlicher als bei T 12. Der Abstand des Foramen rotundum vom Supraorbitalrand mißt etwa 45 mm.

Die Gestaltung der Temporalgrube ist bei beiden Schädeln sehr ähnlich; die Engigkeit der Fissura orbitalis inferior läßt sich für T 13 wenigstens rechts auch erweisen. Der defekte Zustand gestattet einen vollen Einblick in das Innere der Oberkiefergegend und läßt einen außerordentlich stark entwickelten Sinus maxillaris erkennen. Die Wandung desselben ist besonders gegen die Orbita hin auffällig dünn. Links stark defekt, ist der Boden der Orbita rechts vollständig erhalten und erscheint, gegen das Licht gehalten, durchscheinend bis auf einige stärkere Knochenbalken, namentlich in der Umgebung des Canalis infraorbitalis. Der Sinus wölbt sich stark gegen die Fissura orbitalis inferior vor, entschieden zu deren Verengerung beitragend. Lateralwärts erstreckt sich die Aushöhlung bis zur Jugomaxillarverbindung. Auf der linken Seite schiebt sich eine Ausbuchtung des Sinus vor den Canalis nasolacrimalis vor, die rechts nicht besteht. Der Kanal erscheint rechts weiter als links. Die vordere Wandung des Sinus maxillaris ist auch auffallend dünn, besonders rechts, wo sie gegen das Licht gehalten vollkommen durchscheinend ist.

Der Einblick in die Nasenhöhle zeigt, daß die Nasalia und die benachbarten Teile sehr dünnwandig sind.

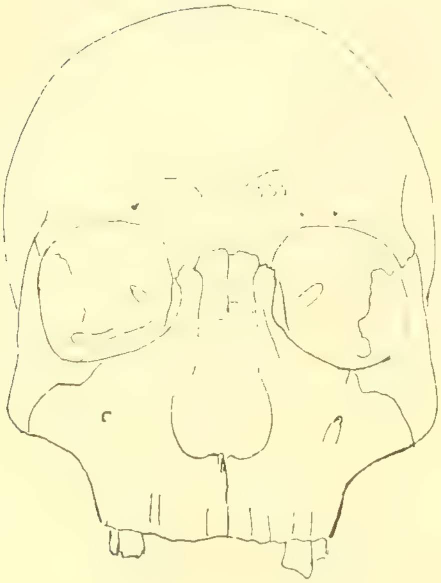
Diese Wahrnehmungen sind von besonderem Interesse, weil die Idee eines Zuhammenhangs der eigentümlich breiten und gleichsam aufgeblähten Beschaffenheit des Gebiets der knöchernen Nase und des Oberkiefers mit der Vergrößerung der pneumatischen Räume sehr nahe liegt.

Die Breitenverhältnisse des Gesichtsskeletts sind bei T 13 nicht wesentlich von denen bei T 12 verschieden. Die Jugalbreite erreicht bei T 13 ein Maximum von 132 mm. Die Breite der Orbitalregion, wie bei T 12 in der Mitte der Processus frontales der Jugalia gemessen, beträgt hier 113 mm (gegen 110 mm dort), die größte Maxillarbreite ist bei T 13: 96 gegen 100 bei T 12. Die Supraorbitalbreite ist 106 mm, die Biorbitalbreite ist 99 mm, die Interorbitalbreite am Dacryon 26 mm — in allen diesen Dimensionen übertrifft T 13 diejenigen von T 12 um mehrere Millimeter; bezüglich der postorbitalen Einschnürung stimmen beide mit 90 mm überein.

Ähnlichkeit in der ganzen Konfiguration des Gesichtsskeletts mit T 12 und T 13 läßt hier zunächst T 9 anreihen. Leider bestehen auch hier wieder ausgedehnte Defekte an wichtigen Stellen, die unteren Partien der Nasalia fehlen fast gänzlich.

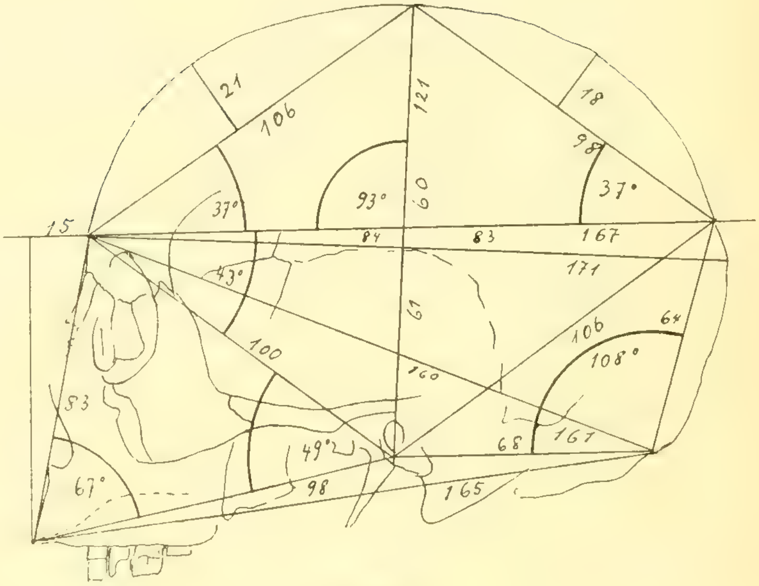
Wichtige Übereinstimmungen mit den bisher betrachteten Objekten bestehen in der Formation der Glabellar- und Nasiongegend sowie bezüglich des Jugale und der Infraorbitalregion. Die Kombination einer flachen Frontonasalregion und das Fehlen jeglicher Einziehung am Nasion mit der Vorschiebung der Infraorbitalgegend und der Entfaltung eines großen Jochbeins kehrt bei T 9 wieder, wobei im einzelnen Anklänge bald mehr an T 12, bald mehr an T 13 bestehen. Hingegen ist die Aufwölbung des untern Teils der knöchernen Nase hier nicht so stark ausgeprägt. Allerdings gestattet der defekte Zustand der Nasalia hierüber kein ganz sicheres Urteil; an dem linksseitigen Intermaxillarteil des Oberkiefers ist auch eine leichte Aufwulstung erkennbar, rechts hingegen nicht. Daraus ergibt sich die gleiche Asymmetrie

Fig. 5.



Turfan 9.

Fig. 6.



Turfan 9.

wie für T 12 und T 13. Der Sulcus nasomaxillaris ist auch nur links ausgebildet, die rinnenförmige Vertiefung der nasomaxillaren Naht im oberen Drittel der Nasalia fehlt. Die Nasalia zeigen auch nicht eine so starke Einschnürung, die schmalste Stelle liegt der Nasofrontalverbindung nahe. Der erhalten gebliebene Teil der Nasalia zeigt eine schwache Wölbung beider, nichts von internasaler Zuschärfung. Die Formation des Processus maxillaris des Frontale ist der bei T 13 ganz ähnlich, die Entfernung des Nasion vom leicht bestimmbaren Glabellarpunkt beträgt 12 mm, die Breite des Fortsatzes 26 mm.

Der Processus jugalis des Frontale ist ein wenig angehoben, sein supraorbitaler Rand springt an der Frontojugalverbindung etwas vor, während der laterale Orbitalrand des Processus frontalis des Jugale etwas zurücktritt. Dieser Teil war bei den andern Objekten zugeschärft, bei T 9 ist er mehr abgestumpft, und diese Abrundung des Orbitalrandes wird gegen die Jugomaxillarverbindung hin noch deutlicher. Der Supraorbitalrand hingegen ist scharf, die Inzisuren sind nur leicht angedeutet, es bestehen Foramina supraorbitalia, rechts ein größeres, links zwei kleinere, 10 mm voneinander abstehend. Die Verschiebung der Infraorbitalregion geht mit einer starken Wulstung der Gegend zwischen Foramen und Margo infraorbitalis einher, deren Abstand voneinander mit 12 mm beträchtlich denjenigen bei den andern Schädeln (etwa 6) übertrifft. Es besteht keine Infraorbitalnaht. Die Foramina sind auffallend klein. An der Jugomaxillarverbindung fällt eine Einziehung unter dem vordersten Teil des Jugale, besonders rechts, auf.

Am Jugale erscheint bei T 9 die ganze äußere Fläche schräggestellt, ein wenig aufwärts schauend, jedoch ohne besonderes Relief, abgesehen von der Wulstung der vorderen Partien. Die Dimensionen des Jugale sind denen von T 12 sehr nahestehend. Der Margo temporalis des Processus frontalis ist gleichmäßig leicht gerundet, ohne Fortsatzbildung. Der untere Rand des Jugale ist auffallend dick, verjüngt sich nur wenig temporalwärts, ist mit Rauhigkeiten versehen, bildet an der Maxillarverbindung keinen Vorsprung.

Der Eingang der Augenhöhle erscheint rundlich, mit geringem Überwiegen eines horizontalen Durchmessers (38 mm) über einen vertikalen (35 mm). Es fehlt die Ausprägung einer schrägen Stellung. Der Orbitaltrichter ist wie bei T 12 relativ kurz — Abstand des Foramen rotundum vom Supraorbitalrand 40 mm. Tränenbein und Lamina papyracea des Ethmoidale sind erhalten. Letztere ist ziemlich vertikal gestellt. Der Eingang in den Tränenkanal ist weit (9 mm) jedoch weniger als bei T 13.

Die Jugalbreite ist mit 125 mm erheblich geringer als bei T 12 und 13, der Jochbogen ist weniger ausladend, aber kräftig an der Jugotemporalverbindung 8 mm hoch.

Die Breite der Orbitalregion im ganzen (s. o.) stimmt genau (113 mm) mit T 13 überein, desgleichen die Supraorbitalbreite (106 mm), die Biorbitalbreite, die Interorbitalbreite, auffallend größer aber ist die Maxillarbreite mit 102 mm.

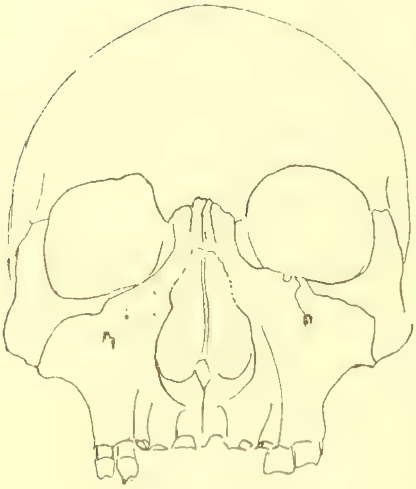
Die postorbitale Einschnürung beträgt 95 mm; die Verschmälerung an dieser Stelle ist somit geringer als bei den andern Schädeln.

Die Breite der Nasenöffnung mit 25 mm ist etwas geringer als bei T 12; die Höhe ist nicht bestimmbar.

Fossae praenasales lassen sich nur als Reste nachweisen, vollständig der vordern Alveolarfläche zugehörig und durch eine dem Margo infranasalis entsprechende Abgrenzung von dem Nasenhöhle geschieden, wie meist bei Europaeern. Die Spina nasalis ist abgebrochen, scheint nicht stark gewesen zu sein, eine intermaxillare Leiste, wie bei T 12, besteht nicht. Es besteht deutlich alveolare Prognathie; die Juga alveolaria treten nur wenig vor.

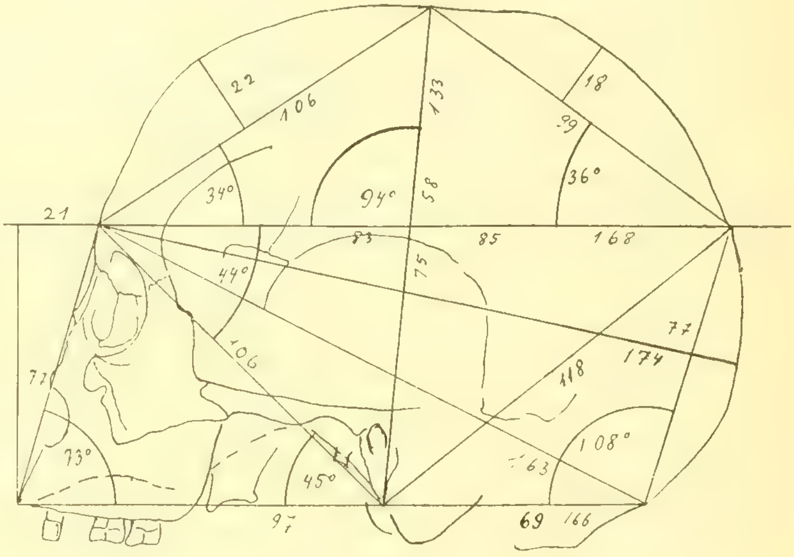
Wenn den drei Schädeln T 12, 13, 9 hier zunächst T 16 angereiht wird, so geschieht es, weil das Gesichtsskelett auch hier die charakteristische Kombination von Merkmalen der Stirn- und Wangengegend zeigt.

Fig. 7.



Turfan 16.

Fig. 8.



Turfan 16.

Dazu kommen aber noch einige Besonderheiten, die, in denselben Kreis von Erscheinungen passend, manche der an den andern Schädeln beobachteten Erscheinungen noch mehr ins Extreme entfaltet zeigen. Die Verschiebung der Infraorbitalregion macht sich medial neben der Nase mehr geltend als lateral. Der weite Eingang des Canalis nasolacrimalis liegt so weit nach vorn, daß der Infraorbitalrand sich in die beiden Cristae lacrimales zu gabeln scheint. Der Hamulus ist sehr gut ausgebildet und erreicht fast die Gesichtsfläche.

Das Dacryon steht von der Medianlinie um 10 mm ab, und die beiderseitigen Dacrya sind um 18 mm voneinander entfernt. Man hat den Eindruck, daß diese Lage des Tränenkanals mit der Verschmälerung der Nasalia in Zusammenhang steht, die hier einen extremen Grad erreicht.

Messen doch beide Nasalia an der schmalsten Stelle zusammen nur 4 mm; sie bilden hier eine kleine Crista internasalis. Unmittelbar darunter befindet sich der Bruchrand, die unteren Teile der Nasalia fehlen ganz.

An der Frontonasalverbindung schiebt sich ein kleiner Zacken des rechten Nasale zwischen das linke und das Frontale — ganz wie bei T 13. Die Glabellarregion ist im ganzen leicht vorgewölbt, eine mediane Einziehung kaum fühlbar. Seitliche Felder sind deutlich abgesetzt. Die Incisurae supraorbitales sind ganz flach, der Supraorbitalrand scharf; jederseits besteht ein Foramen 4 mm über dem Rande. Der laterale Orbitalrand ist scharf und der untere ist nicht so abgestumpft wie bei T 9. Das Foramen infraorbitale vermittelt sowohl an Größe als bezüglich des Abstandes vom Rande der Orbita die Zustände von T 9 mit dem von T 12 und T 13. Eine Infraorbitalnaht ist auf beiden Seiten vorhanden und verbindet sich mit der ungewöhnlich weit medialwärts vorspringenden Jugomaxillarnaht. Das Jugale schiebt sich mit einem zungenförmigen Fortsatz fast bis an das Lacrimale. Der Teil zwischen Foramen und Rand ist im ganzen gewulstet, und diese Wulstung erstreckt sich rechts bis zu den Nasalia, so daß hier ein Sulcus nasolacrimalis fehlt, der links leicht angedeutet ist.

Die größte Weite der Apertura piriformis liegt unweit des untern Randes (25 mm). Ergänzt man die Nasalia, so kommt man zur Annahme, daß der oberste Punkt der Nasalapertur auffällig weit abwärts in Vergleichung mit den Orbitae gesessen haben muß, was auch für T 9 sehr wahrscheinlich ist.

Die Spina nasalis inf. ist abgebrochen. Fossae praenasales bestehn in einer primitiven Verfassung, schräg nach vorn geneigt, mit wenig scharf markierter vorderer und hinterer Begrenzung.

Die Jugalia stehn im ganzen viel mehr schräg nach vorn und seitlich als bei den andern Objekten. Der Processus frontalis ist sehr breit (r. 19, l. 20 mm) und besitzt einen starken Processus retrojugalis. Die Orbitae sind denen von T 9 sehr ähnlich. Auch in den Breitenproportionen schließt sich T 16 sehr nahe an die vorigen an.

Überblicken wir die Befunde bei den vier besprochenen Schädeln, so ist das Gemeinsame derselben unverkennbar. Wenn wir die Hauptpunkte des Bildes ins Auge fassen, das sich uns darbietet, so finden wir Züge ausgeprägt, wie wir sie in gleicher Kombination bei mongoloiden Schädeln häufig antreffen. Hierher gehört die Größe des Jugale, die Andeutung einer Sonderung desselben in eine obere und untere Partie durch die Wulstbildung an der Außenfläche, ferner die Stellung des ganzen Knochens mit leichter Anhebung der Außenfläche.

Nicht minder typisch sind die Erscheinungen, die wir im Bereiche der Orbita feststellen konnten: das Vorspringen der Infraorbitalregion, die Vorwulstung der Partie zwischen Orbita und Foramen infraorbitale, die Auftreibung der knöchernen Nase, das Fehlen eines ausgesprochenen Nasenrückens und die mehr gleichmäßige Wölbung der von den Nasalia, Intramaxillaria und Maxillaria gelieferten Partien, die Verschmälerung der Nasalia im obern Drittel, das Fehlen einer Vertiefung am Nasion.

Die individuelle Variation läßt das Typische des Grundcharakters deutlich hervortreten, manche spezielle Übereinstimmungen legen den Gedanken an nahe Verwandtschaft der betreffenden Individuen nahe.

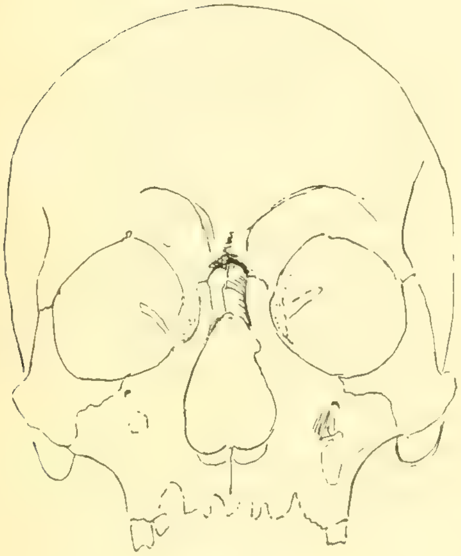
Es erwächst daher wohl ein Recht, die Schädel 9, 12, 13, 16 als die mongoloide Gruppe (M-Gruppe) zusammenzufassen. Vergleichen wir nun damit das andere Material, so zeigt sich, daß manche der jugendlichen Objekte Anklänge an den beschriebenen Typus aufweisen, namentlich T 3, in manchen Punkten auch T 7 und T 14, aber bei dem infantilen Verhalten läßt sich erst nach einer Prüfung der andern erwachsenen Objekte schärfer beurteilen, wie viel auf Rechnung des mongoloiden Habitus zu stellen ist. Wir wenden uns daher zunächst den andern Schädeln Erwachsener zu.

Von dieser mongoloiden Gruppe als sehr verschieden erscheint auf den ersten Blick T 15, und die genauere morphologische Analyse tut dieses im einzelnen dar.

Am Nasion besteht eine Einziehung, die bei Profilbetrachtung einem stumpfen Winkel von etwa 100° entspricht. Die Frontonasalnaht bildet eine bogenförmige Vertiefung, die vom Frontale etwas überwölbt wird. Der Processus maxillaris des Frontale ist kurz und wird von den medialen Enden der stark ausgeprägten Arcus superciliares gebildet. Sie lassen eine mediane Rinne zwischen sich, die deutliche quergestellte Rauhigkeiten als Reste einer Stirnnaht zeigt.

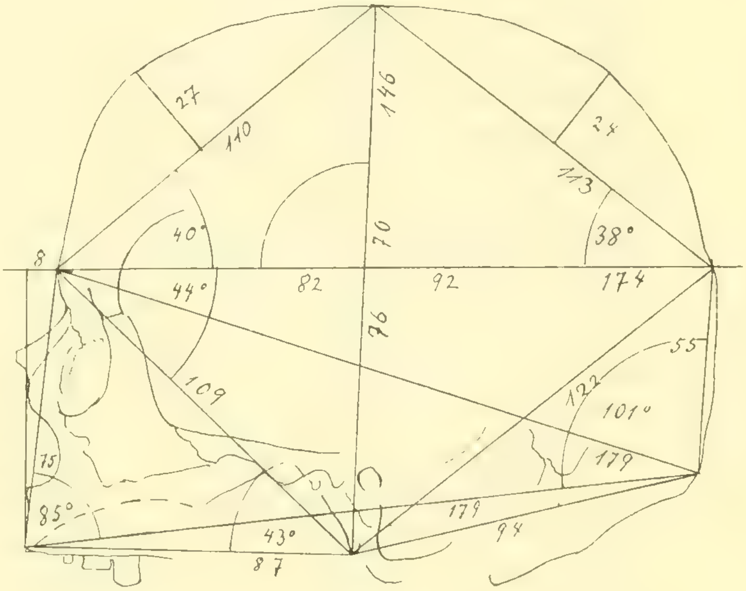
Die ganze Formation dieser Glabellarregion ist von der bei der M-Gruppe ganz verschieden. Ein Sulcus supraorbitalis ist in ganzer Ausdehnung in transversaler Richtung vorhanden. Er senkt sich vorn abwärts zwischen die Arcus superciliares, deren Breite hier ungefähr 20 mm beträgt. Die Mediankurve läßt eine Glabellarerhebung im ganzen erkennen, deren am weitesten vorspringender Punkt sich deutlich bestimmen läßt. Dieser Glabellarpunkt steht vom Nasion 7 mm ab. Er wird von den seitlichen Wülsten überragt. Oberhalb der Glabella, als tiefster Punkt im Sulcus supraorbitalis findet sich das Ophryon in 20 mm Entfernung vom Nasion. An der M-Gruppe wäre dieser Punkt unmöglich zu bestimmen gewesen. Die Stirn von T 15 steigt viel steiler an. Tubera frontalia sind deutlich, desgleichen eine Crista mediana.

Fig. 9.



Turfan 15.

Fig. 10.



Turfan 15.

Ganz frappante Unterschiede bestehen ferner in der Bildung der knöchernen Nase. Die Nasalia sind allerdings nur in der oberen Hälfte erhalten, aber das Vorhandene genügt, um zu zeigen, daß eine Nase von vollkommen in die Variationsbreite kaukasoider Typen fallender Vorragung und seitlicher Abdachung bestanden hat.

Die Nasalia sind zum großen Teil miteinander synostesiert. Sie bilden einen Nasenrücken, dessen Höhe sanft gerundet ist und in der Medianebene eine schwach konkave Krümmung besitzt. Die Processus frontales des Oberkiefers nehmen an der nach der Seite schauenden Stellung der Nasalia teil. Der Crista lacrimalis anterior liegt in direkter Verlängerung des Infraorbitalrandes.

Es fehlt gänzlich die Aufwölbung des untern Teils der knöchernen Nase sowie die Vorschiebung des untern Orbitalrandes. Die Gegend zwischen Foramen und Rand schaut vorwärts und ein wenig abwärts, nicht aufwärts wie bei der M-Gruppe. Das Foramen infraorbitale ist nur links erhalten, es zeigt nicht die schräge Ausziehung, ist nach vorn medial und abwärts gerichtet; die darunter gelegene Vorderfläche der Maxillare weicht nach hinten zurück und zeigt eine tiefe, ausgedehnte Fossa canina, die lateral von einem leicht zugeschärften Jugalwulst begrenzt wird. Der Alveolarteil der Maxilla entspricht einem deutlich orthognathen Typus. Die Fossae praenasales gehören ganz der vorderen Alveolarfläche an, der Margo infranasalis ist zugeschärft wie bei der Mehrzahl der Europäer. Die Öffnungen des Canalis incisivus liegen nur 3 mm dahinter, während bei dem früher betrachteten Schädel diese Distanz viel beträchtlicher ist; bei dem in der Gestaltung des untern Nasenrandes sonst ähnlichen T 9 beträgt der Abstand etwa 8 mm.

Der Alveolarrand ist leider sehr defekt. Von den Zähnen sind nur die ersten und zweiten Molaren beiderseits noch einigermaßen erhalten, von den Prämolaren noch Reste, die andern Zähne sind wohl post mortem ausgefallen, die Alveolen zerstört.

Das Jugale ist von mäßigen Dimensionen und entbehrt gänzlich jener mongoloiden Merkmale der vorigen Gruppe. Seine Außenfläche ist schräg vor- und lateralwärts gerichtet. Der untere Rand ist schmal, die Rauhigkeiten an der Jugomaxillarverbindung nur schwach ausgeprägt, auch besteht hier kein Vorsprung, sondern ein allmählicher Übergang des Jugalwulstrandes in die leicht ansteigende Linie des untern Jochbogenrandes. Der Jochbogen, links defekt, rechts vollständig erhalten, zeigt zarte Proportionen. Hinter der Jugotemporalverbindung beträgt seine Höhe nur 6 mm, seine Dicke 2—3 mm. Der obere Rand verläuft ganz gerade und steigt in sanfter Bogenlinie zum hintern Rand des Processus frontalis auf, der keine Fortsatzbildung zeigt. Die Gegend der Frontojugalverbindung ist im ganzen ein wenig angehoben.

Der Orbitalrand des Jugale ist zwar nicht zugeschärft, aber auch nicht abgestumpft, seine leichtgerundete Kante verhält sich in ganzer Ausdehnung gleichartig. Am Maxillare verschärft sich der Orbitalrand.

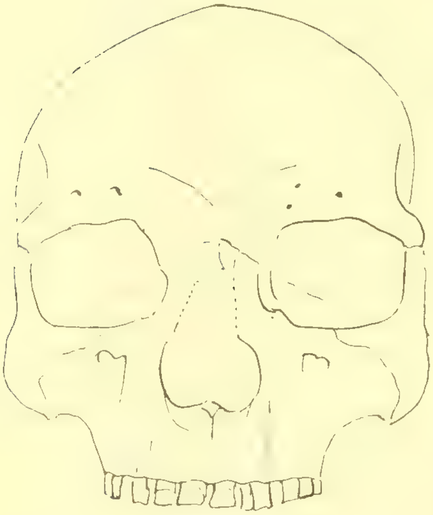
Der Eingang der Augenhöhle nähert sich der Kreisform. Vom Dacryon aus läßt sich in schräg nach außen absteigender Richtung ein größter Querdurchmesser bestimmen, der rechts 40, links 37 mm mißt. In der senkrechten Richtung ergeben sich Durchmesser von rechts und links 34 mm. Der Abstand des Dacryon von der Frontojugalverbindung beträgt rechts 37 mm, links 36 mm. Der Abstand der beiden Dacrya voneinander ist 21 mm, die Interorbitalbreite läßt sich infolge des defekten Zustandes der medialen Orbitalwand nur schätzen auf etwa 25 mm. Die Biorbitalbreite beträgt 93 mm, die Breite der ganzen Orbitalregion in der Mitte des Processus frontalis des Jugale gemessen 109 mm. Die größte Maxillarbreite bleibt mit 90 mm beträchtlich hinter den entsprechenden Dimensionen der M-Gruppe zurück. Auch die Jugalbreite mit 139 mm ist etwas, jedoch nicht erheblich geringer. Die Supraorbitalbreite bietet mit 102 mm kein Minus dar; die Postorbitalbreite ist 94 mm.

Als Resultat dieser Analyse ergibt sich, daß wir es bei T 15 mit einem Kopfskelett zu tun haben, daß unter Europäermaterial gemischt in keiner Weise auffallen würde. Hierbei interessiert uns zunächst hauptsächlich das Negative, nämlich das Fehlen der Mongoloidenmerkmale. Es ist daher berechtigt, T 15 als Repräsentanten einer Komponente der Turfanbevölkerung aufzustellen von kaukasoider Beschaffenheit, darauf eine K-Gruppe zu begründen; selbstverständlich voll bewußt der Vieldeutigkeit dieses Begriffes, will ich diese Aufstellung nur als ein Mittel zur Fortführung der vergleichenden Untersuchung des Gesichtsskeletts benutzen und zunächst das übrige Material bezüglich der Frage prüfen, ob darunter noch andere T 15 morphologisch nahestehende Objekte sich befinden.

Das Resultat fällt negativ aus. Kein einziger der andern Schädel zeigt die von T 15 beschriebene Kombination. Ein einziger nur stimmt mit T 15 in der Gestaltung der Gegend des Nasion überein. Dieses ist der Schädel T 11, der aber im übrigen wiederum so sehr von T 15 verschieden ist, daß er in keiner Weise zum gleichen Typus gehört.

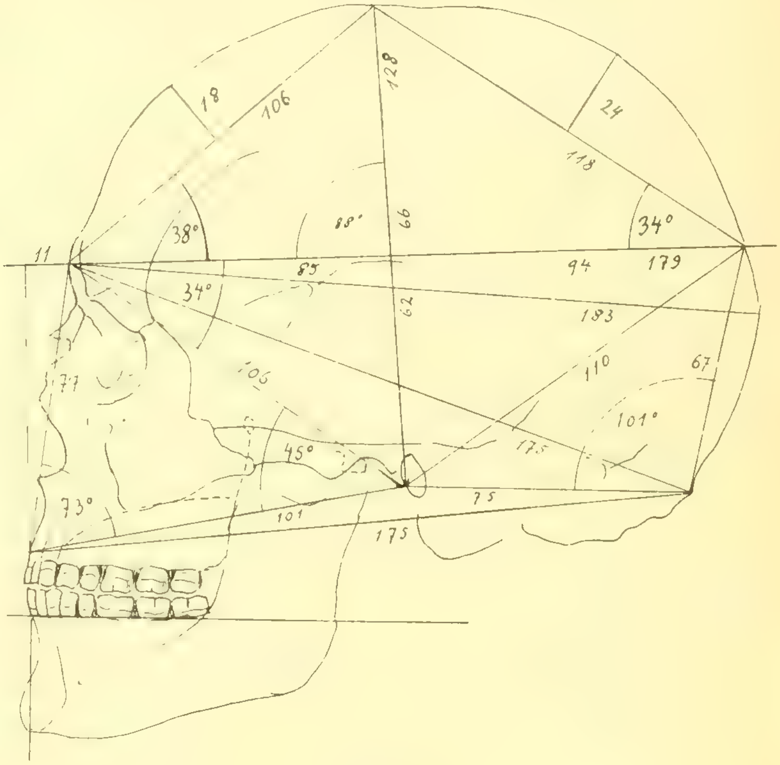
T 11 stellt eines der interessantesten Objekte des ganzen Materials dar. Der Schädel von großen Dimensionen und kräftigem männlichen Habitus ist durch den Besitz des vollen Gebisses ausgezeichnet im Ober- und Unterkiefer. Alle 32 Zähne sind erhalten ohne Spur eines vitalen und mit nur ganz geringen postmortalen Defekten. Die dritten Molaren sind ausgezeichnet entfaltet. Im Unterkiefer stehn sie den vordern Molaren nicht nach, im Oberkiefer sind sie beträchtlich kleiner als die zweiten, besonders ist das auf der rechten Seite der Fall. Im Oberkiefer überwiegen die ersten Molaren ganz bedeutend, auch im Unterkiefer sind sie stark entwickelt. Die Prämolaren zeigen keine Besonderheiten, die Canini sind nicht sonderlich stark ausgeprägt, doch bedingen ihre Wurzeln im Oberkiefer starke Vorragungen.

Fig. 11.



Turfan II.

Fig. 12.



Turfan II.

Der Erhaltungszustand des ganzen Schädels ist gut, jedoch zeigt die Basis eigentümliche Defekte, die den Eindruck machen, als seien an dem noch mit Weichteilen bekleideten Schädel Stücke abgehackt worden, derselbe vielleicht als Siegestrophäe gleich nach dem Tode von der Wirbelsäule gelöst worden. Die Hinterhauptskondylen fehlen, und die Processus pterygoidiei des Keilbeins sind auf beiden Seiten in gleicher Weise schräg abgestutzt. Ferner ist auffallend, daß Reste der bindegewebigen Bedeckung am Gesicht, am Gaumen, an der Basis dem Schädel anhaften, als sei derselbe lange Zeit mit Weichteilen getrocknet aufbewahrt worden.

Die äußere Nase zeigt leider bedeutende Zerstörung, der die untern zwei Drittel der Nasenbeine und Teile der benachbarten Kieferregion zum Opfer gefallen sind. Über die Beschaffenheit der Nasalia läßt sich daher kein klares Bild gewinnen. Ihr erhaltener distaler Rest bildet einen ähnlichen Vorsprung wie bei T 15. Es besteht eine mediane Wölbung ohne verschärften internasalen Rückenkamm. Die Glabellarregion wird von den medialen Teilen der Superciliarwülste eingenommen, die eine leichte Vertiefung begrenzen. Ein Glabellarpunkt läßt sich als Stelle stärkster Vorragung der Medianebene in einer Entfernung von 9 mm vom Nasion bestimmen. Die Stirnregion läßt ausgeprägte Tori supraorbitalis erkennen, als deren mediale Auftreibung die Arcus superciliares erscheinen. Die schräge Furche, die gewöhnlich bei diesem Zustand besteht, läßt sich auch hier von der Incisura supraorbitalis aus bis zur Linea temporalis verfolgen. In derselben befinden sich hier auf beiden Seiten starke Foramina suprabilitalia, zwei größere sowohl rechts wie links, in Abständen von 8 bis 12 mm vom Supraorbitalrand, links außerdem noch einige kleinere. Die Breite des Gebietes der Supraorbitalwülste beträgt ungefähr 20 mm. Der Sulcus supraorbitalis läßt sich im Bereich der postorbitalen Einschnürungen von einer Seite zur andern verfolgen. Tubera frontalia sind ganz schwach ausgeprägt, desgleichen eine Crista mediana im oberen Teil des Frontale.

Die Processus jugales der Frontalia sind gut abgesetzt und bilden an der Frontojugalverbindung beträchtliche Vorragungen, wie sie als Merkmal primitiver Menschenschädel, z. B. von Australiern, bekannt sind. Die Lineae temporales drängen sich hier auf die Supraorbitalwülste hinauf, wie bei Anthropoiden. Die seitlichen Teile der Supraorbitalwülste bilden hier schirmdachartige Partien des Orbitalrandes von einer Dicke von etwa 8 mm.

Der Processus maxillaris ossis frontis ist kurz und breit. Im Bereich der Dacrya beträgt die Interorbitalbreite 29 mm.

Die Augenhöhlen verleihen diesem Schädel durch ihre auffällig niedere Gestalt ein sehr charakteristisches Gepräge, das sofort an die Gestaltung des Gesichtsskeletts bei dem fossilen Menschen der Magdalénienperiode erinnert, bei der Cro-Magnon-Rasse. Speziell der »Alte von Cro Magnon« aus dem Vezèretal bietet eine ganz auffällige Ähnlichkeit mit T 11 dar, die sich auch auf die ganze Konfiguration der Nasiongegend erstreckt.

Dieser Cro-Magnon-Typus findet sich nun bekanntlich noch heute unter der Bevölkerung Europas vertreten. Namentlich unter den Lappen finden sich Kombinationen an Schädelkapsel und Gesichtsskelett, die an Cro Magnon erinnern. Aber auch unter der mitteleuropäischen Bevölkerung fällt es nicht schwer, Individuen herauszufinden, die den »gedrückten« Gesichtstypus der Cro-Magnon-Rasse zur Schau tragen. Ein solches Exemplar unter dem Material der hiesigen anatomischen Sammlung N. C. 600, das einem ungewöhnlich großen männlichen Skelett zugehört, war mir schon früher aufgefallen und hat mir bereits für verschiedene Untersuchungen, z. B. gelegentlich meiner Studien über Kraniomorphologie, wichtige Dienste geleistet. Jetzt wurde mir dasselbe wichtig als Vergleichungsobjekt für T 11. In der Stirnregion unterscheidet sich N. C. 600 von T 11 durch eine noch viel stärkere Ausbildung der Supraorbitalwülste, die in der Mittellinie sich vereinigend einen mächtigen, das Nasion überwölbenden Glabellarwulst liefern. Die Konfiguration des Nasenskeletts aber ist bei beiden ganz ähnlich, die Interorbitaldistanz bei dem modernen Objekt mit 34 mm ganz ungewöhnlich groß. Bei allen diesen Objekten kann man von einer deutlich transversalen Stellung der Orbitae sprechen. Das schwache Absinken der Orbitalumrandung nach außen, das ja für die Mehrzahl der Europäer, aber auch für viele andere typisch ist, fehlt hier ganz oder fast ganz. Die Messung der Durchmesser macht daher hier keine Schwierigkeiten.

Bei T 11 beträgt der transversale Durchmesser rechts 43, links 42 mm, der vertikale rechts 31, links 30 mm. Die in Zahlen gering erscheinende Asymmetrie des Überwiegens der rechten Orbitalöffnung imponiert dem Blick weit stärker; hierbei wirkt die beträchtlichere Ausbiegung des Supraorbitalrandes mit seiner großen flachen Inzisur mit. Die Biorbitalbreite beträgt 105 mm. Die Supraorbitalbreite erreicht mit 114 mm ein relativ hohes Maß, das jedoch von dem modernen Vergleichungsobjekte (118 mm) noch übertroffen wird. Die Orbitamaße sind hier für die transversalen Durchmesser rechts 44, links 41 mm, für die vertikalen rechts 29, links 28 mm; die Orbitae sind somit hier noch relativ niedriger, und die Maße stimmen fast genau, soweit es der defekte Zustand des fossilen Schädels im allgemeinen beurteilen läßt, mit dem Alten von Cro Magnon überein; ebenso stimmen die Maße eines Lappländerschädels N. C. 116, der der hiesigen Sammlung noch von Retzius d. Ä. geschenkt wurde, fast ganz damit überein (transversal rechts 42, links 39 mm, vertikal rechts 28, links 29 mm).

Auch die ganze Nasenformation ist bei dem Lappen dem T 11 sehr ähnlich, die Supraorbitalregion (Breite 110 mm) erscheint wie geglättet, die Wülste verflacht. Über die Beschaffenheit der oberen Begrenzung der Apertura piriformis läßt sich bei T 11 nicht sicher urteilen. Die ganze Öffnung kann aber nicht sehr hoch gewesen sein, so daß ihr oberster Punkt, das Niveau der Infraorbitalränder nur wenig überragt hat, wie das auch bei dem Lappländer und Cro Magnon der Fall ist. Ein bedeutender Unterschied vom erstern aber (bei Cro Magnon nicht benutzbar) ist gegeben durch die Beschaffenheit der Fossa praenasalis. Diese gehört bei T 11 ganz der Alveolarvorderfläche an; die hintere Leiste (Margo infranasalis) ist verschärft, während der betreffende Lappenschädel jenen durch meinen Schüler von Bonin (a. a. O.) beschriebenen Zustand zeigt, daß die Grube hier ganz in der Richtung des Bodens der Nasenhöhle horizontal gestellt ist, wodurch der Alveolarteil relativ sehr kurz erscheint. Im übrigen aber bietet die Außenfläche des Maxillare bei T 11 und dem Lappen manche Übereinstimmung, namentlich in der starken Einziehung des lateralen Randes des Jugalwulstes; dieser Einschnitt bietet in der Ansicht von vorn einen sehr charakteristischen Zug des Gesichtsskeletts dar. Der ihn lateral begrenzende Processus jugomaxillaris (mihi) wird bei T 11 von beiden Knochen gemeinsam bei N. C. 116 wesentlich vom Jugale gebildet. Obwohl die betreffende Masse der Ursprungsfläche bei den Mongoloiden (s. oben) als solche durch starke Rauhigkeiten markiert war, sprang der Fortsatz nicht als solcher vor. Auch bei dem Europäer N. C. 600 ist das nicht der Fall. Die Linie des Jugalwulstes setzt sich fast ohne Unterbrechung aufsteigend in die des unteren Jochbogenrandes fort.

Die Foramina infraorbitalia sind bei T 11 groß und liegen dem Infraorbitalrand nahe. Dieser Rand zeigt keine Vorlagerung im Sinne der Mongoloiden. Im Bereiche des Jugale deutlich abgestumpft, fast so stark wie bei manchen Australiern, bildet der Rand weiter medial eine niedere Leiste, die auf die Mitte der Öffnung des Canalis lacrimalis auftrifft, so daß dessen vordere und hintere Begrenzung sich wie die Gabelung des Infraorbitalrandes ausnehmen. Bei dem Lappländer hingegen setzt sich der Rand mehr in die Crista lacrimalis anterior fort, wie es auch bei T 15 gefunden wurde.

Der Eingang in den Canalis lacrimalis ist weit (9 mm).

Von dem Foramen infraorbitale aus erstreckt sich lateralwärts eine Furche der Richtung der Jugomaxillarverbindung folgend. Eine kleine deutliche Crista begrenzt nach oben die ziemlich tiefe, unmittelbar vor dem Jugalwulst gelegene Fossa canina. Die Vergleichungsobjekte haben hier ein viel weniger markiertes Relief.

Der Intermaxillarteil und der Processus frontalis des Maxillare zeigen nichts von der Auftreibung der Mongoloiden.

An dem Jugale, das recht ansehnlich entwickelt ist, könnte man vielleicht einige Anklänge an den M-Typus finden, namentlich in dem queren Wulst der Außenfläche, der rechts deutlich ist. Links erscheint die ganze Außenfläche mehr gleichmäßig gewölbt. Es fehlt bei T 11 die Anhebung des Jugale nach außen. Der obere Teil des Processus frontalis des Jugale erscheint fast wie nach vorn umgebogen im Zusammenhang mit der Gestaltung des entsprechenden Stirnbeinteiles.

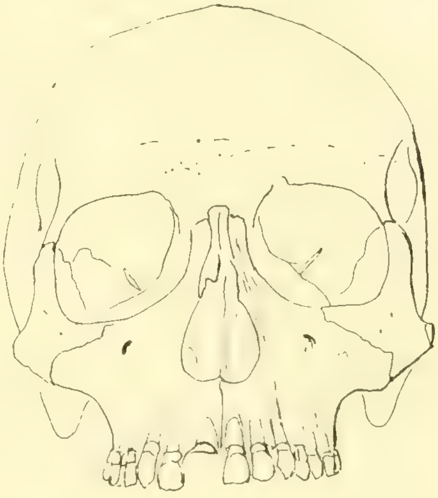
Der gesamte Eindruck des Gesichtsskeletts von T 11 kann an der völligen Verschiedenheit vom M-Typus keinen Zweifel lassen. Da er aber auch mit dem an T 15 geknüpften K-Typus nicht zusammengestellt werden kann, so will ich nur um der Bequemlichkeit der Ausdrucksweise willen unter Verwertung der Anklänge an dem Lappländerbefund ihm die Bezeichnung des L-Typus geben.

Keiner der andern Schädel bietet einen Anschluß an T 11, der zur Vergleichung von Einzelheiten irgendwie herausforderte. Bei einer Musterung des noch übrigen erwachsenen Materials zeigt sich bei T 2 ein Erscheinungskomplex, der zur Aufstellung eines weiteren, von den frühern verschiedenen Typus ermutigt, wenn auch die zarte Beschaffenheit dieses Objekts denselben mit großer Wahrscheinlichkeit als weiblich vermuten läßt.

Das Gebiß dieses Schädels, dessen Unterkiefer fehlt, ist vollständig erhalten, nur ist der linke mediale Incisivus post mortem verloren gegangen. Die dritten Molaren sind kleiner als die zweiten und bieten eine Stellungsanomalie dar. Sie schauen mit ihren Kauflächen schräg nach außen und abwärts; besonders rechts ist die Deviation bedeutend.

Das Hauptinteresse bei Betrachtung des Gesichtsskeletts knüpft sich auch hier an die Region des Nasion. Das Fehlen jeglicher Einziehung an dieser Stelle läßt sofort an eine Beziehung zu den Schädeln des M-Typus denken. Damit harmoniert auch die außerordentliche Schmalheit der Nasalia, die wenigstens bei einem Teil der M-Schädel (T 16, 12) sich fand. Sogar die stärkere Ausbildung des rechten im Bereich der Frontonasalverbindung kann hervorgehoben werden. Die Nasalia bei T 2 springen zusammen um etwa 3 mm weiter frontalwärts vor als die Fortsätze des Oberkiefers.

Fig. 13.

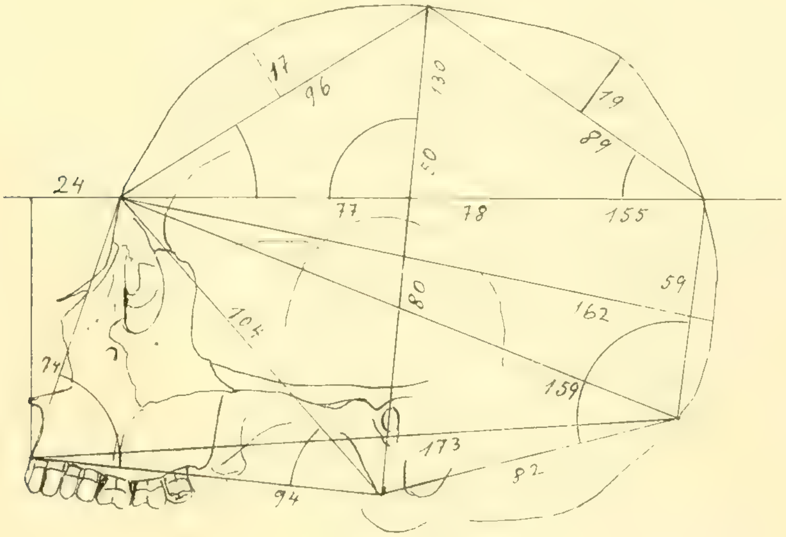


Turfan 2.

Der Processus maxillaris erinnert auch an den M-Typus, namentlich von T 16. Er bietet eine schwache Vorwölbung im ganzen dar, deren vorragendster Punkt 9 mm vom Nasion absteht. Ein Relief von Arcus superciliares ist noch als ganz schwache Andeutung erkennbar. Die Processus jugales des Frontale sind sehr zierlich gestaltet.

Während dieses ganze Relief recht wohl in die mongoloide Variation passen würde, bietet der untere Teil der Nase und der Augenhöhle einen ganz andern Zustand dar. Die knöcherne Nase erhebt sich in ihren untern Partien zu einem feingeschnittenen Nasenrücken, der trotz der geringen Dimensionen der Nasalia doch in seiner ganzen Konfiguration kaukasoid erscheint. Weder ist der untere Orbitalrand vorgeschoben, noch auch besteht die Auftreibung,

Fig. 14.



Turfan 2.

Aufblähung der von den Kieferknochen gebildeten knöchernen Nase. Die Apertura piriformis ist sehr schmal, in maximo 20 mm, ihr unterer, ganz scharfer Rand ist durch den Margo infranasalis gebildet, der in eine freie Spina ausläuft. Von den Fossa praenasalis findet sich keine Spur mehr. Die Juga alveolaria treten bei der Zartheit der Kieferknochen relativ stark vor.

Auch das Jugale in seiner durchaus zierlichen Formation bietet nichts, was an den Mongoloidentypus erinnerte. Hiernach werden wir T 2 demselben keineswegs ohne weiteres anreihen können. Ebensowenig aber läßt sich ein Anschluß an T 11 vornehmen. Die Konfiguration des Orbitaleingangs ist ganz verschieden. Die queren Durchmesser betragen rechts und links 37 mm, die vertikalen rechts 32, links 33 mm. Die Augenhöhlen erscheinen groß und fast kreisförmig.

Suchen wir nach Vergleichungsmaterial, so läßt sich bei T 8 in manchen Punkten eine Ähnlichkeit mit T 2 nicht verkennen. Auch dieser Schädel ist offenbar weiblich, von sehr kleinen Dimensionen. Er zeigt Persistenz der Stirnnaht und damit verbunden mächtige Vorwölbungen der Frontalien, einen geraden Abfall der Stirn.

Das Gebiß war intra vitam vollständig, aber die meisten Zähne fehlen. Der Unterkiefer, den ich mit Wahrscheinlichkeit als zugehörig diagnostiziert habe, wird uns später beschäftigen.

Die dritten Molaren des Oberkiefers zeigen dieselbe Stellungsänderung wie bei T 2, nur nicht so stark.

Übereinstimmend mit T 2 ist die Formation der Nasalia im obern Teil, auch in mancher Hinsicht im untern, denn hier stoßen die ebenfalls kleinen Nasenbeine zu einer medianen Rückenbildung, einer kaukasoiden Crista internasalis zusammen — aber der Interorbitalabstand, der bei T 2 nur 16 mm zwischen dem Dacryon betrug, mißt hier 22 mm, und dieses Plus kommt auf Rechnung der Processus frontales des Oberkiefers. Darin liegt eine Annäherung an das Bild des M-Typus. In gleichem Sinne spricht eine, wenn auch nur geringe Auftreibung der seitlichen Partien der knöchernen Nase und eine, allerdings auf das Jugale beschränkte Vorschiebung des unteren Orbitalrandes.

Interessante Anomalien bieten die Jugalia dar. Die Jugomaxillarnaht verläuft links in einer auffallend horizontalen Richtung seitlich und setzt einen sonst dem Jugale zugehörigen Teil vollständig davon ab, der sich offenbar mit dem Maxillare vereinigt hat. Wäre diese Verbindung nicht eingetreten, so würde ein vollständiges Jugale bipartitum vorliegen. Dieser Fall ist auf der rechten Seite realisiert. Eine zackige Naht trennt ein kleines unteres Stück vom Jugale ab. Auf die Abweichung dieses Jugale bipartitum von den gewöhnlichen Fällen, in denen die Naht höher liegt, kann hier nicht eingegangen werden; hier kann uns diese Erscheinung nur als ein weiteres Moment mongoloiden Anklangs beschäftigen. Die Orbitae erscheinen hier noch mehr kreisrund. Die Durchmesser variieren mit geringen Verschiedenheiten um 33 mm.

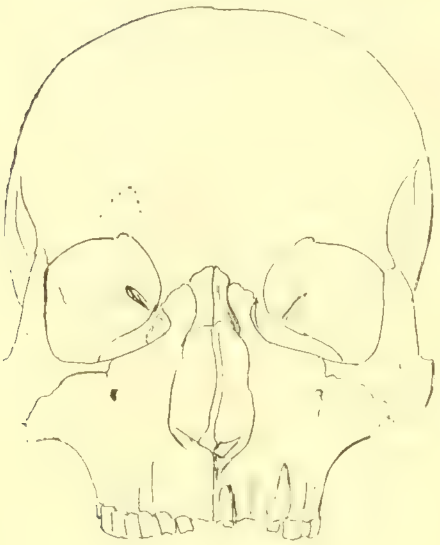
Die Vorstellung, daß wir es mit einem Mischtypus mongoloider und kaukasoider Elemente zu tun haben, erfährt eine wichtige Ergänzung durch die Betrachtung des Schädels T 4. Über die Geschlechtsbestimmung dieses Schädels bin ich im Zweifel geblieben. Er ist etwas schwerer und kräftiger als die T 2 und T 8; das Gebiß war auch hier intra vitam vollständig, doch ist die Beschaffenheit des Alveolarrandes post mortem sehr defekt geworden. Mehrere Zähne fehlen, darunter auch die dritten Molaren. Eine kleine Aufbiegung am Rande der letzten Alveole links kann vielleicht als Hinweis auf eine ähnliche Stellungsanomalie wie bei T 2 und T 8 angenommen werden, da die Konfiguration des ganzen Gesichts entschieden an eine gewisse Familienähnlichkeit mit T 2 und T 8 denken läßt. Auch hier finden wir die reduzierten Nasalia, die, soweit erhalten, in einem minimalen Nasenrücken zusammenstoßen, auch hier die großen runden Augenhöhlen und eine Vorschiebung des untern Randes, die mit derjenigen von T 8 ganz auffällig übereinstimmt. Der betreffende Teil des Jugale erstreckt sich sehr weit medialwärts und erscheint wie nach vorn umgekippt.

Der sehr defekte Zustand der Nasalia gestattet leider keinen Schluß auf die Beschaffenheit der knöchernen Nase im ganzen; eine Auftreibung des Maxillare scheint nicht bestanden zu haben, aber auch keine kaukasoide Nasenrückenbildung. Das Jugale aber bietet deutliche Anklänge an die M-Gruppe dar. Die individuelle Ähnlichkeit mit T 9 ist auffällig, nur ist das Jugale bei T 4 im ganzen von geringeren Dimensionen.

Ich möchte hier auch die Schädel T 1, T 5, T 6 und T 10 anschließen, denn sie alle zeigen deutliche Mischcharaktere des M- und K-Typus, soweit sich bei dem leider sehr defekten Zustand darüber ein Urteil gewinnen läßt. Ungünstigerweise sind auch hier wieder die unteren Partien der Nase ein Hauptsitz der Zerstörung. Bei T 5 und T 6 sind nur die oberen Drittel der Nasalia noch erhalten, bei T 10 sind die Oberkiefer in großer

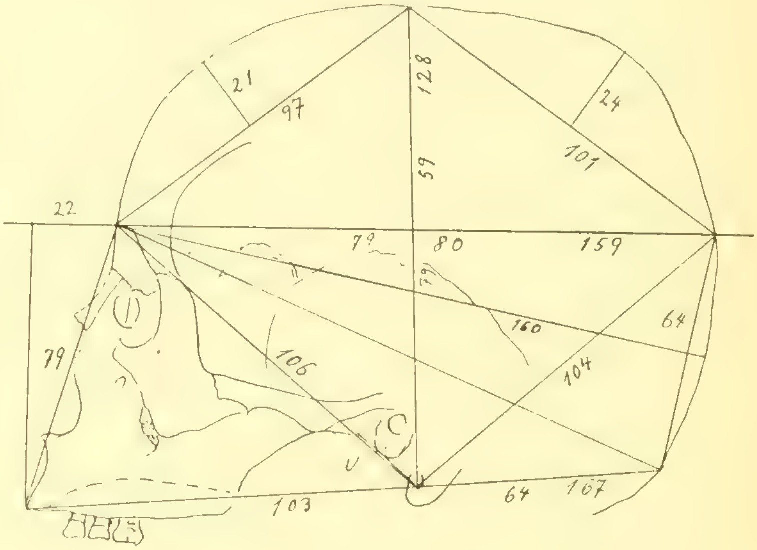
Ausdehnung ruiniert, die Schädelbasis erscheint hier ebenso zerhackt wie bei T 11. Nur bei T 1 sind die Nasalia einigermaßen erhalten. Sie zeigen hier einen intermediären Zustand zwischen dem mongoloiden und kaukasoiden Typus. Am Nasion fehlt jegliche Einziehung. Die Glabellarregion ist flach, fast ohne jedes Relief, die Breite des Processus maxillaris des Stirnbeins beträgt 27 mm. Dieser Fortsatz des Frontale ragt ziemlich weit abwärts, wie beim M-Typus.

Fig. 15.



Turfan 1.

Fig. 16.



Turfan 1.

Die Nasalia ragen etwas weiter aufwärts als die Processus frontales der Maxillaria; sie sind zwar breiter als gewöhnlich beim M-Typus, doch stimmen sie darin mit T 9 überein (s. oben), der ebenfalls ziemlich breite Nasalia zeigt. Im Unterschied von diesem und den andern mongoloiden Objekten bilden die Nasalia bei T 1 eine deutliche Crista internasalis, die sich im untern Teil zu einem leicht gerundeten Nasenrücken abflacht. Leider ist auch hier wieder die Randpartie defekt. Immerhin kann man auf das Vorhandensein einer mehr prominenten äußern Nase schließen als beim M-Typus. Diesem wiederum ähnlich zeigen die Maxillaria medial von den Foramina infraorbitalia etwas von der Auftreibung, die bei T 1 mit einer deutlichen Vorschiebung des untern Orbitalrandes sich verbindet. Damit stimmt auch die Lage der Öffnung des Canalis nasolacrimalis überein; der Processus frontalis des Maxillare erscheint wie emporgewölbt und drängt sich gleichsam gegen die Nasalia vor, die wie bei der M-Gruppe im oberen Drittel eine starke Verschmälerung erfahren.

Die Vorschiebung des untern Augenhöhlenrandes findet sich auch im Bereich des Jugale, dessen vorderster, leistenförmig verdickter Teil sehr der Bildung bei T 4 gleicht. Die Foramina infraorbitalia stehen etwa 15 mm weit vom untern Orbitalrande ab — ein Verhalten, das wieder ganz an den M-Typus erinnert. Auch am Jugale finden sich mongoloide Züge, an der Außenfläche ist die charakteristische schräge Stellung angedeutet. Der Umriß des Augenhöhleneinganges hingegen erinnert vielmehr an das bei Europäern überwiegende Verhalten, in der schrägen Stellung des größten Querdurchmessers, der rechts 34, links 33.5 mm beträgt. Die Vertikaldurchmesser sind rechts und links 31 mm. Der Oberkiefer zeigt eine alveolare Prognathie, die derjenigen bei T 16 sehr ähnlich ist. Das Gebiß ist post mortem defekt geworden. Es fällt ein stärkerer Grad von Abkauung auf, als er sonst an den Turfanschädeln sich zeigt.

Der Schädel T 1 trägt entschieden männlichen Habitus, wenn auch von einem grazilen Individuum stammend. Viel massiver ist T 6, der in der robusten Gestaltung des Gesichtsskeletts es mit T 11 aufnehmen kann. Ein eigentümliches Gemisch von Eigenschaften zeichnet dieses fremdartige Gesicht aus. Die großen, fast runden Augenhöhlen, die mächtigen, leicht schräg gestellten Jugalia, die Auftreibung der nasalen Kieferregion erinnern entschieden an den M-Typus; die alveolare Prognathie ist viel stärker ausgeprägt wie dort, gleicht sehr derjenigen eines Chinesenschädels unserer hiesigen Sammlung auch in der starken Ausbildung einer von der Spina nasalis ausgehenden medianen Crista, zu deren Seiten tiefe, von den Alveolarwülsten der Wurzeln der Eckzähne begrenzte Gruben sich finden, deren oberster Teil den Praenasalgruben entspricht. Die hintere Begrenzung der Margo infranasalis ist bei T 6 abgestumpft.

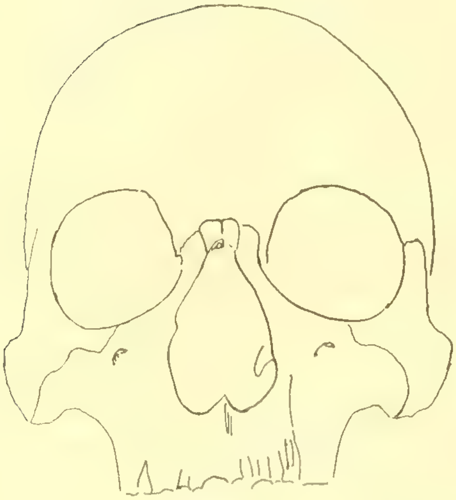
Die größte Breite der Apertura piriformis beträgt 27 mm, bei dem chinesischen Vergleichungsobjekt 28 mm. Die durchaus ähnliche Konfiguration dürfte nach den noch erhalten gebliebenen Teilen der Intermaxillarpartien auch die übrige knöcherne Nase beherrscht haben.

Die seitlichen Teile der Kieferregion zeigen hingegen, durchaus abweichend von dem Chinesenschädel und von der M-Gruppe des Turfanmaterials, eine auffällige Ähnlichkeit mit dem L-Typus von T 11. Der

Rand des Jugalwulstes ist bogenförmig gestaltet und beschreibt eine vom Processus jugomaxillaris seitlich begrenzte Inzisur.

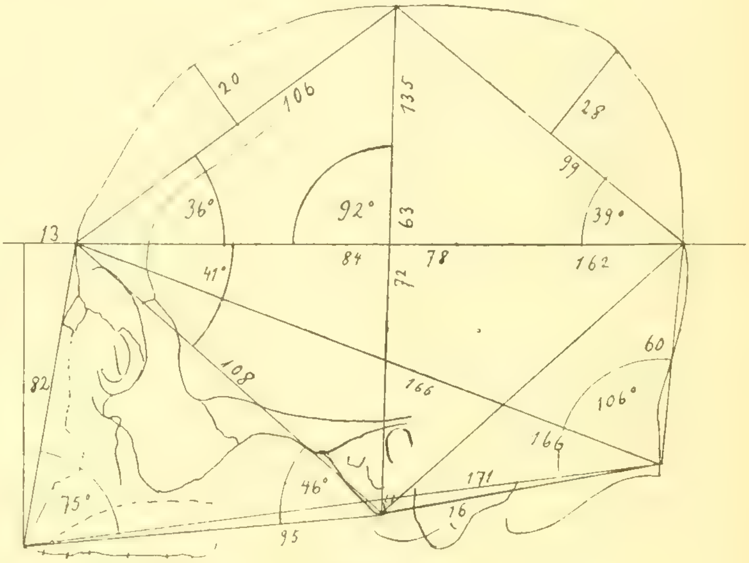
Am Jugale von T 6 fällt die rundliche Gestaltung des untern Randes auf. Der ganze Knochen erscheint wie abwärts gedrängt. Das markiert sich sehr deutlich an dem Processus frontalis, dessen Basis hinten viel niedriger steht als vorn. Dieser Fortsatz zeigt die steile Stellung wie bei den Schädeln mit vorgeschobenem Infraorbitalrand, aber diese Vorschiebung ist — trotz der Auftreibung der Maxillaria — nicht deutlich. So entsteht der Eindruck, als habe sich unter dem Einfluß sehr verschiedener Vererbungsfaktoren das Jugale dem gegebenen Raum anpassen müssen und habe dabei eine auffällige Verkürzung des Korpus erfahren. Der Querdurchmesser desselben, von der Mitte der Jugomaxillarverbindung bis zur hintern untern Grenze des Processus frontalis gemessen, beträgt nur 21 mm (links und rechts) gegen 31 mm bei T 11, 30 mm bei T 9, 29 mm bei T 16. Diese sonderbare Kombination von Merkmalen wird vervollständigt durch die Beschaffenheit der Stirnregion.

Fig. 17.



Turfan 6.

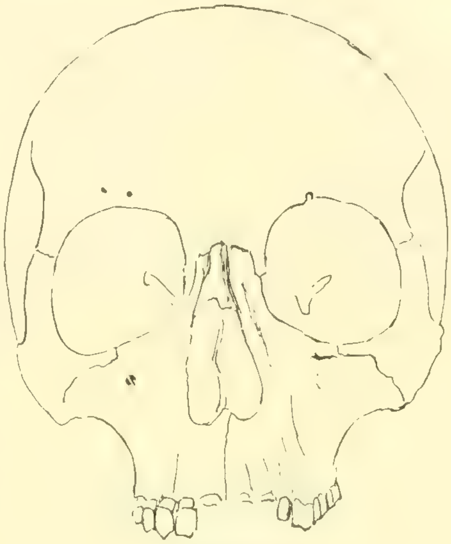
Fig. 18.



Turfan 6.

Am Nasion besteht keine Einziehung, die Glabellarregion erscheint flach wie beim M-Typus, aber weiter aufwärts gewinnt die Stirn einen

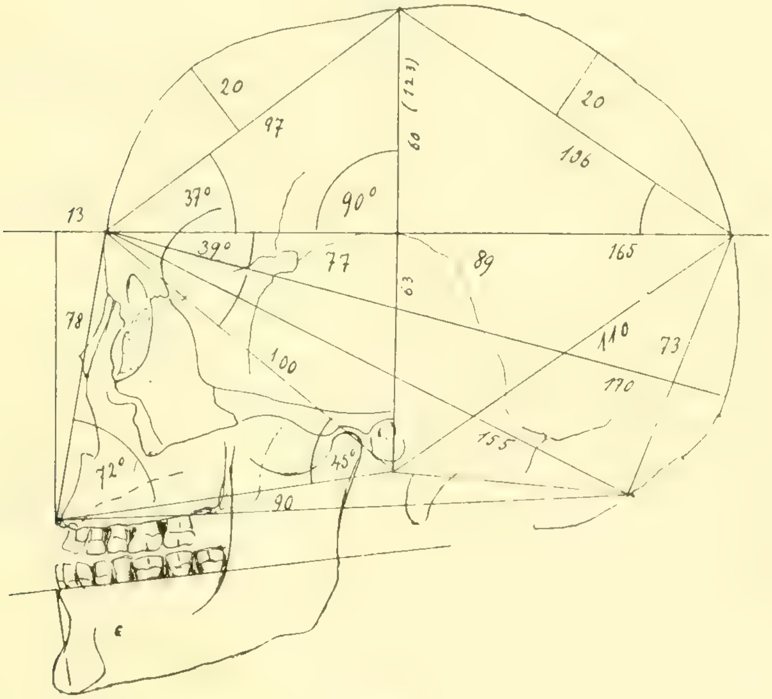
Fig. 19.



Turfan 4.

fliehenden Habitus, wie er sich in solcher Ausprägung an keinem der andern Turfanobjekte zeigt. Am ähnlichsten darin ist ihm T 11, und mit diesem teilt er auch den Besitz von Supraorbitalwülsten, die allerdings wie nivelliert erscheinen. Immerhin läßt sich ein Sulcus supraorbitalis in durchschnittlicher Entfernung von 20 mm vom Supraorbitalrand deutlich erkennen; auch sind supraciliare Anschwellungen angedeutet, auch die schräg aufsteigende Furche lateralwärts davon, in deren Bereich sich jederseits ein großes Foramen supraorbitale befindet, während die Inzisuren des Supraorbitalrandes nur

Fig. 20.

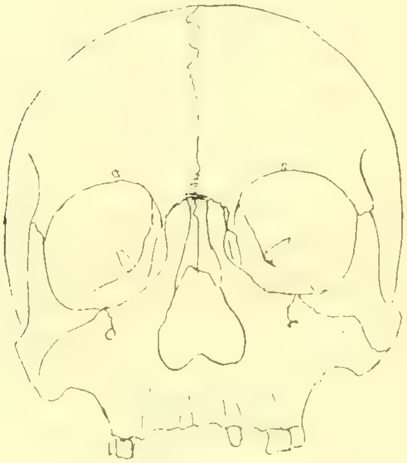


Turfan 4.

sehr schwach ausgeprägt sind. Die Processus jugales des Frontale sind lang und schräg abwärts gerichtet, womit jene Abwärtsdrängung des Jugale, die oben erwähnt wurde, zusammenhängt.

Dieser Schädel T 6 ist eines der merkwürdigsten Objekte der Kollektion. Leider sind alle Zähne post mortem ausgefallen; nur die letzten Molaren waren schon intra vitam verloren gegangen. Vielleicht in Zusammenhang mit der eigentümlichen Gestaltung des Jugale steht das weite Ausladen des Jochbogens, worin dieser Schädel alle andern Objekte der T-Kollektion übertrifft. Es wird hier eine Jochbogenbreite von 140 mm erreicht, während die Maxillarbreite mit 103 mm keineswegs auffällt. Auch die Supraorbitalbreite bleibt mit 110 mm hinter der bei T 11 zurück.

Fig. 21.



Turfan 8.

Über die Schädel T 5 und T 10 kann ich mich kürzer fassen. Beide zeigen in der Beschaffenheit des untern Augenhöhlenrandes mongoloide Anklänge. T 6 von mäßigen Dimensionen gleicht T 9 in vielen Punkten; abweichend ist jedoch die Gestaltung des Processus jugalis des Frontale, der, stark abgesetzt und schräg nach hinten gerichtet, auffällig an das Verhalten bei T 11 erinnert. Über das Geschlecht von T 5 wage ich kein bestimmtes Urteil.

T 10 ist so zerstört, daß ein näheres Eingehen auf denselben kaum lohnt, fehlen doch sogar die Jugalia fast ganz. Auffällig ist die extreme Zusammendrängung der Nasalia unmittelbar unter dem Nasion, verbunden mit Ausprägung einer scharfen Crista internasalis an gleicher Stelle.

Die jugendlichen Schädel können nur von dem Gesichtspunkt aus hier mitverwertet werden, inwieweit an dem Gesichtsskelett derselben bereits sich Annäherungen an die Typen der Erwachsenen zeigen. Bei T 3 und T 7 läßt sich in der Tat bereits die beginnende Ausprägung der mongoloiden Charaktere feststellen. Namentlich bei T 7 ist die Auftreibung der knöchernen Nase schon sehr deutlich. Die Nasenbeine, nur rechts defekt, erinnern hingegen in ihrer langen schmalen Form an T 2 und T 8. Der untere Augenhöhlenrand ist bei T 7 schon deutlich vorgeschoben. An T 3 fällt die außerordentliche Verschmälerung der Nasenbeine auf und deren sehr steile Stellung, der M-Gruppe entsprechend. Bei T 14, 17, 18 treten hingegen die mongoloiden Züge zurück. Namentlich bei T 18 bilden die relativ großen Nasalia einen deutlichen Nasenrücken, die ganze Konfiguration erinnert an T 1. Noch manche Einzelheiten direkter individueller Ähnlichkeiten der Kinderschädel mit den Erwachsenen fallen auf. Vielleicht wird es später möglich sein, bei noch genauerer Durcharbeitung der einzelnen Knochen auch die Morphologie des Gesichtsskeletts für die Probleme der Vererbung und Rassenmischung zu verwerten.

2. Unterkiefer.

Wenn die Zahl der Unterkiefer auch klein ist, so läßt sich doch aus ihrer Untersuchung einiges zur Diagnostik entnehmen. Unter Hinweis auf die beigefügte Zahlentabelle und die Diagramme läßt sich zeigen, daß auch in den Unterkiefern sich verschiedene Rassenkomponenten verbergen.

In einer frühern Arbeit[1] habe ich den Versuch gemacht, die verschiedene Stellung der vordern Unterkieferplatte zu der von mir als Horizont vorgeschlagenen Alveolarebene rassendiagnostisch zu verwerten. Die Prüfung des Turfanmaterials liefert eine gute Probe auf die Brauchbarkeit meines Vorschlages. Ich hatte damals bereits gefunden, daß bei malaiischen und mongoloiden Objekten sich in der Regel ein sogenanntes neutrales Kinn findet, d. h. eine Senkrechte von dem »Inzision« aus errichtet, tangiert den Kinnvorsprung.

Dieser Befund läßt sich nun auch mit großer Deutlichkeit an dem Unterkiefer von T 9, der als einziger der M-Gruppe erhalten ist, erkennen. Derselbe unterscheidet sich darin sehr wesentlich von dem Unterkiefer T 11. Wie nach dem kaukasoiden Habitus des ganzen Schädels zu erwarten war, besitzt diese Mandibula ein positives Kinn; die Inzisionsvertikale durchschneidet den Kinnvorsprung. Denselben europäischen Charakter zeigen die Unterkiefer von T 4 und T 8, an deren Gesichtsskelett deutliche Mischzustände erkannt wurden. Anderseits weist T 1 in diesem Punkt eine mongoloide Beschaffenheit auf, und zwar vereinigt mit einem Merkmal, das mir schon früher an den Unterkiefern besonders von Japanern aufgefallen war, nämlich der tiefen Einziehung der Partie unmittelbar unter den Inzisiven. An dieser Stelle verdünnt sich die Knochensubstanz ganz auf-

---

[1] H. Klaatsch, Kraniomorphologie und Kraniotrigonometrie. Archiv für Anthropologie 1908.

Fig. 22.

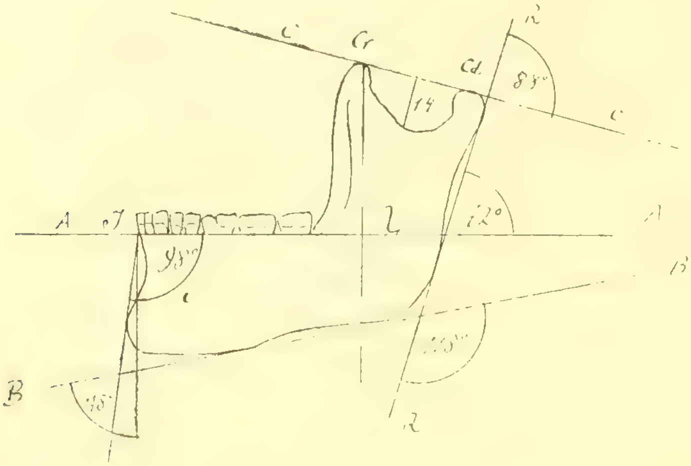
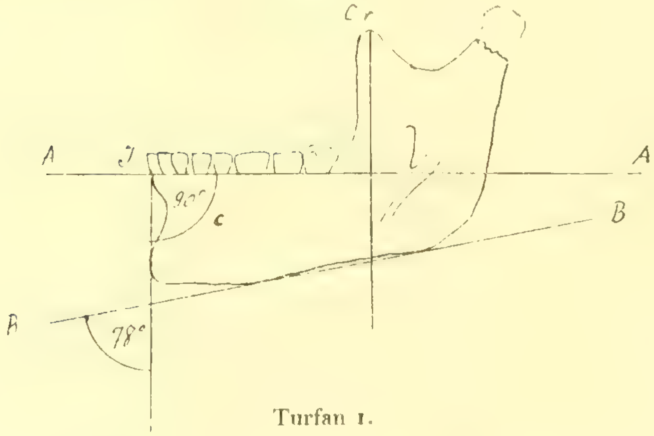


Diagramm des Unterkiefers von Turfan II.

Fig. 23.

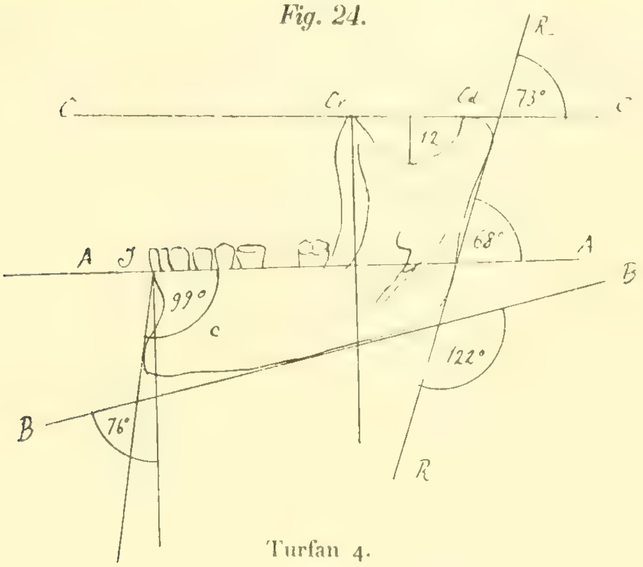


Turfan I.

fällig bei den betreffenden mongoloiden Vergleichungsobjekten, und dies ist auch bei T I der Fall. Die Zähne erhalten dadurch in ihren Wurzeln eine nach hinten gelegene Richtung.

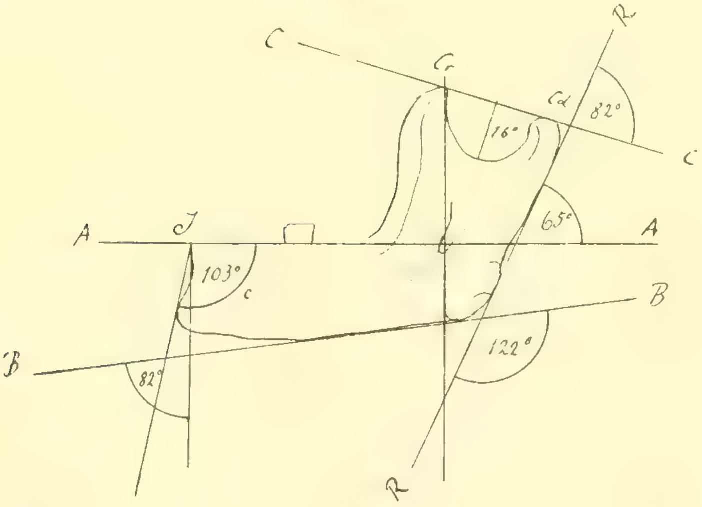
Diese Erscheinung kehrt nun auch in Andeutung bei den andern Unterkiefern wieder, sogar bei T II, so daß wenigstens hierin doch ein Misch-

Fig. 24.


R
C
Cr
Cd
73°
C
12
68°
A
J
A
B
99°
c
122°
B
76°
R

Turfan 4.

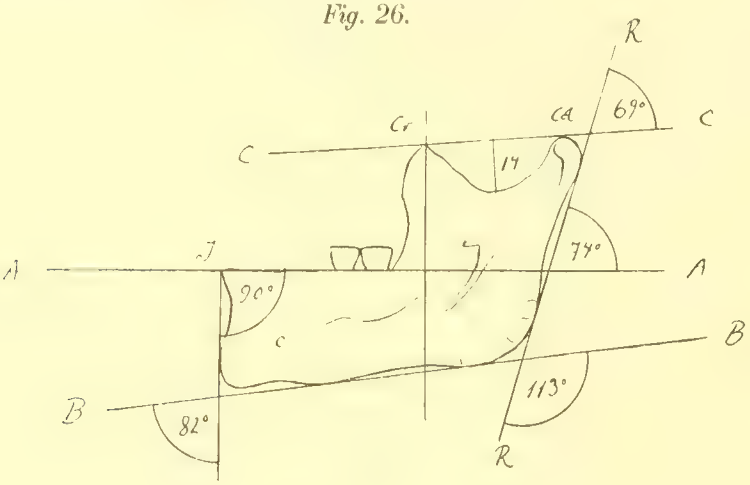
Fig. 25.


C
Cr
R
Cd
82°
16°
C
A
J
65°
A
103°
c
B
122°
B
82°
R

Turfan 8.

charakter sich offenbart. Gerade in diesem Punkte unterscheidet sich auch T 11 von der Lappländermandibula des schon früher zur Vergleichung herangezogenen Schädels, während im übrigen auch hier sich Übereinstimmungen zeigen. Solche bestehen in der bedeutenden Entfaltung der dritten Molaren, in der Konfiguration des Ramus und der untern Kinnpartie. Die Fossae digastricae stehen bei beiden Objekten basalwärts gerichtet und haben beträchtliche Dimensionen, im Unterschied von T 9 und T 4, wo die Gruben klein sind und mehr schräg nach hinten stehen. T 9 und die Lappländermandibula besitzen entsprechend der Gestaltung der Digastrikusinsertion die von mir als Lateralkinn bezeichnete Bildung. T 11 läßt eine leichte Andeutung der von mir als Incisura submentalis bezeichneten und als primitive Bildung nachgewiesenen Erscheinung erkennen.

Fig. 26.



Turfan 9.

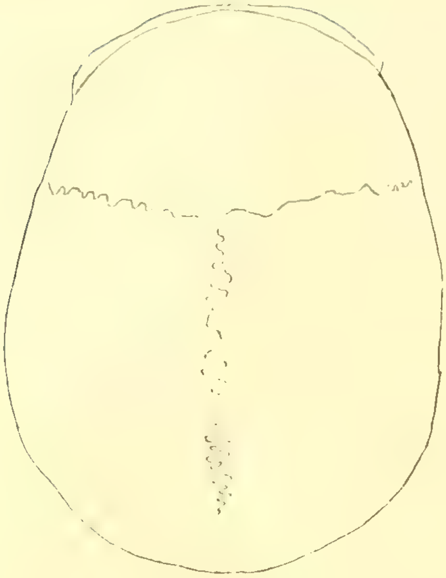
Es ist sehr zu bedauern, daß von T 15 keine Mandibula vorhanden ist. Immerhin genügt das vorhandene Material, die M- und K- bzw. L-Gruppe bezüglich der Kinnregion zu bestätigen. Auch die morphologische Untersuchung des Ramus liefert weitere Beiträge hierzu. Der Unterkiefer T 9 zeichnet sich durch einen auffällig breiten Ramus aus in Vergleichung mit T 11. Darin liegt ein Typus vor, der mir von malaiischen und mongolischen Unterkiefern wohlbekannt ist. Genaueres Zusehen läßt sogar in Einzelheiten der Gestaltung der Processus coronoidei, der Incisura postcoronoidea, der Beschaffenheit des vorderen Randes des Processus coronoideus und anderem Annäherungen von T 9 an die betreffenden Vergleichungsobjekte erkennen, während der schlanke Ramus von T 11 in Europäerobjekten seine Parallele findet.

Ein Schüler von mir, Hr. Zahnarzt Elsner, ist seit zwei Jahren mit einer ganz eingehenden rassendiagnostischen Untersuchung der Unterkiefer beschäftigt und hat auch unter meiner Anleitung die Turfanunterkiefer mit einem großen Material verglichen, wobei sich nur Bestätigungen der hier kurz vorgetragenen Resultate ergeben haben. Auf seine demnächst erscheinende Arbeit sei daher hier hingewiesen.

3. Die Gehirnkapsel.

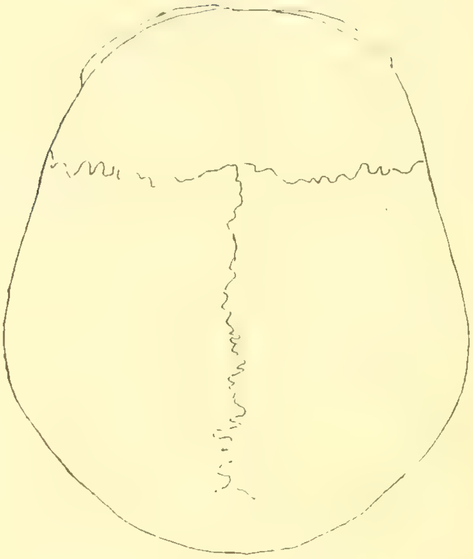
Über die Längen- und Breitenverhältnisse der Schädel gibt die beigefügte Tabelle Auskunft. Die Beifügung derselben verfolgt den mehr negativen Zweck, zu zeigen, daß aus diesen Zahlen sich nicht der geringste rassendiagnostische Gesichtspunkt ergibt. Wer von diesen althergebrachten Indizes aus versuchen wollte, in die Eigenart eines solchen Schädelmaterials einzudringen, der würde die größte Enttäuschung erleben. Schädel, die wir nach dem Gesichtsskelett als verwandt miteinander erkannt haben, werden durch die Indizes voneinander in viel höherem Maße getrennt als von den Schädeln, die nach der Gesichtsbildung andern Gruppen angehören. Die Besonderheit von T 11, T 15 tritt der M-Gruppe gegenüber hiernach gar nicht hervor, anderseits fällt T 13 durch seine ganz allein dastehende Annäherung an Dolichozephalie aus dem Kreis der M-Gruppe heraus. Starke Tendenz zu Brachyzephalie können wir als allgemeine Regel für die T-Schädel hinstellen. Nicht sonderlich ergebnisreicher ist die Betrachtung der Höhenproportionen, worüber die Tabelle der Höhen-Längenindizes Auskunft gibt. Allenfalls kann man jedoch in der Annäherung der Indizes von T 9, T 12, T 13, T 16 an einen Mittelwert den Ausdruck einer Zusammengehörigkeit erkennen; die abgerundeten Zahlen 71, 71, 75, 76 sprechen in diesem Sinne. Auch mag die Besonderheit von T 15 in dem relativ hohen Index 81, 56 wiedergefunden werden. T 11 steht an unterster Stelle und bestätigt darin die auf das Gesichtsskelett begründete Sonderung von T 15. Aber diagnostisch Verwertbares liegt in allen diesen Zahlen nicht. Aus gleichem Grunde habe ich von der Bestimmung der Kapazität ganz Abstand genommen, die bei dem defekten Zustand des Materials nur von wenigen Objekten hätte ausgeführt werden können. Etwas dankbarer erweist sich die spezielle Vergleichung mancher Befunde der Schädelbasis und der Okzipitalregion, um die am Gesichtsskelett erkannten Typen zu ergänzen, aber etwas wesentlich Neues wird dadurch nicht gegeben. Ich behalte mir vor, bei späteren Gelegenheiten

Fig. 27.



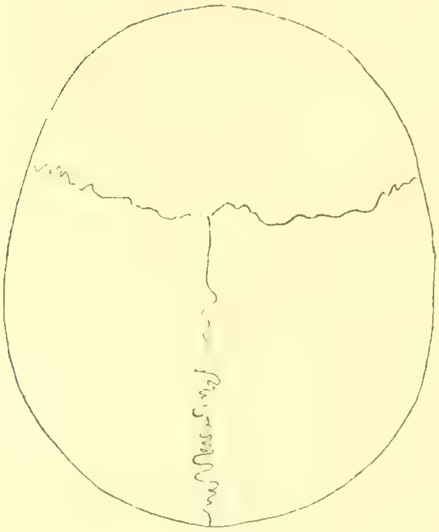
Turfan 13.

Fig. 28.



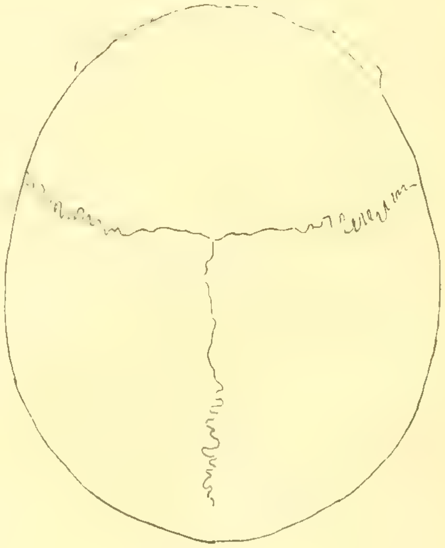
Turfan 11.

Fig. 29.



Turfan 15.

Fig. 30.



Turfan 16.

Fig. 27—30.

Norma verticalis von Turfanschädeln. Dieselbe bietet wenig Charakteristisches in Vergleichung mit dem Gesichtsskelett. T 13, 16 gehören dem mongoloiden Typus an.

Die nichtmongoloiden T 11 und T 15 sind voneinander recht verschieden. Bei T 11 fällt die starke Verbreiterung in der hinteren Parietalregion auf, die T 15 ganz fehlt.

die Turfanschädel auch bezüglich dieser Teile zur Vergleichung heranzuziehen, sehe aber vorläufig von einer Beschreibung ab, da die bereits aufgedeckten Punkte vollkommen genügen, um ein rassenanatomisches Urteil über das Material zu gewinnen.

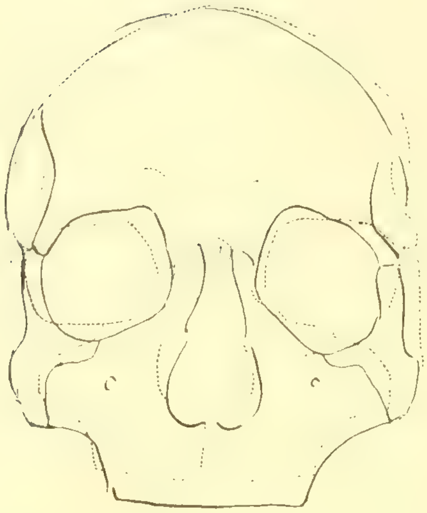
Ergebnisse.

Fassen wir die Gesamtergebnisse der Einzeluntersuchungen in Kürze zusammen, so sehen wir, daß trotz der Kleinheit des Materials und seiner mangelhaften Erhaltung doch von kraniologischer Seite sich ein Beitrag zu den ethnologischen und kulturellen Fragen liefern läßt.

Die morphologische Analyse läßt unter dem Turfanmaterial verschiedene Elemente erkennen, die teils ziemlich rein in die Erscheinung treten, teils in Mischung miteinander erkennbar sind.

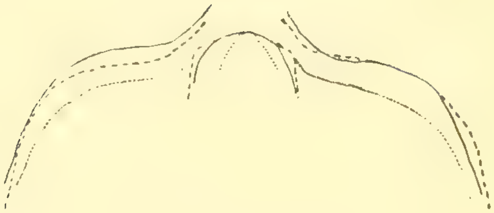
Am leichtesten läßt sich eine Komponente der Turfanbevölkerung herauserkennen, die den Mongolentypus zur Schau trägt. Die Schädel T 9, 12, 13, 16 bilden darin eine zusammengehörige Gruppe. Am Gesichtsskelett ist es besonders die Beschaffenheit der Umrandung der Augenhöhle und der knöchernen Nase, die unverkennbare Ähnlichkeit mit den Schädeln von typischen Mongolen bezeugen. Damit verbindet sich die Beschaffenheit der Kinnregion und des ganzen Unterkiefers, wie T 9 zeigt. Damit ist von kraniologischer Seite das eine Element, das uns auf den bildlichen Darstellungen der Turfanleute entgegentritt, vollständig aufgeklärt. Wir finden aber auch unter dem Knochenmaterial die Repräsentanten jener andern Menschen wieder, der »Indoskythen« mit ihren europäischen Gesichtszügen, den blonden Haaren, den starken Nasen und dem finstern Blick unter den buschigen Brauen. Da ist vor allem der Schädel T 11, der gut auf diesen Typus paßt. In erster Linie ist er nicht mongolisch, dafür legen die Einzelheiten seines Gesichtsskeletts deutlich Zeugnis ab. Hier fehlt jene Vordrängung der Infraorbitalregion, jene Auftreibung der Knochennase. In allen diesen negativen Punkten stimmt T 11 mit T 15 überein, einem ebenfalls deutlich kaukasoiden Individuum. Aber im einzelnen sind beide recht verschieden voneinander, und damit ergeben sich neue Fragen, auf die ich bei der Kleinheit des Materials vorläufig eine Antwort nicht zu geben vermag. Diese Fragen betreffen die Zusammensetzung des nichtmongoloiden Teils des Turfanvolkes. War dieser Teil

Fig. 31.



Vergleichende Projektion des Gesichtsskeletts von Turfan 12 (————) und Turfan 11 (··········), von denen T 12 dem mongoloiden, T 11 einem kaukasoiden Typus entspricht.

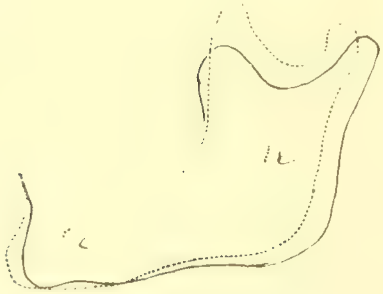
Fig. 32.



———— Turfan 12.
- - - - Turfan 13.
·········· Turfan 15.

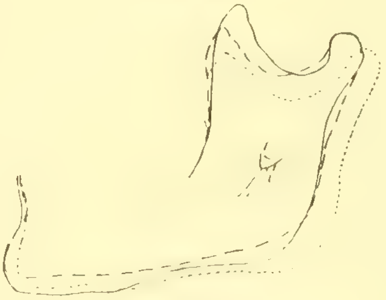
Kurven, in horizontaler Richtung der Ebene der oberen Jochbeinränder parallel durch die Oberkiefergegend und durch die Mitte der Nasalia gelegt und aufeinander projiziert. Die Kurven der Schädel der M-Gruppe T 12, 13 decken einander vielfach oder nähern sich der Deckung, während die Kurve des Schädels T 15 sowohl in der Maxillar- als in der Nasalgegend sich bedeutend von den beiden andern entfernt.

Fig. 33.



Vergleichende Projektion von Turfan 9 (————) und Turfan 11 (··········), den Unterschied des mongoloiden (T 9) und des nichtmongoloiden Typus (T 11) zeigend.

Fig. 34.



———— Turfan 11.
- - - - Turfan 4.
·········· Turfan 9.

T 4 nimmt eine intermediäre Stellung zwischen dem mongoloiden (T 9) und nichtmongoloiden (T 11) Typus ein, dem letztern sich näher anschließend.

einheitlich oder wieder aus verschiedenen Quellen hervorgegangen? Sind die Unterschiede von T 11 und T 15 nur individuelle Variationen oder der Ausdruck für Verschiedenheiten von Rassentypus? Wenn ich bezüglich T 11 die Vergleichung speziell mit einem Lappenschädel und dem Cro-Magnon-Typus ausgeführt habe, so wollte ich damit nur möglichst klar das Tatsächliche hervorheben, ohne auf nähere Rassenbeziehungen hinzudeuten. Für T 15 drängte sich mir nicht eine solche speziellere Vergleichungsmöglichkeit auf.

Ich hatte eine Zeitlang, durch eine Bemerkung von Hrn. Prof. Grünwedel veranlaßt, auf die Möglichkeit der Erlangung noch weiteren Turfanmaterials gehofft, jedoch umsonst. Nur ein größeres Material kann hier Aufklärung bringen. Bis dahin werden wir von den kulturellen Forschungen wohl mehr Förderung bezüglich des Problems der Herkunft dieser kaukasoiden oder indogermanischen Elemente zu erwarten haben, aber wie ich hoffe, ist den Archäologen vielleicht schon durch den sichern somatischen Nachweis dieser Elemente unter dem Schädelmaterial von Turfan ein kleiner Dienst erwiesen.

Was mir von archäologischer Seite über die Vereinigung der Elemente zu einem Volke mitgeteilt wurde, findet in den ausgesprochenen Mischcharakteren, die an der Mehrzahl der Turfanschädel sich nachweisen lassen, eine klare Bestätigung. Die höchst merkwürdigen Kombinationen der Urtypen in Schädeln, wie namentlich T 6, aber auch den weiblichen Objekten T 4, T 8 und sogar in den kindlichen Objekten bieten noch ein weiteres Feld der Forschung dar. Überhaupt muß ich nach vielen Richtungen hin das hier Niedergelegte als durchaus fragmentarisch bezeichnen. Je größer das Vergleichungsmaterial wird, um so mehr Aufschlüsse, aber auch Fragen ergeben sich. Ich möchte daher das Studium der Turfanschädel auch noch über diesen durch äußere Umstände bedingten Abschluß fortsetzen.

Übersicht des Materials.

	Unterkiefer	Geschlecht	Alter	Gebiß	Erhaltungszustand
1	Vorhanden	♂	Erwachsen, mittelhöheres Alter, Sagittalnaht zum Teil geschlossen	Zähne abgekaut, intra vitam vollständig	Defekt Schädelbasis, Jugale rechts, Kieferregion
2	—	?	Erwachsen, mittleres Alter, Nähte offen	Intra vitam vollständig, Zähne nicht abgekaut	Ziemlich gut, Defekte Nasalgegend links
3	—	?	Jugendlich	2. Molar im Durchbruch	Defekte Kieferregion rechts
4	Vorhanden	?	Erwachsen, jung	Gebiß intra vitam vollständig, nicht abgekaut	Defekte Schädelbasis, Kieferregion rechts, Ethmoidalregion
5	—	♂	Erwachsen, höheres Alter, Nähte zum großen Teil geschlossen	Abgekaut, intra vitam bis auf den 3. Molar rechts vollständig	Defekte Nasalgegend, Stirn rechts
6	—	♂	Höheres Alter, Nähte zum großen Teil geschlossen	Intra vitam vollständig, post mortem alle Zähne verloren	Defekte der Nasalgegend
7	—	♀	Jugendlich	2. Molar durchgebrochen	Defekte Temporalregion links, Nasalgegend
8	Vorhanden	?	Erwachsen, jung	3. Molar vorhanden. Zähne wenig abgekaut	Ziemlich vollständig
9	Vorhanden	♂	Höheres Alter, Nähte zum größten Teil obliteriert	Karies der Molaren	Defekt der Nasalgegend
10	—	?	Mittelhöheres Alter	Vollständig, mäßig abgekaut, post mortem defekt	Große Defekte der Schädelbasis und des Gesichtsskeletts
11	Vorhanden	♂	Mittelhöheres Alter	Vollständig	Defekte der Schädelbasis und Nasalregion
12	—	♂	Mittelhöheres Alter	Alle Zähne post mortem verloren	Defekte der Alveolargegend
13	—	♂	Mittelhöheres Alter	Fehlt	Der ganze untere Teil des Gesichtsskeletts fehlt
14	Vorhanden	?	Kindlich	1. Molar im Durchbruch	Vollständig
15	—	♂	Erwachsen, mittleres Alter	Sehr defekt	Defekte an Schädelbasis, Nasalgegend, Jugale links, Alveolarrand
16	—	♂	Erwachsen, mittleres Alter	intra vitam bis auf den 3. Molar rechts vollständig, abgekaut	Defekt der Nasenbeine
17		?	Jugendlich	2. Molar durchgebrochen	Ziemlich vollständig
18	—	?	Kindlich	1. Molar durchgebrochen	Defekte Schädelbasis, Temporalregion rechts

Ossa nasalia.

Ossa nasalia	Vertikale Länge median	Länge seitlich		Diameter transversal oben			Diameter transversal an der schmalsten Stelle			Diameter transversal unten		
		rechts	links	rechts	links	Breite im ganzen	rechts	links	Breite im ganzen	rechts	links	Breite im ganzen
1	17	24	—	8	8	13	5	5	9	10	10	18
2	25	29	—	4.5	4.5	8	3	3	4.5	8	—	13
3	—	—	etwa 23	5.5	5.5	9	4	4	6.5	—	—	etwa 14
4	etwa 19	—	etwa 23	4	3	6	3.5	3.5	6	—	—	etwa 17
5	—	—	etwa 25	9	5	13	6	6	11	—	—	etwa 17
6	—	—	etwa 26	7.5	7.5	12.5	—	—	—	—	—	etwa 25
7	24	—	etwa 26	8.5	4	10.5	4	4.5	6	10	10	18
8	26	29	30	3	5	8	3.5	3.5	5.5	9	10	16
9	—	—	etwa 30	8	9	17	6	6	11	—	—	25
10	—	—	etwa 24	9	6.5	12	3.5	3.5	6	—	—	etwa 17
11	—	—	etwa 26	8	8	13	—	—	—	—	—	etwa 17
12	24	30	30	6	5.5	11	4.5	4.5	7	11	11	20
13	27	30	30	7	3.5	11	4	4	7	11	—	26
14	17	18	18	6	4.5	8.5	3.5	3.5	6	5.5	5.5	11
15	—	—	etwa 25	9	9	13	7	7	8	—	—	etwa 17
16	—	—	etwa 31	6	3.5	8.5	3	3	5	—	—	etwa 17
17	—	—	etwa 23	7	4	10	5	5	7	—	—	etwa 17
18	13	18	18	6.5	6.5	10	7	7	10	8	8	13

Mandibula.

	T 9	T 11	T 4	T 1	T 8
Größte Distanz von Kondylus — Mitte, hinterer Rand — Inzision	r. 108, l. 110	r. und l. 111	r. und l. 104	defekt etwa 105	r. 105, l. 102
Äußere Kondylenbreite	104	127!	114	defekt	113
Kondylenmittenabstand	96	106	102	defekt	98
Angulusbreite	90	107	92	96	91
Äußere Breite am Molar III	77	91	84	84	78
Äußere Breite am Molar II	66	84	78	81	75
Äußere Breite am Molar I	63	75	68	74	65
Innere Weite am Molar III	41	46	45	43	45
Innere Weite am Molar II	38	41	42	41	40
Innere Weite am Molar I	31	37	36	defekt	34
Höhe der Symphyse ohne Zähne	32	31	31	32	27
Höhe des Korpus am Molar II	r. 29.5, l. 27	r. 27.5, l. 27	l. 24	r. 26	r. 24.5, l. 23.5
Kondylusdiameter transversal	r. und l. 19	r. und l. 21	r. 19.5, l. 18	defekt	r. 19.5, l. 19
Kondylusdiameter sagittal	r. 10, l. 11	r. und l. 9.5	r. 7.5, l. 7	—	r. 9.5, l. 9
Breite des Ramus an der Incisura subcoronoidea	r. und l. 36	r. und l. 31	r. 31, l. 32	r. und l. 35	r. und l. 32
Kauwinkel	90°	98°	99°	90°	103°
Anguluswinkel	113°	118°	122°	—	122°

Längen-Breiten-Indizes.

	Größte Länge	Größte Breite	Längen-Breiten-Index temporal	Längen-Breiten-Index panetal
1	160	p. 140		88.05
2	162	t. 139 (p. 138)	85.80	85.19
3				
4	170	t. 145 (p. 138)	85.29	81.18
5				
6	166	t. 148 (p. 140)	89.16	84.34
7				
8				
9	171	t. 140 (p. 136)	81.87	79.53
10				
11	183	p. 149		81.42
12	174	p. 142		81.61
13	184	p. 136		73.91
14				
15	179	p. 140		78.21
16	174	t. 142 (p. 140)	81.61	80.46
17				
18				

Längen-Höhen-Index.

	Größte Länge	Basion Brym Höhe	Höhen-Längen-Index
1	160	128	80
2	162	130	80.25
4	170	123	72.35
6	166	135	81.33
9	171	121	70.76
11	183	128	69.95
12	174	124	71.26
13	184	138	75
15	179	146	81.56
16	174	133	76.44

Erklärung der Tafelfiguren.

Tafel I stellt die Jochbeinregion von zwei der Turfanschädel dar, die den mongoloiden Typus zeigen, in schräger Ansicht der Schädel mit voller Ansicht auf das Jugale und horizontaler Einstellung des obern Jochbeinrandes.

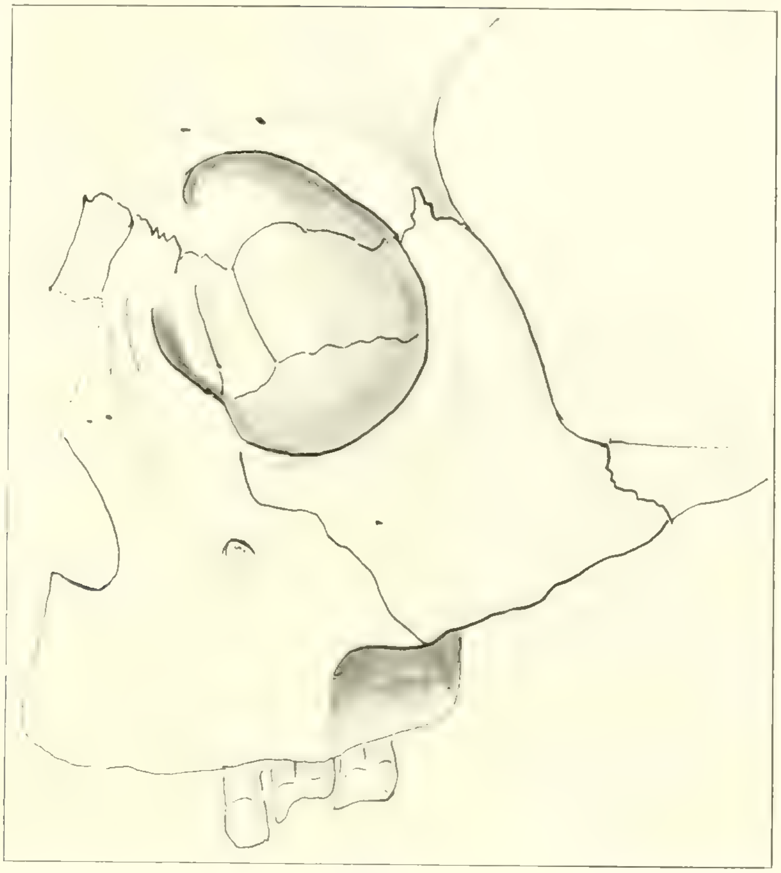
Die Bedeutung der Einzelheiten ergibt sich aus dem Text.

Tafel II. Stereoskopische Ansichten der Norma facialis eines Schädels vom mongoloiden Habitus (T 16) und eines nichtmongoloiden (T 15). Zu beachten hauptsächlich die Verschiedenheiten der Nasalregion sowie des Infraorbitalrandes.

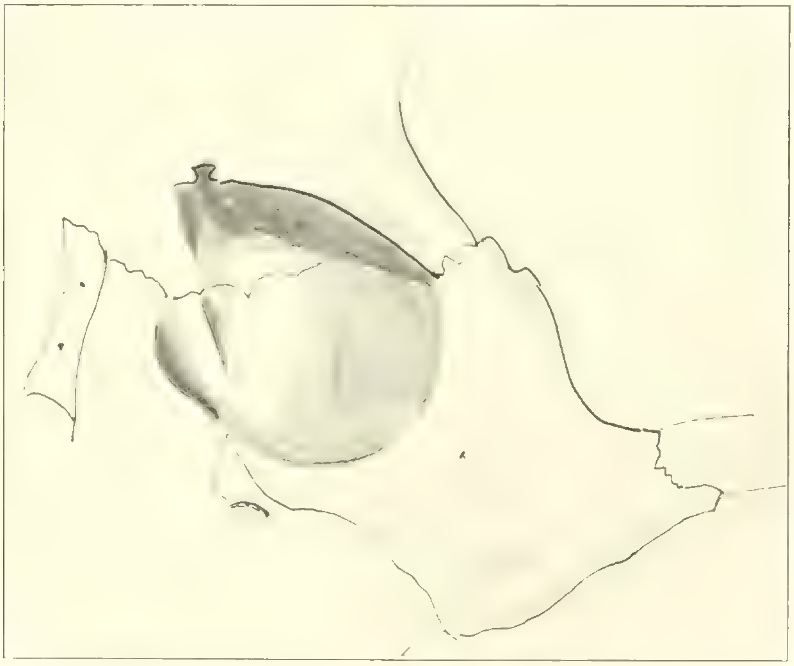
Tafel III. Stereoskopische Ansichten in Schrägprofil eines deutlich mongoloiden Turfanschädels (T 9) und eines von kaukasoidem Typus (T 11), entsprechend den beiden verschiedenen Gesichtstypen auf den farbigen Gobelins der Turfansammlung. Über die Einzelheiten siehe Text.

Tafel IV. Porträt eines Mannes, der dem nichtmongoloiden Typus angehört. Die prominente Nasenbildung, die Einziehung der Nasenwurzel, die Stirnbildung, deren Runzelung Supraorbitalwülste andeutet, das vorspringende Kinn entsprechen einem kaukasoiden Habitus und Schädelbildungen wie T 11 und T 15.

Photographie nach den Gobelins der Le Coqschen Turfansammlung.



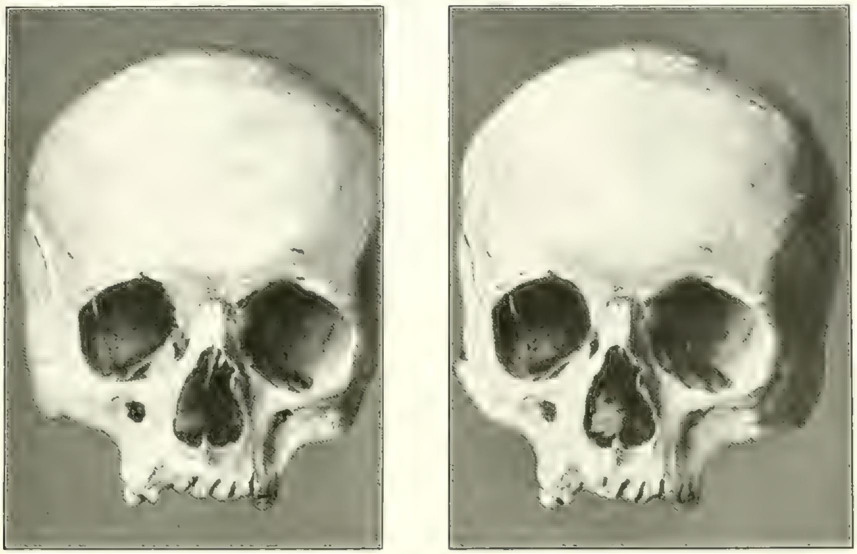
Turfan 9.



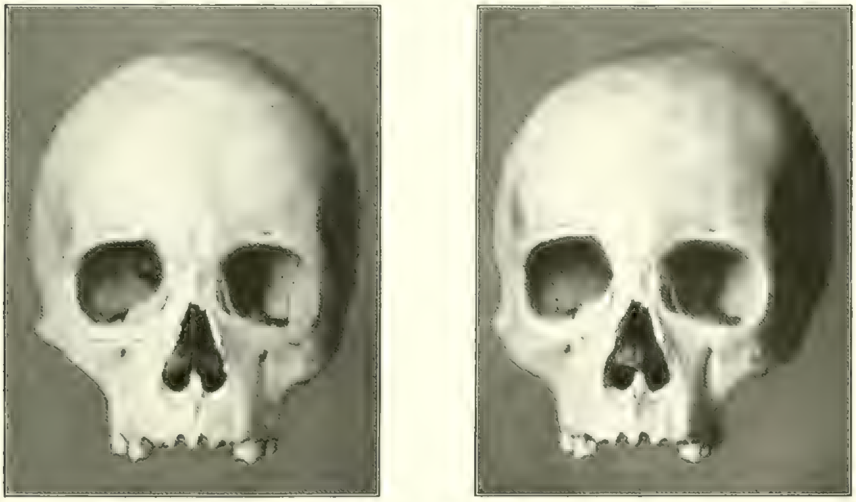
Turfan 13.

H. Klaatsch: Morphologische Studien zur Rassendiagnostik der Turfanschädel.

Taf. I.



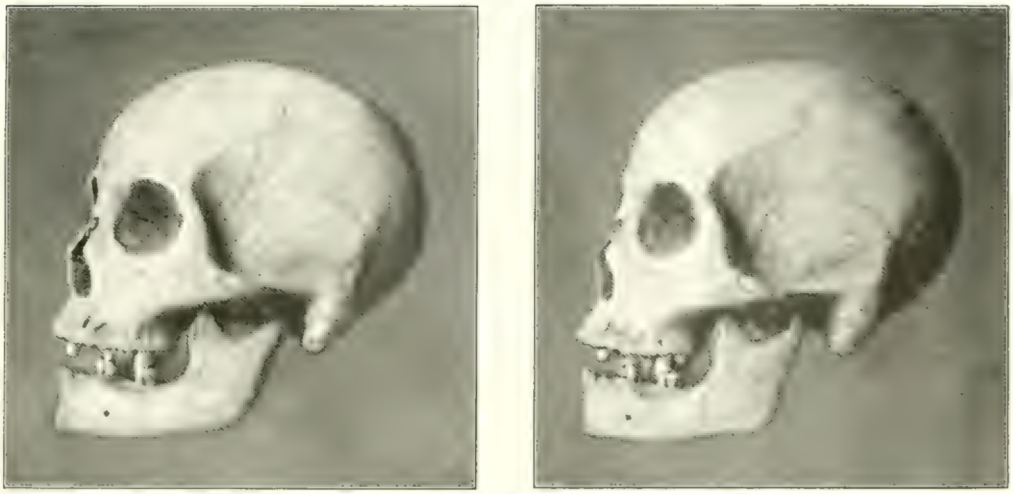
Turfan 15.



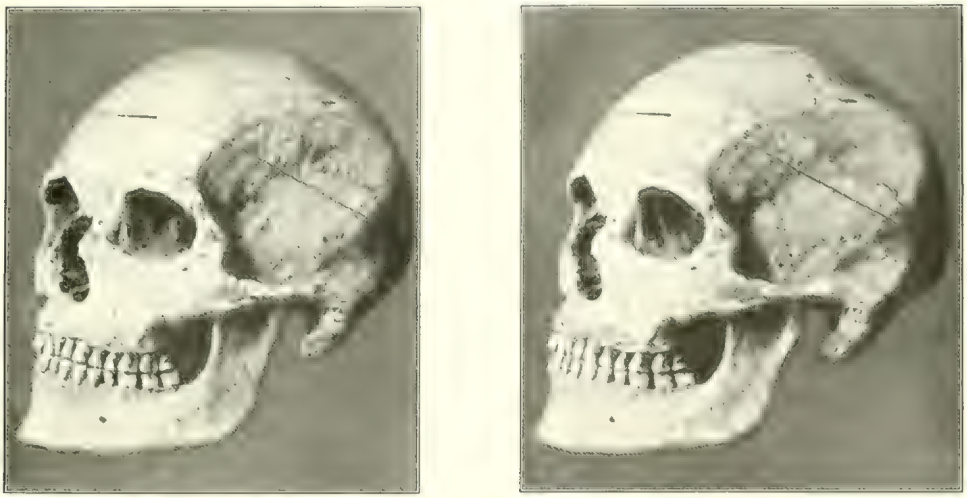
Turfan 16.

H. Klaatsch: Morphologische Studien zur Rassendiagnostik der Turfanschädel.

Taf. II.



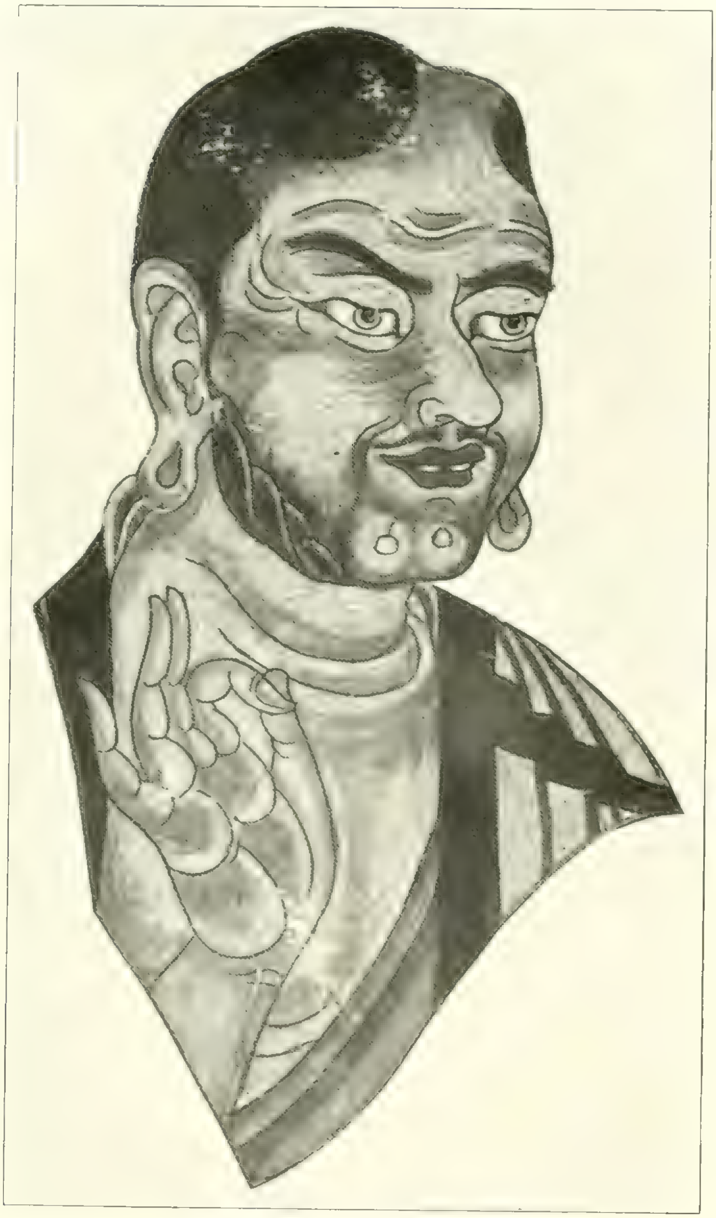
Turfan 9.



Turfan 11.

H. Klaatsch: Morphologische Studien zur Rassendiagnostik der Turfanschädel.

Taf. III.



H. Klaatsch: Morphologische Studien zur Rassendiagnostik der Turfanschädel.

Taf. IV.

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01298 9000